Zwischenprüfung
Analysis I D-BAUG
27. Februar 2018

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

Version A

Viel Erfolg!

1. Was ist die (maximale) Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Bildmenge $B_f = \{f(x) \,|\, x \in D_f\}$ der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{2x^3 + 16}?$$

√ (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Der Ausdruck, durch den f gegeben ist, ist wohldefiniert, so lange im Nenner nicht durch Null geteilt wird. Die maximale Definitionsmenge ist somit

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon 2x^3 + 16 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x^3 \neq -8\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{2x^3 + 16} = \frac{1}{2} - \frac{12}{2x^3 + 16}.$$

Somit kann $\frac{1}{2}$ nicht im Bildbereich B_f von f liegen. Für $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ gilt:

$$\begin{aligned} y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^3 - 4}{2x^3 + 16} &\Leftrightarrow x^3 - 4 = (2x^3 + 16)y \\ &\Leftrightarrow x^3(1 - 2y) = 4 + 16y \Leftrightarrow x^3 = \frac{4 + 16y}{1 - 2y} \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{4 + 16y}{1 - 2y}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

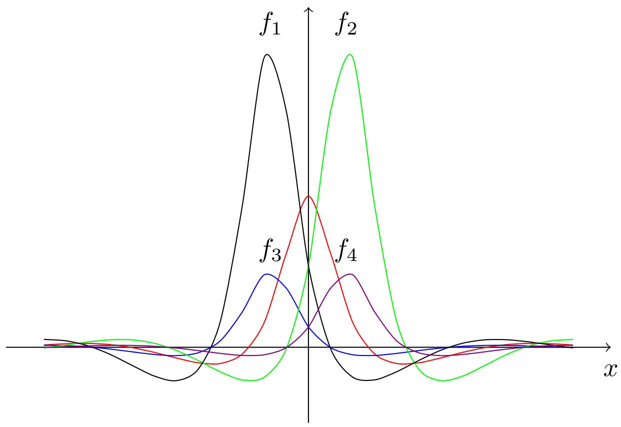
Insbesondere existiert für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = y$. Dass $x \neq -2$ und somit $x \in D_f$, kann man an der obigen Gleichung ablesen (für $x = -2$ müsste $\frac{4+16y}{1-2y} = -8$ sein, was für $y \in D_f$ unmöglich ist). Folglich ist die Bildmenge $B_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. Die untenstehende Abbildung bildet die Graphen verschiedener Funktionen ab. Der rote Graph (als einziger symmetrisch zur y-Achse) ist derjenige von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2\cos(x)}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Welcher Graph gehört zu der Funktion

$$g(x) = \frac{\cos(x+1)}{1+(x+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}?$$



(a) der schwarze (f_1)

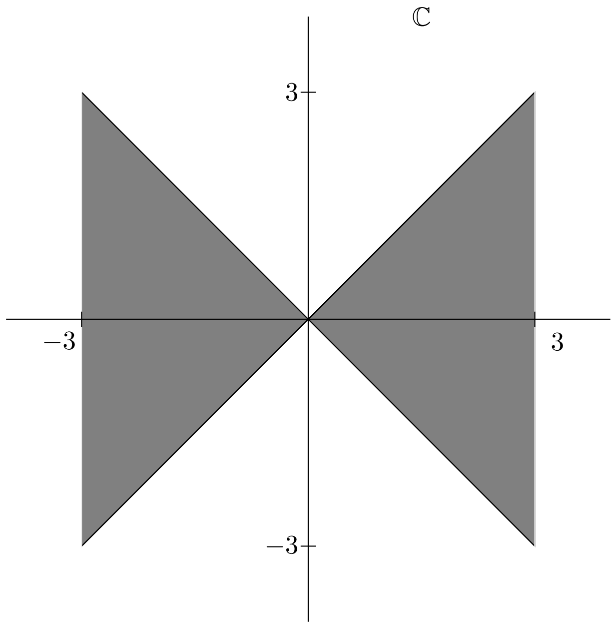
(b) der grüne (f_2)

√ (c) der blaue (f_3)

(d) der violette (f_4)

Es gilt, dass $g(x) = \frac{1}{2}f(x+1)$, d.h. der Graph von g ist gegenüber dem Graphen von f um 1 nach links verschoben und um den Faktor 2 gestaucht. Folglich kommt nur der blaue Graph in Frage.

3. Welche der folgenden Mengen ist in diesem Bild der komplexen Ebene grau gefärbt?



√ (a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Re}(z)| < 3 \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \le |\operatorname{Re}(z)|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Re}(z)| < 3 \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \ge |\operatorname{Re}(z)|\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Im}(z)| < 3 \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \le |\operatorname{Re}(z)|\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Im}(z)| < 3 \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \ge |\operatorname{Re}(z)|\}$

Die grau gefärbte Menge ist die Menge aller Punkte $z = x + iy$ in $\mathbb{C}$, für die $-3 < x < 3$ und $|y| \le |x|$ ist. Da $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$, kann die Menge also geschrieben als

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Re}(z)| < 3 \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \le |\operatorname{Re}(z)|\}.$$

4. Die Abbildung

$$z \mapsto \overline{e^{i\frac{\pi}{2}} z}$$

entspricht

(a) einer Rotation um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn

(b) einer Rotation um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn

√ (c) einer Spiegelung an der x-Achse mit anschließender Rotation um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn

(d) einer Spiegelung an der x-Achse mit anschließender Rotation um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn

Schreibt man die obige Abbildung als

$$\overline{e^{i\frac{\pi}{2}} z} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \overline{z},$$

erkennt man, dass dies einer Drehung des Punktes $\overline{z}$ um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn (dem mathematisch negativen Sinn) entspricht. Da $\overline{z}$ aus z durch Spiegelung an der x-Achse hervorgeht, wird hier also insgesamt eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn nach einer Spiegelung an der x-Achse ausgeführt.

5. Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein reelles Polynom vom Grad 10 mit

$$p(1-3i) = 0, \quad p(4) = 0, \quad p(5+i) = 0.$$

Wie viele reelle Nullstellen kann p höchstens haben?

(a) 2

(b) 4

√ (c) 6

(d) 8

Da echt-komplexe Nullstellen eines reellen Polynoms immer in konjugierten Paaren auftreten, folgt aus den Annahmen, dass p mindestens vier echt-komplexe Nullstellen hat. Damit kann p noch höchstens 6 reelle Nullstellen haben. (Tatsächlich ist dies auch tatsächlich möglich, wie das Polynom $x^6(x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 152x + 260)$ zeigt.)

6. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? **Erinnerung:** Es gibt nur eine richtige Antwort.

$\checkmark$ (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht-negative Nullfolge, so ist auch

$$b_n = \ln\left(a_n + \frac{n}{n+1}\right)$$

eine Nullfolge.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch

$$b_n = (-1)^n + \sin(a_n)$$

eine Nullfolge.

(c) Eine beschränkte Folge kann nicht divergieren.

(d) Eine Folge, deren Folgenglieder natürliche Zahlen sind, kann nur konvergieren, wenn sie konstant ist.

Für $n \to \infty$ konvergiert $a_n + \frac{n}{n+1}$ gegen 1 (und wegen $a_n \geq 0$ ist $a_n + \frac{n}{n+1} > 0$, b_n ist also wohldefiniert). Da ln eine stetige Funktion mit $\ln(1) = 0$ ist, folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(a_n + \frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{n}{n+1}\right)\right) = \ln(1) = 0.$$

7. Was ist der Grenzwert der Folge

$$a_n = (2n+1) - \sqrt{4n^2+1}$$

für n gegen unendlich?

√ (a) 1

(b) $\frac{1}{2}$

(c) ∞

(d) 0

Es gilt mit der dritten Binomischen Formel

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+1)^2 - (4n^2+1)}{(2n+1)+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{4n^2+4n+1-4n^2-1}{(2n+1)+\sqrt{4n^2+1}} \\ &= \frac{4n}{2n+1+\sqrt{4n^2+1}} \\ &= \frac{4}{2+\frac{1}{n}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} \to \frac{4}{2+0+\sqrt{4+0}} = 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

8. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{t+4}-2}.$$

(a) 0

(b) ∞

(c) 4

√ (d) 8

Es gilt mit der Regel von l'Hopital:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{t+4}-2} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cos(t)}{\frac{1}{2\sqrt{t+4}}} = \frac{2\cos(0)}{\frac{1}{2\sqrt{0+4}}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8.$$

9. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist dann im Allgemeinen **FALSCH**?

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert.

√ (c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ konvergiert.

(d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

(a), (b) und (d) sind allesamt wahr. (Tatsächlich konvergieren alle drei Reihen unter diesen Voraussetzungen ebenfalls absolut.) Für die absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht. Damit ist (c) falsch.

10. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Tangente an f?

(a) $-x + 1$

√ (b) $2x - 1$

(c) $\sqrt{7}x - 3$

(d) $-4x - 8$

Die Gleichung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(a, f(a))$ lautet

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = \frac{a^2}{2} + 1 + a(x - a) = ax - \frac{a^2}{2} + 1.$$

Mittels eines Koeffizientenvergleiches sieht man, dass von den vorgeschlagenen Antworten nur die Gerade $y = 2x - 1$ von dieser Gestalt ist (mit $a = 2$).

11. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **NICHT** stetig?

√ (a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & \text{für } x < -2, \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & \text{für } x < 1, \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & \text{für } x < -1, \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & \text{für } x < 0, \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Offenbar gilt $(-2)^3 - (-2)^2 + (-2) = -12 \neq -8 = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2)$.

12. Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt[3]{x+8}}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

√ (a) $c = -\frac{1}{12}$

(b) $c = -\frac{1}{27}$

(c) $c = \frac{1}{3}$

(d) $c = 0$

Mit der Regel von de l'Hopital folgt

$$c \overset{!}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt[3]{x+8}}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{3}(x+8)^{-2/3} = -\frac{1}{12}.$$

13. Was ist die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln(\tan(x))?$$

√ (a)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$$

(b)

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(c)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \ln(\tan x)$$

(d)

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Das folgt unmittelbar aus der Kettenregel und der Quotientenregel.

14. An welchem Punkt ist die Krümmung der Kurve

$$r(t) = (t^2, t^3) \quad t \in [1, 2]$$

maximal?

√ (a) $(1, 1)$

(b) $(2, 2\sqrt{2})$

(c) $(3, 3\sqrt{3})$

(d) $(4, 8)$

Die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve r, an der Stelle $r(t)$ ist bekanntlich durch die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

gegeben. Es gilt

$$\dot{r}(t) = (2t, 3t^2) \quad \text{und} \quad \ddot{r}(t) = (2, 6t).$$

Somit:

$$\kappa(t) = \frac{6t \cdot 2t - 2 \cdot 3t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}} = \frac{6t^2}{t^3(4 + 9t^2)^{3/2}} = \frac{6}{t(4 + 9t^2)^{3/2}}.$$

Offenbar ist der Nenner monoton wachsend in t, der Ausdruck $\kappa(t)$ also monoton fallend in t. Demnach ist die Krümmung am größten, wenn t am kleinsten ist, also bei $t = 1$. Dies entspricht dem Punkt $r(1) = (1, 1)$ auf der Kurve.

15. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 x^n}{5^{n-2}}$$

√ (a) 5

(b) $\frac{5}{2}$

(c) $\frac{2}{5}$

(d) $\frac{1}{5}$

Der Konvergenzradius berechnet sich zu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{5^{n-2}} \cdot \frac{5^{n-1}}{2(n+1)^2} = 5.$$

16. Was ist der Konvergenzbereich K der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^2-1)^n?$$

(a) $K = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(b) $K = (-1,0) \cup (0,1))$

√ (c) $K = \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$

(d) $K = (-1,1)$

Wir substituieren $y = x^2 - 1$ und erhalten die geometrische Reihe. Diese konvergiert für alle $y \in (-1,1)$. Die ursprüngliche Reihe konvergiert somit für alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 1 \in (-1,1)$. Dies sind gerade die x mit $0 < x^2 < 2$, also $x \in \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$.

17. Was ist der Koeffizient vor x^2 der Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = e^{\cosh(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

um den Entwicklungspunkt 0?

√ (a) $\frac{e}{2}$

(b) e

(c) e^2

(d) e^e

Der Koeffizient vor x^2 in der Taylorreihe von f um 0 ist $\frac{1}{2}f''(0)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\sinh(x) \\ f''(x) &= f'(x)\sinh(x) + f(x)\cosh(x), \end{aligned}$$

also

$$f''(0) = f(0)\cosh(0) = e.$$

Der gesuchte Koeffizient ist also $\frac{e}{2}$.

18. Sei $F(x)$ die Stammfunktion von

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Was ist der Koeffizient vor x^3 in der Taylorentwicklung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

von F um 0?

√ (a) $-\frac{1}{6}$

(b) $-\frac{1}{336}$

(c) $\frac{1}{160}$

(d) 1

Es gilt

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n! \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} x^{2n}$$

und somit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

Der Koeffizient vor x^3 ergibt sich für $n = 1$ und lautet

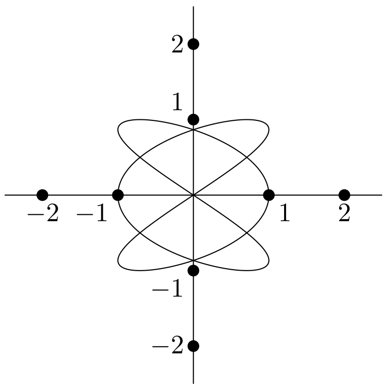
$$\frac{(-1)^1}{1! \cdot 2^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}.$$

19. Welche der folgenden Kurven ist durch

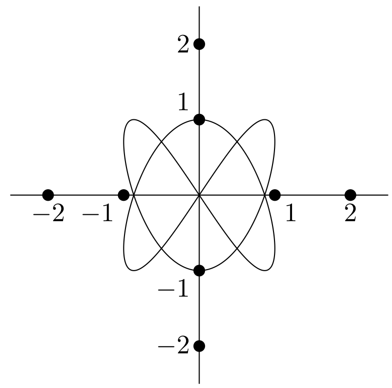
$$t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisiert?

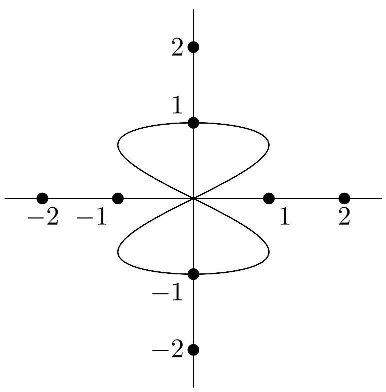
$\surd$ (a)



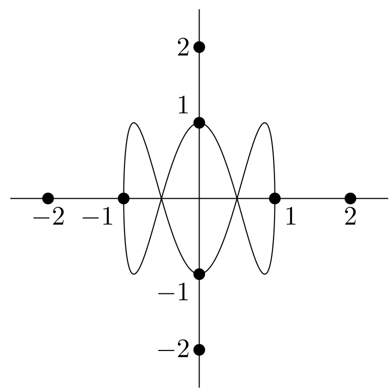
(b)



(c)



(d)



Der Punkt $(0, 1)$ liegt nicht im Bild der Kurve $t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t))$. Wenn $\sin(2t) = 1$ ist, muss nämlich $\cos(2t) = 0$ sein. Da $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ und $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, folgt also, dass $\cos^2(t) = \frac{1}{2}$ bzw. $\sin(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ist

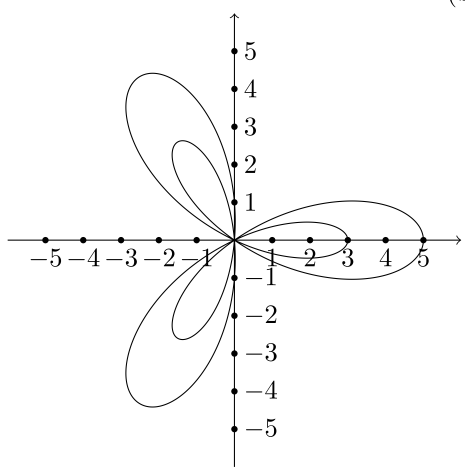
$$\cos(3t) = \underbrace{\cos(2t)}_{=0} \cos(t) - \underbrace{\sin(2t)}_{=1} \sin(t) = -\sin(t) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1.$$

20. Welche der folgenden Kurven ist in Polarkoordinaten durch

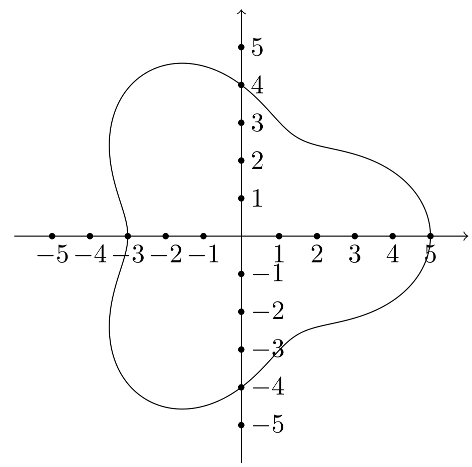
$$R(\varphi) = |4\cos(3\varphi) + 1|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

dargestellt?

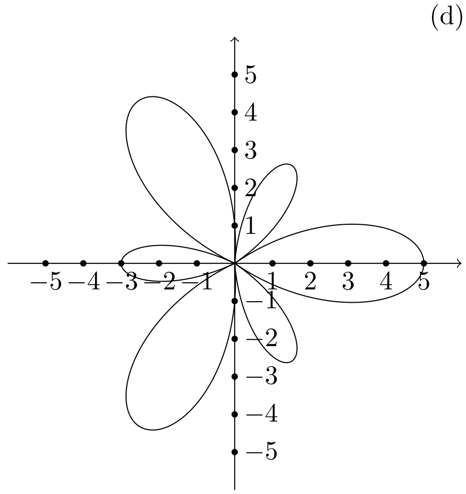
(a)



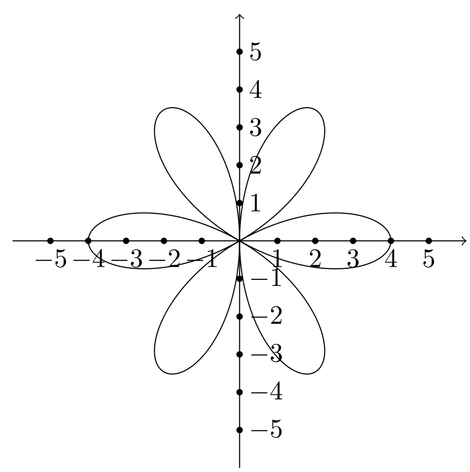
(b)



√ (c)



(d)



21. Welches der folgenden uneigentlichen Integrale existiert nicht?

(a) $\int_0^1 x \ln(x)\, dx$

(b) $\int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right) dx$

(c) $\int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx$

√ (d) $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\, dx$

Mit der Substitution $x = e^t$ ergibt sich

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{e^t \cdot t} \cdot e^t\, dt = \int_1^\infty \frac{1}{t}\, dt.$$

Dieses uneigentliche Integral existiert nicht, da $\ln(t)$ die Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ ist und $\ln(t)$ für $t \to \infty$ divergiert. Die restlichen Integrale konvergieren, weil

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right) dx &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\ln(1+x) - \ln(x)\right)\Big|_{x=1}^{x=N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2)\right) = -\ln(2),
\end{aligned}$$

weil wiederum mit $x = e^t$

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]^2 dx &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^2 e^{-t}\, dt \\
&= \underbrace{\lim_{N\to\infty} -t^2 e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=N}}_{=0} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N 2te^{-t}\, dt \\
&= \underbrace{\lim_{N\to\infty} -2te^{-t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{=0} + \lim_{N\to\infty} \int_0^N 2e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{N\to\infty} -2e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=N} = 2
\end{aligned}$$

und weil

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\ln(x)\, dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 x\ln(x)\, dx &= \lim_{a\to 0} \frac{x^2}{2} \ln(x)\Big|_{x=a}^{x=1} - \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{x}{2}\, dx \\
&= -\int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

22.

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx =$$

(a) 2

(b) 4

(c) π

√ (d) 0

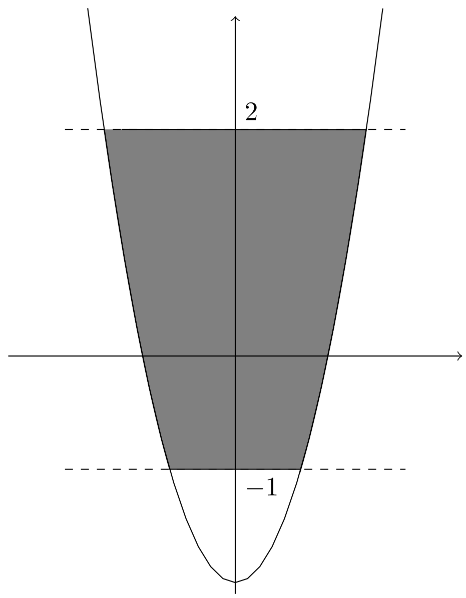
Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ gilt

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{t} \cdot 2t\, dt = 2 \int_0^{\pi} \cos(t)\, dt = 2\, \sin(t)\big|_{t=0}^{t=\pi} = 0.$$

23. Unten ist der Graph der Funktion

$$f(x) = 3x^2 - 2$$

abgebildet. Was ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs?



(a) $\frac{14}{5}\sqrt{3}$

✓ (b) $\frac{28}{9}\sqrt{3}$

(c) $3\sqrt{3}$

(d) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

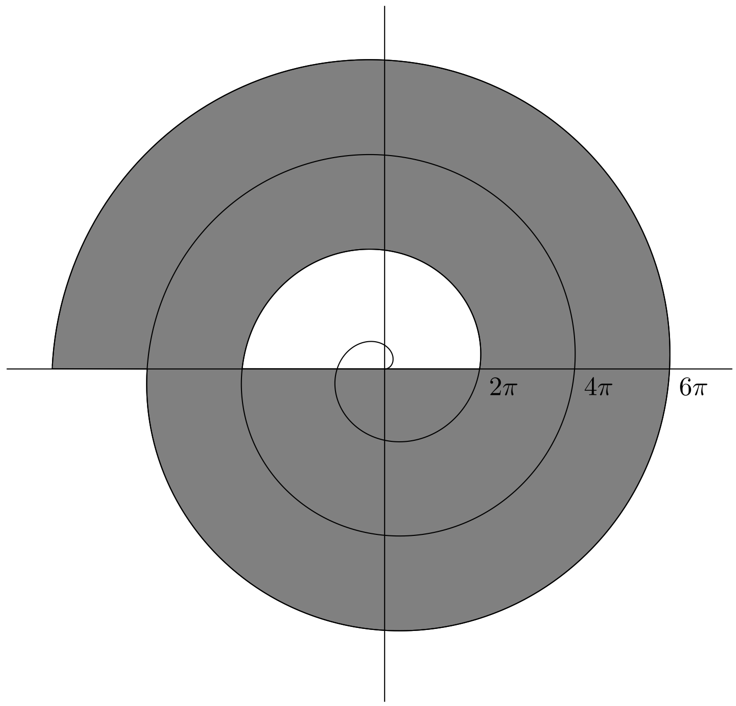
Spiegelt man an der Geraden $y = x$, so muss man den Flächeninhalt unter dem Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} von f zwischen -1 und 2 berechnen. Es ist $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y+2}{3}}$ und daher gilt für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F &= 2\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{y+2}{3}}\, dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(y+2)^{3/2}\Big|_{y=-1}^{2} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot 7 = \frac{28}{3\sqrt{3}} = \frac{28}{9}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

24. In Polarkoordinaten ist die *archimedische Spirale* gegeben durch

$$r(\varphi) = \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Was ist der Inhalt der im folgenden Bild grau gefärbten Fläche?



(a)

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi^2\, d\varphi$$

(b)

$$\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{7\pi} \varphi^2\, d\varphi$$

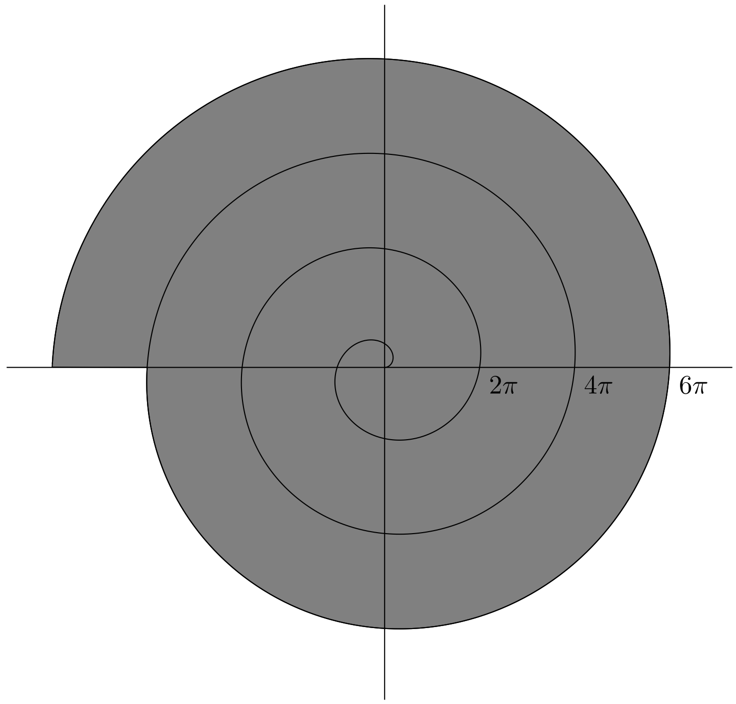
(c)

$$\frac{1}{2}\int_{\pi}^{7\pi} \varphi^2\, d\varphi$$

√ (d)

$$\frac{1}{2}\int_{5\pi}^{7\pi} \varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi} \varphi^2\, d\varphi$$

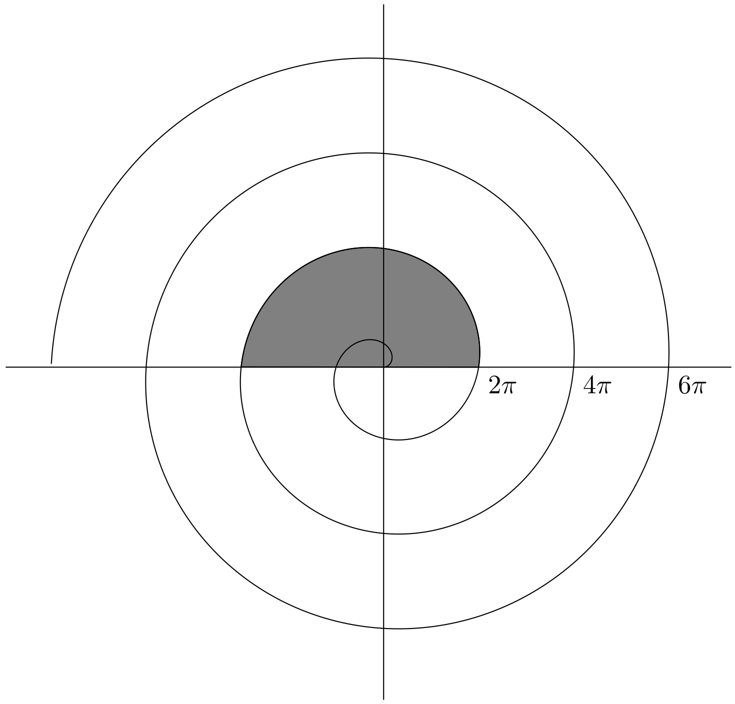
Die Fläche



kann als die von dem Abschnitt der archimedischen Spirale zwischen 5π und 7π erzeugte Sektorfläche angesehen werden. Ihr Flächeninhalt beträgt demnach

$$\frac{1}{2}\int_{5\pi}^{7\pi} \varphi^2 \, d\varphi.$$

Die gesuchte Fläche erhält man, indem man nun von dieser Fläche die Fläche



abzieht. Diese kann wiederum als die von dem Abschnitt der archimedischen Spirale zwischen 2π und 3π erzeugte Sektorfläche angesehen werden. Ihr Flächeninhalt ist damit

$$\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi} \varphi^2 \, d\varphi.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist schließlich

$$\frac{1}{2}\int_{5\pi}^{7\pi} \varphi^2 \, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{3\pi} \varphi^2 \, d\varphi.$$

25. Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch die Rotation des Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0,2]$$

um die x-Achse entsteht.

(a) $\frac{9}{2}\pi$

√ (b) $\frac{13}{3}\pi$

(c) $\frac{17}{4}\pi$

(d) 5π

Bekanntlich (siehe z.B. Zettel mit den Standardintegralen) gilt für die Mantelfläche M des Körpers, der durch die Rotation einer Kurve $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, mit $\cdot x(t) > 0$ um die x-Achse entsteht, die Beziehung

$$M = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.$$

Der Graph von $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,2]$ kann durch $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{t}$ für $t \in [0,2]$ parametrisiert werden. Dementsprechend ergibt sich für die Mantelfläche:

$$M = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27-1}{8} = \frac{13}{3}\pi.$$