ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Dr. Menashe-Hai Akka Ginosar 19. Februar 2019

# Analysis I D-BAUG
# Zwischenprüfung

Lösung

**Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.**
**Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen.**
**Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.**

- Die Prüfung besteht aus 25 Aufgaben und dauert 90 Minuten.

- Auf dem Tisch sind **Ihre Prüfung und Ihr entsprechender Antwortbogen**. Kontrollieren Sie, dass Ihr Name auf Prüfung und Antwortbogen aufgedruckt ist.

- Bei jeder Aufgabe ist nur **eine Antwort richtig**.

- Eine Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst und wird mit einem Punkt bewertet, wenn das richtige und nur das richtige Antwortkästchen **mit schwarz oder dunkelblau** auf dem separaten Antwortbogen ausgemalt ist; andernfalls wird sie mit Null bewertet.

- **Änderungen** auf dem Antwortbogen sollen mit TippEx ausgeführt werden. Wir empfehlen, die Aufgaben zuerst auf der Prüfung oder auf Schmierpapier zu bearbeiten und erst später die entsprechende Lösung auf den Antwortbogen zu übertragen. Aber beachten Sie dabei, dass nur die Lösungen auf dem Antwortbogen bewertet werden.

- Bei einigen Aufgaben kann die Antwort unmittelbar ersichtlich sein, andere brauchen Berechnungen. Lesen Sie die Aussagen aufmerksam durch, und achten Sie auf die Zeit.

- Zu dieser Zwischenprüfung sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Insbesondere sind Taschenrechner unzulässig.

**1.** Was ist die (maximale) Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und die entsprechende Bildmenge $B = \{f(x) \mid x \in D\}$ folgender Funktionsvorschrift?

$$f(x) = \frac{1}{\log(x)}$$

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

√ (b) $D = (0,1) \cup (1,\infty), \quad B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad B = (0,\infty)$

(d) $D = (0,\infty) \setminus \{1\}, \quad B = (0,\infty)$

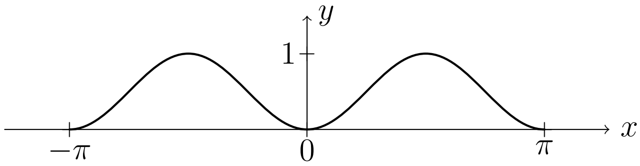
*Begründung.* Damit $\log(x)$ definiert ist, muss $x > 0$ sein. Damit der Bruch definiert ist, muss $\log(x) \neq 0$, also $x \neq 1$ gelten. Also ist

$$D = (0,1) \cup (1,\infty).$$

Für $x \in (0,1)$ ist $\log(x) < 0$, was Antwort (d) ausschliesst.

---

**2.** Welche Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ hat folgenden Graph?




(a) $f(x) = 1 - \cos(x)$

(b) $f(x) = \cos^2(x)$

√ (c) $f(x) = \sin^2(x)$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))^2$

*Begründung.* Es gilt $\cos(\pi) = -1$. Damit haben die drei anderen Funktionen keine Nullstelle bei $x = \pi$.

---

**3.** Für die komplexe Zahl $w = e^i \in \mathbb{C}$ gilt

√ (a) $\mathrm{Im}(w) > \mathrm{Re}(w) > 0$

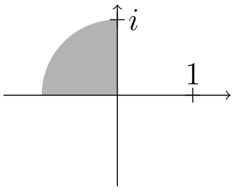
(b) $\mathrm{Im}(w) > 0 > \mathrm{Re}(w)$

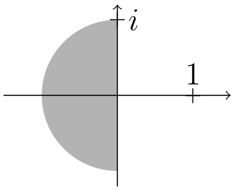
(c) $\mathrm{Re}(w) > \mathrm{Im}(w) > 0$

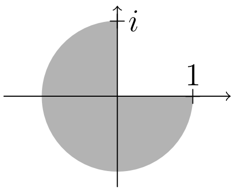
(d) $\mathrm{Re}(w) > 0 > \mathrm{Im}(w)$

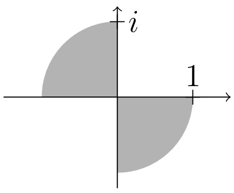
*Begründung.* $e^i = e^{1i} = \cos(1) + i\sin(1)$. Wegen $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ gilt $\sin(1) > \cos(1) > 0$.

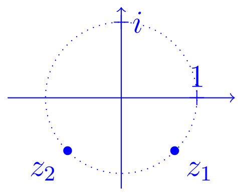
**4.** Wie sieht die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 0,\ |z| \leq 1\}$ der komplexen Ebene aus?

(a) 


(b) 


(c) 


√ (d) 


*Begründung.* Die Zahl $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ erfüllt $\operatorname{Im}(z_1^2) = \operatorname{Im}(e^{-i\frac{\pi}{2}}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \leq 0$ und liegt damit in der Menge. Das schliesst Antwort (a) und (b) aus. Für $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ gilt $\operatorname{Im}(z_2^2) = \operatorname{Im}(e^{i\frac{5\pi}{2}}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) = 1 > 0$, also ist $z_2$ nicht Element der Menge. Das schliesst Antwort (b) und (c) aus.

---

**5.** Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ und $p(z) = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1$, sodass

$$p(i-1) = 0 = p(i+1).$$

Wie viele *reelle* Nullstellen kann $p$ höchstens haben?

(a) 0

√ (b) 1

(c) 2

(d) 3

*Begründung.* Da alle Koeffizienten von $p$ reell sind, gilt: Mit $z_1 = i - 1$ muss auch $\overline{z_1} = -i - 1$ eine Nullstelle sein. Mit $z_2 = i + 1$ muss auch $\overline{z_2} = -i + 1$ eine Nullstelle sein. Als Polynom 5. Grades kann $p$ nur eine weitere Nullstelle haben. So ein Polynom existiert tatsächlich, zum Beispiel $p(z) = \big((z+1)^2 + 1\big)\big((z-1)^2 + 1\big)(z + \frac{1}{4})$.

**6.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = a_n b_n$ ist in jedem Fall konvergent.

√ (b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = b_n c_n$ ist in jedem Fall beschränkt.

(c) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = c_n d_n$ ist in jedem Fall divergent.

(d) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = d_n a_n$ ist in jedem Fall monoton.

Konvergente Folgen sind beschränkt. Produkte beschränkter Folgen sind beschränkt.

---

**7.** Was ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = \sqrt{1-n^{-2}} - \sqrt{1+n^{-2}}$ für $n \to \infty$?

(a) $-1$

(b) $-\frac{1}{2}$

√ (c) $0$

(d) $\frac{1}{2}$

*Begründung.* Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-n^{-2}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+n^{-2}}.$$

---

**8.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 3 - 3x + 3x^2 - x^3$. Dann ist der Wert der Ableitung der Umkehrfunktion $y \mapsto f^{-1}(y)$ an der Stelle $y = 10$

√ (a) $-\frac{1}{12}$

(b) $6$

(c) $\frac{1}{18}$

(d) nicht definiert

*Begründung.* Es gilt $10 = f(-1)$, also $f^{-1}(10) = -1$. Mit $f'(x) = -3 + 6x - 3x^2$ folgt $f'(-1) = -12$. Also gilt

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))} = \frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{12}.$$

---

**9.** Die Krümmung der Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = \big((\cos t)^2, (\sin t)^2\big)$ ist

(a) $-\frac{1}{2}$

√ (b) $0$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $1$

*Begründung.* Alle Punkte $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ auf der Kurve erfüllen die Gleichung $x(t) + y(t) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ und liegen damit auf einer Geraden. Die Krümmung einer Geraden verschwindet, also ist die Krümmung von $\gamma$ überall wo sie definiert ist gleich 0.

**10.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - x$. Welche der folgenden Gleichungen beschreibt *keine* Tangente an den Graphen von $f$?

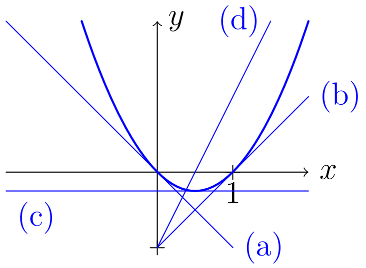
(a) $y = -x$

(b) $y = x - 1$

(c) $y = -\frac{1}{4}$

$\surd$ (d) $y = 2x - 1$

*Begründung:*




---

**11.** Für welche Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & \text{für } x < \xi, \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq \xi \end{cases}$$

eine unstetige Funktion?

$\surd$ (a) $\xi = -2$

(b) $\xi = -1$

(c) $\xi = 0$

(d) $\xi = 1$

*Begründung.* Es gilt

$$\lim_{x \nearrow -2} (x^3 - x^2 + x) = -14 \neq -8 = \lim_{x \searrow -2} (-x^2 + 2x).$$

---

**12.** Für welche Zahl $y \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(2x) & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion?

(a) $y = -1$

(b) $y = 0$

(c) $y = 1$

$\surd$ (d) $y = 2$

*Begründung.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 2.$$

**13.** Die erste Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln|x|$ ist

√ (a) $\frac{1}{x}$

(b) $\frac{1}{|x|}$

(c) $x\ln|x| - x$

(d) $x - x\ln|x|$

*Begründung.* Für $x > 0$ ist $f(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Für $x < 0$ ist $f(x) = \ln(-x)$ und $f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

---

**14.** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dann ist (Diese Aufgabe wird *nicht* bewertet.)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}$ konvergent

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ konvergent

(a) Gegenbeispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(b) Gegenbeispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n^2}$

(d) Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n}\cos(\frac{\pi}{2}n)$

---

**15.** Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3x)^k}{k+2}$ ist

(a) $-\frac{1}{3}$

(b) $0$

√ (c) $\frac{1}{3}$

(d) $\infty$

*Begründung.*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-3)^k}{k+2}}{\frac{(-3)^{k+1}}{k+1+2}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+3}{(-3)(k+2)}\right| = \frac{1}{3}.$$

---

**16.** Was ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^k}$ konvergiert?

√ (a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(b) $\mathbb{R}$

(c) $(-1, 1)$

(d) $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 0)$

*Begründung.* Es handelt sich um die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $q = \frac{1}{x^2+1}$. Die Bedingung $|q| < 1$ für Konvergenz ist für jedes $x \neq 0$ erfüllt.

**17.** In der Taylorreihe der Funktion $f(x) = e^{\sinh(x)}$ um 0 hat $x^2$ den Koeffizienten

√ (a) $\frac{1}{2}$

(b) $1$

(c) $\frac{e}{2}$

(d) $e$

*Begründung.*

$$f'(x) = e^{\sinh x} \cosh x,$$
$$f''(x) = e^{\sinh x}(\cosh^2 x + \sinh x),$$
$$\tfrac{1}{2} f''(0) = \tfrac{1}{2}(\cosh 1)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

---

**18.** Was ist die Taylorreihe von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \cosh(2x)$?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{(2k)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\, x^{2k}}{(2k)!}$

√ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x^2)^k}{(2k)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

*Begründung.* Es gilt

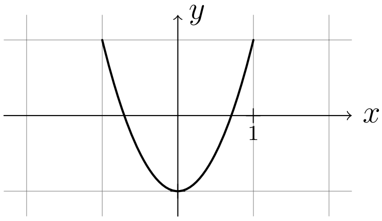
$$\cosh(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cosh(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x^2)^k}{(2k)!}$$

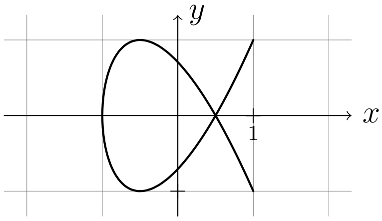
---

**19.** Welches Bild hat $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos(t), \cos(2t))$?

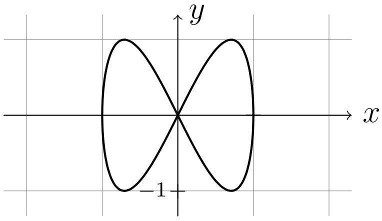
√ (a)



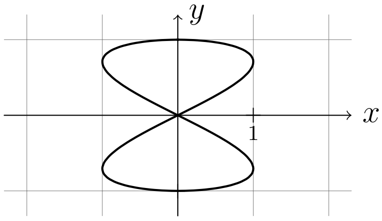

(c)




(b)

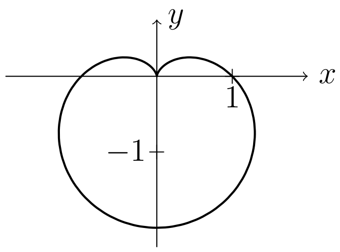



(d)




*Begründung.* Nur Kurve (a) geht durch den Punkt $\gamma(\pi) = (\cos(\pi), \cos(2\pi)) = (-1, 1)$.

**20.** Welche der gegebenen Parametrisierungen in Polarkoordinaten hat folgendes Bild?




√ (a) $R(\varphi) = 1 - \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

(b) $R(\varphi) = \frac{2}{\pi}|\varphi|, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$

(c) $R(\varphi) = 1 - \cos\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

(d) $R(\varphi) = \frac{2}{\pi}|\varphi - \frac{\pi}{2}|, \quad \varphi \in [0, \pi]$

*Begründung.* Offenbar gilt $R(0) = 1$, was Antwort (b) und (c) ausschliesst. Ferner stimmt bei Antwort (d) der Definitionsbereich nicht. Es verbleibt (a).

---

**21.** Das uneigentliche Integral $\int_{-e}^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ist

(a) 0

(b) 1

(c) 2

√ (d) nicht existent

*Begründung.* Es handelt sich per Definition um die Summe der beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-e}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

welche beide nicht existieren.

---

**22.** Seien $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurven gegeben durch

$$\gamma_1(t) = \big(x(t), y(t)\big), \qquad \gamma_2(t) = \big(2x(t), 2y(t)\big).$$

Sei $\kappa_1(t)$ die Krümmung von $\gamma_1$ und sei $\kappa_2(t)$ die Krümmung von $\gamma_2$. Dann ist

√ (a) $\kappa_1(t) = 2\kappa_2(t)$

(b) $2\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$

(c) $\kappa_1(t) = 4\kappa_2(t)$

(d) $4\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$

*Begründung.* Ein Kreis mit doppeltem Radius hat halbe Krümmung. Dieses Beispiel verträgt sich nur mit (a).

**23.** Das Integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ beträgt

(a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

√ (b) $\dfrac{\pi}{2}$

(c) $\dfrac{\operatorname{arsinh}(1)}{2}$

(d) $\dfrac{e}{2}$

*Begründung.* Es handelt sich um den Flächeninhalt eines Halbkreises.

---

**24.** Das Symbol „$\ast$" ist in Polarkoordinaten gegeben durch $R(\varphi) = \frac{1}{9}|\sin(3\varphi)|$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$. Welchen Flächeninhalt hat es?

√ (a) $\dfrac{\pi}{162}$

(b) $\dfrac{\pi}{243}$

(c) $\dfrac{\pi}{324}$

(d) $\dfrac{\pi}{405}$

*Begründung.* Der Flächeninhalt ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{81}\sin^2(3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{4\cdot 81}\int_0^{2\pi}(1-\cos(6\varphi))\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{4\cdot 81} \\ &= \frac{\pi}{162}.\end{aligned}$$

---

**25.** Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

wird um die $x$-Achse rotiert. Welcher Term beschreibt das eingeschlossene Volumen?

(a) $\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\,\mathrm{d}t$

(b) $\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$

√ (c) $\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t$

(d) $\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^4\,\mathrm{d}t$

*Begründung.* Mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ gilt

$$\pi \int_0^{2\pi} \big(y(t)\big)^2 x'(t)\,\mathrm{d}t = \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t.$$