Zwischenprüfung
Analysis I D-BAUG
Winter 2017

Dr. Menashe-hai Akka Ginosar

Version A

Wichtige Hinweise:

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine, ausser das verteilte Blatt mit Standardintegralen.
- Schreiben Sie Ihren Namen, Vornamen und Legi-Nummer in GROSSBUCHSTABEN auf Ihr Antwortblatt und kreuzen Sie Ihre Version der Prüfung an.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch, sodass wir sie kontrollieren können.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es in Ihrer Tasche.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 1 Punkt. Für eine falsche Antwort erhalten Sie einen Abzug von $\frac{1}{3}$ Punkten. Wird eine Frage nicht beantwortet, erhalten Sie dafür 0 Punkte; also weder Plus- noch Minuspunkte.
- Achten Sie darauf, dass Sie das Antwortblatt sauber ausfüllen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch.
- Zur Korrektur eines gesetzten Kreuzchens verwenden Sie bitte Tipp-Ex. Sollten Sie selbst kein Tipp-Ex dabei haben melden Sie sich bitte; die Aufsicht in Ihrem Raum hat ein paar dabei.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen gemachten Kreuzchen als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. Was ist die (maximale) Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Bildmenge $B_f = \{f(x) \,|\, x \in D_f\}$ der Funktion

$$f(x) = \frac{x-4}{2x+1}?$$

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

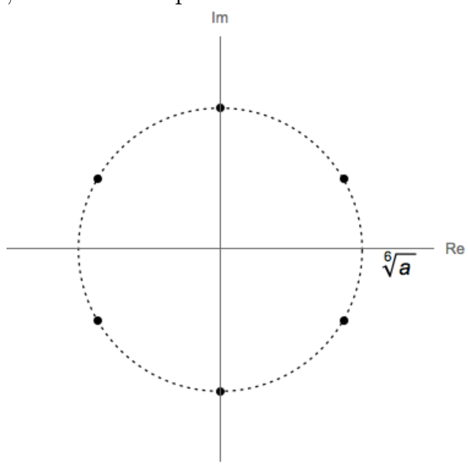
(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

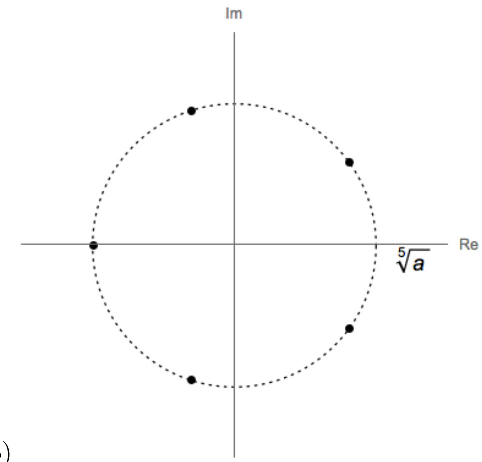
2. Welches der folgenden Bilder stellt die Lösungsmenge der Gleichung

$$z^6 - a = 0$$

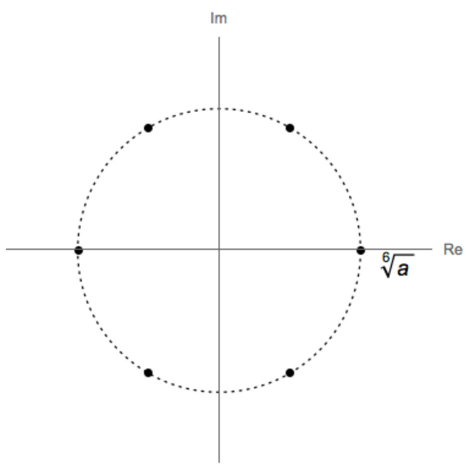
in $\mathbb{C}$ dar, wobei a eine positive reelle Zahl ist?



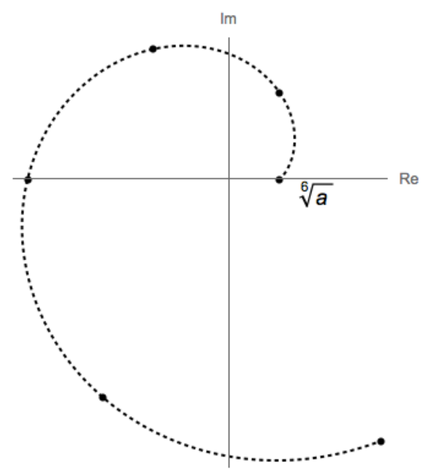
(a)



(b)

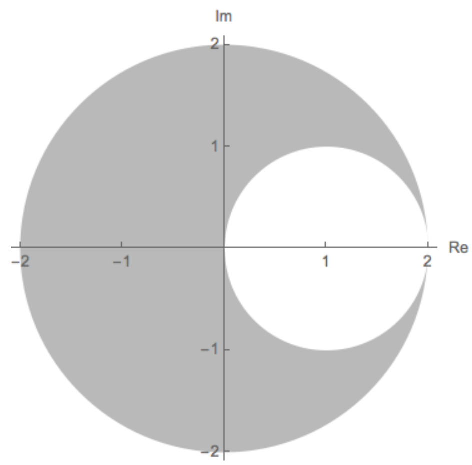


(c)



(d)

3. Welche der folgenden Mengen ist in diesem Bild der komplexen Ebene grau gefärbt?



(a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| > 1 \text{ und } 2|z| < 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 1\}$

4. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi i\right) \cdot \left(\sqrt{2} + ib\right)$$

reell?

(a) 0

(b) 1

(c) $\sqrt{2}$

(d) 2

5. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Erinnerung: Es gibt nur eine richtige Antwort.

(a) Eine divergente Folge ist unbeschränkt.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch

$$b_n = (-1)^n \sin(a_n)$$

eine Nullfolge.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch

$$b_n = a_n + \frac{n}{n+1}$$

eine Nullfolge.

(d) Eine Folge, welche positiv und beschränkt ist, ist auch konvergent.

6. Was ist der Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{3n^5 - \frac{1}{n}}{2n + 4\sqrt{n^{10}+3} + \sqrt{n}}$$

für n gegen unendlich?

(a) ∞

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{3}{2}$

(d) 0

7. Was ist der Grenzwert der Folge

$$a_n = n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+\pi}\right)$$

für n gegen unendlich?

Hinweis: Approximieren Sie den Sinus durch ein Polynom.

(a) ∞

(b) 0

(c) 1

(d) π

8. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ konvergiert.

(c) Keine der anderen Aussagen ist richtig.

(d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert.

9. Was ist der Grenzwert der folgenden Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{18^n}}{6^n}$$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

(b) $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

(d) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

10. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **NICHT** stetig?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < -2, \\ x^2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < 1, \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < -1, \\ x^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

11. Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ c & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

(a) $c = 2$

(b) $c = -\frac{1}{2}$

(c) $c = \frac{1}{2}$

(d) $c = 0$

12. Was ist die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \ln(\sin x) - x\cos x?$$

(a)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x$$

(b)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + x\sin x$$

(c)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} - \cos x + x\sin x$$

(d)

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x - \sin x$$

13. Wo liegt das Maximum und wo liegt das Minimum der Funktion

$$f(x) = (\cos(x) - 1)^2 + (\sin(x) - 1)^2$$

auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

(a) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{2}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{4}$.

(b) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{2}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{2}$.

(c) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{4}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{2}$.

(d) Das Minimum liegt bei $x = \frac{\pi}{4}$ und das Maximum liegt bei $x = -\frac{3}{4}\pi$.

14. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^{n-2}}$$

(a) 1

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{1}{2}$

15. Was ist der Konvergenzbereich K der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}?$$

(a) $K = (\infty, 1]$

(b) $K = (-1, 1)$

(c) $K = [-1, 0)$

(d) $K = (-\infty, 0)$

16. Was ist der Konvergenzbereich K der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (10x - 9)^n?$$

(a) $K = (0, 1)$

(b) $K = \left(-1, -\frac{4}{5}\right)$

(c) $K = \left(\frac{4}{5}, 1\right)$

(d) $K = \left(\frac{9}{10}, 1\right)$

17. Was ist die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x) + \cos(x))$$

an der Entwicklungsstelle 0?

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$$

18. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos(x^3)$. Was ist der Koeffizient vor x^7 in der Taylorentwicklung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

von F um 0?

(a) 1

(b) $\frac{1}{7}$

(c) $-\frac{1}{14}$

(d) $-\frac{1}{2}$

19. In Polarkoordinaten ist die *logarithmische Spirale* gegeben durch

$$r(\varphi) = e^{\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Was ist dann der Grenzwert der Krümmung $\kappa(\varphi)$ dieser Spirale für φ gegen unendlich?

$$\lim_{\varphi \to \infty} \kappa(\varphi) = \ldots$$

(a) 0

(b) ∞

(c) -1

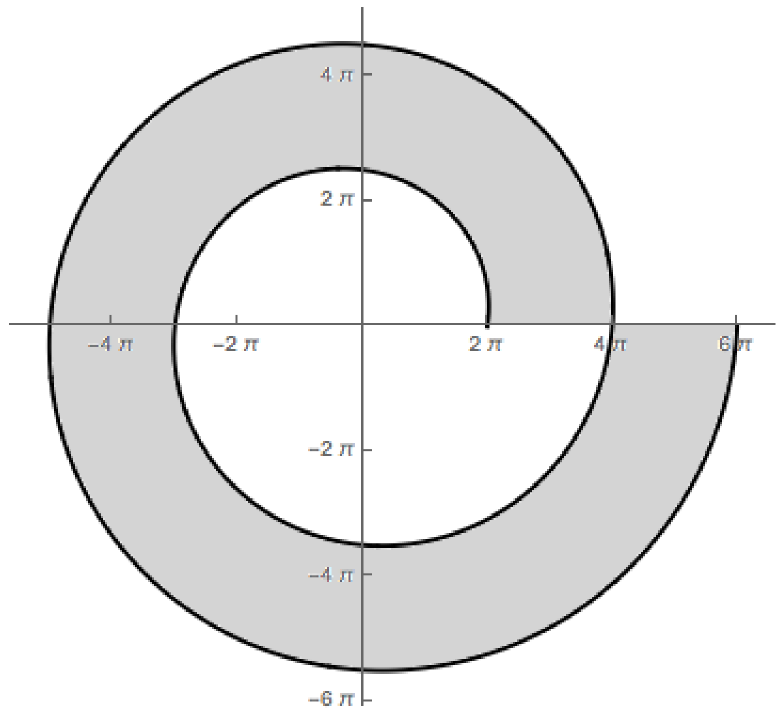
(d) 1

20. **Diese Aufgabe wurde leider falsch gestellt und deshalb aus der Bewertung herausgenommen. Die korrigierte Aufgabenstellung lautet wie folgt (Korrektur in rot):**

In Polarkoordinaten ist die *archimedische Spirale* gegeben durch

$$r(\varphi) = \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Was ist der Inhalt der im folgenden Bild grau gefärbten Fläche zwischen zwei Zyklen der archimedischen Spirale?



(a)

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,\mathrm{d}\varphi - \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,\mathrm{d}\varphi$$

(b)

$$\cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} \varphi^2\,\mathrm{d}\varphi - \cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \varphi^2\,\mathrm{d}\varphi$$

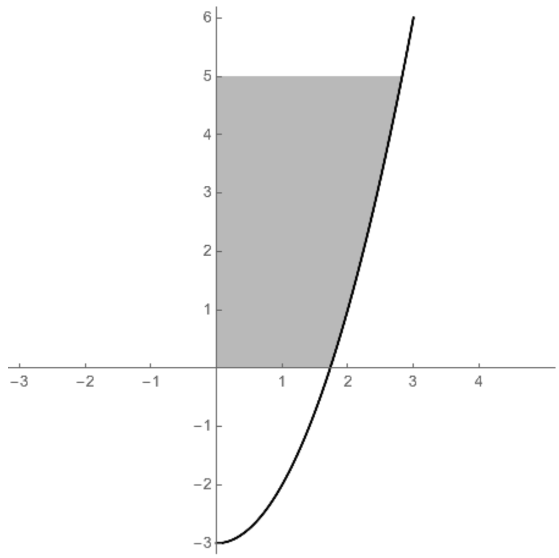
(c)

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\,\mathrm{d}\varphi$$

(d)

$$\cancel{\pi}\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{6\pi} \varphi^2\,\mathrm{d}\varphi$$

21. Was ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs?



Die schwarze Kurve ist hier der Graph der Funktion

$$f(x) = x^2 - 3$$

(a) $10\sqrt{2}$

(b) $\frac{32\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3}$

(c) $2\sqrt{2}\left(11 - \frac{8}{3}\right)$

(d) $\frac{32}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{3}$

22. Was ist der Flächeninhalt zwischen dem Kurvenstück

$$(t^2, t^6 - t^4 + 2), \quad t \in [1, 2]$$

und der x-Achse?

(a)
$$\int_1^2 (t^6 - t^3 + 2)t \,\mathrm{d}t$$

(b)
$$\int_1^2 (t^6 - t^3 + 2)^2 t \,\mathrm{d}t$$

(c)
$$\int_1^{\sqrt{2}} t^3 - t^2 + 2 \,\mathrm{d}t$$

(d)
$$\int_1^4 t^3 - t^2 + 2 \,\mathrm{d}t$$

23. Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t = \dots$$

(a) $-\infty$

(b) ∞

(c) π

(d) -2π

24. Seien $a < b$ reelle Zahlen und $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ ein Kurvenstück, so dass $y(t) > 0$ und $\dot{x}(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt. Wir bezeichnen mit V_1 das Volumen des Rotationskörpers, welcher dadurch entsteht, dass man die Kurve $\vec{r}(t)$ um die x-Achse rotiert.

Nun definieren wir das neue Kurvenstück

$$\vec{s}(t) := (3x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Wieder bezeichne V_2 das Volumen des Rotationskörpers, welcher dadurch entsteht, dass man $\vec{s}$ um die x-Achse rotiert.

In welcher Beziehung stehen V_1 und V_2?

(a) $V_2 = 9V_1$

(b) Man hat nicht genügend Informationen um zu entscheiden, ob eine der anderen Aussagen korrekt ist.

(c) $V_2 = V_1$

(d) $V_2 = 3V_1$

25. Welche der folgenden Zahlen unterscheidet sich von den anderen?

(a)

$$8 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, \mathrm{d}t,$$

wobei $(x(t), y(t)) = (\cos\left(t^2\right), \sin\left(t^2\right))$.

(c)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, \mathrm{d}t,$$

wobei $(x(t), y(t)) = (\cos(-2t), \sin(-2t))$.

(d) Der Umfang des Einheitskreises.