# Zwischenprüfung
# Analysis I D-BAUG
### 18. Februar 2020

Dr. Meike Akveld

## Version A

Viel Erfolg!

**1.** Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \frac{4-2i}{1+i}$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) $\operatorname{Re} z = 1$

(b) $\operatorname{Im} z = -3$

$\checkmark$ (c) $|z| = 10$

(d) $z$ liegt im vierten Quadranten.

Da $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ gilt, ist schon mal klar, dass eine der ersten drei Aussagen (zu $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ und $|z|$) falsch sein muss. Man berechnet

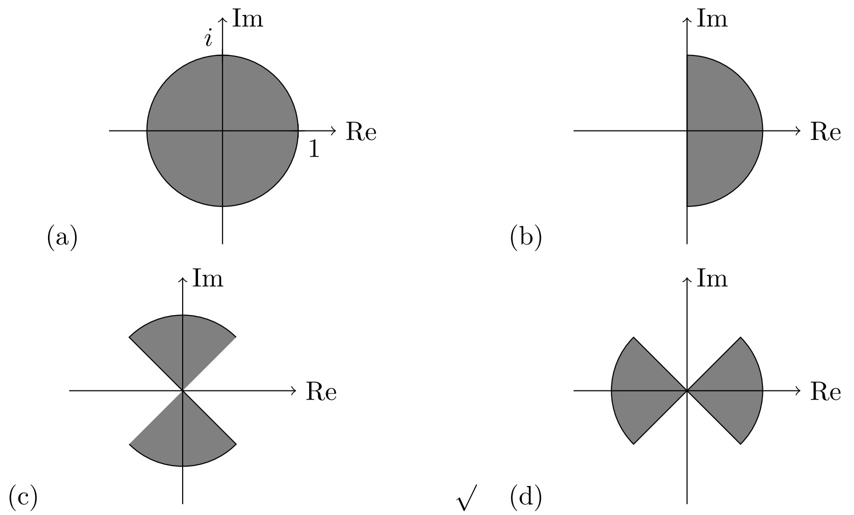
$$\frac{4-2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i-2i-2}{1+1} = \frac{2-6i}{2} = 1-3i.$$

Somit ist $\operatorname{Re} z = 1$ und $\operatorname{Im} z = -3$. Der Betrag von $z$ ist aber

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \neq 10.$$

Man kann sich leicht überlegen, dass die Zahl $z = 1-3i$ tatsächlich im vierten Quadranten liegt.

**2.** Wie sieht die Teilmenge $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) \geq 0, |z| \leq 1\}$ der komplexen Ebene aus?




Variante 1: Die Bedingung $|z| \leq 1$ sagt, dass $B$ eine Teilmenge des Einheitskreises ist. Die Bedingung $\mathrm{Re}(z^2) \geq 0$ berechnet sich zu

$$0 \leq \mathrm{Re}((x+iy)^2) = \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy) = x^2 - y^2,$$

also $y^2 \leq x^2$, d.h. $\mathrm{Im}(z)^2 \leq \mathrm{Re}(z)^2$. Der Rand von $B$ ist also gegeben durch die Teile der Geraden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ und $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$, welche im Einheitskreis geben. Jetzt muss man nur noch überlegen, welche der vier Stücke des Einheitskreises (geviertelt durch die oben genannten Geraden) die geforderte Bedingung erfüllen.

Variante 2: Gegeben, dass genau eines der vier Bilder korrekt sein muss, kann man auch einfach Punkte einsetzen: Für $z = -1$ gilt $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(1) = 1 \geq 0$, d.h. $z = -1$ liegt in $B$. Somit können die Bilder (b) und (c) nicht korrekt sein. Für $z = i$ gilt $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(-1) = -1 < 0$, d.h. $z = i$ liegt nicht in $B$. Somit kann Bild (a) nicht korrekt sein. Übrig bleibt Bild (d) und muss somit korrekt sein.

**3.** Der Imaginärteil der komplexen Zahl $e^{-7i}$ beträgt

(a) $\sin(7)$

√ (b) $-\sin(7)$

(c) $\cos(7)$

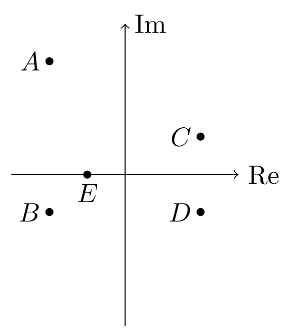
(d) $\cos(-7)$

Es gilt

$$e^{-7i} = \cos(-7) + i\sin(-7).$$

Also ist der Imaginärteil von $e^{-7i}$ gleich $\sin(-7) = -\sin(7)$.

**4.** Es gibt ein komplexes Polynom $p(z)$ vom Grad 5, welches die Punkte $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$ wie im Bild als Nullstellen hat.




√ (a) Wahr

(b) Falsch

Das Polynom $p(z) = (z-A)(z-B)(z-C)(z-D)(z-E)$ ist ein komplexes Polynom vom Grad 5 und hat die geforderten Nullstellen.

**5.** Was ist der Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = 5n - \sqrt{25n^2 + 2n}$$

für $n$ gegen unendlich?

(a) $-\infty$

√ (b) $-\frac{1}{5}$

(c) $-\frac{2}{15}$

(d) $0$

Mit der dritten Binomischen Formel rechnet man

$$\lim_{n\to\infty} 5n - \sqrt{25n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n - \sqrt{25n^2+2n})(5n + \sqrt{25n^2+2n})}{5n + \sqrt{25n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{25n^2 - (25n^2+2n)}{5n + \sqrt{25n^2+2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{5n + \sqrt{25n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{5 + \sqrt{25 + \frac{2}{n}}} = \frac{-2}{5+\sqrt{25}} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}.$$

**6.** Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-9}{n}\right)^{-\frac{2n}{3}}.$$

(a) $0$

(b) $e^{-6}$

(c) $1$

√ (d) $e^6$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ist. Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-9}{n}\right)^{-\frac{2n}{3}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-9}{n}\right)^n\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(e^{-9}\right)^{-\frac{2}{3}} = e^6.$$

**7.** Die Aussage „Sei $(a_n)$ eine Nullfolge. Dann konvergiert die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$." ist

(a) Wahr

$\surd$ (b) Falsch

Gegenbeispiel: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, da $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

**8.** Für welchen Parameter $a$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3} = \frac{1}{5}$?

(a) $a = \frac{1}{5}$

(b) $a = \frac{1}{3}$

$\surd$ (c) $a = \frac{3}{8}$

(d) $a = \frac{3}{5}$

Die linke Seite ist eine geometrische Reihe. Falls $|a| < 1$ ist, wissen wir, wie man diese berechnet. Man nimmt an, dies sei der Fall und sieht dann am Schluss, ob $|a| < 1$ wirklich erfüllt ist. Wir haben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-a} - \frac{1}{3}.$$

Wir lösen die Gleichung $\frac{1}{3}\frac{1}{1-a} - \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ nach $a$ auf und erhalten $a = \frac{3}{8}$. Insbesondere ist $|a| = \frac{3}{8} < 1$, weshalb die verwendete Formel für die geometrische Reihe korrekt war.

**9.** Die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

$\surd$ (a) Wahr

(b) Falsch

Da

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n(n+2)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0 < 1$$

ist, konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

**10.** Bestimmen Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = 3x - \sqrt{4 - x^2} + \ln(-x^2 + 7x + 8)$$

wohldefiniert ist.

(a) $D = [-2, -1]$

(b) $D = [-2, -1)$

(c) $D = [-1, 2]$

$\checkmark$ (d) $D = (-1, 2]$

Da $f$ reelle Werte annehmen soll, darf der Term unter der Wurzel nicht negativ sein, d.h. wir haben die Bedingung $x^2 \leq 4$, also

$$x \in [-2, 2].$$

Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert hat, habe wir ausserdem die Bedingung $-x^2+7x+8 > 0$. Faktorisieren gibt $-(x^2-7x-8) = -(x-8)(x+1) > 0$. Dies gilt genau dann, wenn

$$x \in (-1, 8).$$

Somit ist der Definitionsbereicht von $f$ gleich

$$D = (-1, 2].$$

**11.** Sei $h(x) = x(f(x) - g(x))$, wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f'(x) = g(x)$ und $g'(x) = f(x)$ sind. Dann ist die Ableitung $h'(x) =$

(a) $g(x) - f(x)$

(b) $x\,(g(x) - f(x))$

$\checkmark$ (c) $(1 - x)(f(x) - g(x))$

(d) $(1 + x)(f(x) - g(x))$

Mit der Produktregel erhalten wir

$h'(x) = f(x) - g(x) + x(f'(x) - g'(x)) = f(x) - g(x) + x(g(x) - f(x)) = (1 - x)(f(x) - g(x)).$

**12.** Sei $f^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = 9 - \ln(1 - \frac{x}{5})$ für $x \in \mathbb{R}_{<5}$. Die Ableitung von $f^{-1}$ an der Stelle $f(0) = 9$ ist

(a) $\frac{1}{9}$

(b) $\frac{1}{5}$

√ (c) 5

(d) 9

Für die Umkehrfunktion gilt die Formel

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Also haben wir

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(f^{-1}(9))} = \frac{1}{f'(0)}.$$

Die Ableitung von $f$ ist

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - \frac{x}{5}} \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5 - x}.$$

Also ist $f'(0) = \frac{1}{5}$ und

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(0)} = 5.$$

Alternativ (wenn man die Formel für die Umkehrfunktion nicht kennt) kann man die Umkehrfunktion explizit berechnen und ableiten: Aus $y = 9 - \ln(1 - \frac{x}{5})$ folgt $\ln(1 - \frac{x}{5}) = 9 - y$, also $1 - \frac{x}{5} = e^{9-y}$ und somit $f^{-1}(y) = x = 5(1 - e^{9-y})$. Die Ableitung ist nun

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{d}{dy}\left(5 - 5e^{9-y}\right) = 5e^{9-y}.$$

Somit ist $\left(f^{-1}\right)'(9) = 5$.

**13.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{2x} \text{ für } x \leq 0 \\ 3x^2 + \sqrt{1-x^2} \text{ für } 0 < x \leq 1 \\ 3x^3 + x^2 - x \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $f$ ist nicht wohl-definiert auf ganz $\mathbb{R}$ (d.h. $f$ ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert).

(b) $f$ ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.

(c) $f$ ist nicht stetig an der Stelle $x = 1$.

$\surd$ (d) $f$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Aussage "$f$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$" ist wahr.

- $f$ ist wohl-definiert: Der einzige Ort, wo ein Problem auftreten könnte, ist bei der Wurzel. Für $x \in (0, 1]$ ist aber $1 - x^2 \geq 0$, weshalb die Wurzel wohldefiniert ist.
- Wir haben $\lim_{x\to 0} \cos(x)e^{2x} = \cos(0)e^0 = 1$ und $\lim_{x\to 0} 3x^2 + \sqrt{1-x^2} = 0 + \sqrt{1} = 1$. Somit ist $f$ stetig an der Stelle $x = 0$.
- Wir haben $\lim_{x\to 1} 3x^2 + \sqrt{1-x^2} = 3 + \sqrt{0} = 3$ und $\lim_{x\to 1} 3x^3 + x^2 - x = 3$. Somit ist $f$ stetig an der Stelle $x = 1$.
- $f$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$: Da $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ wohl-definiert, stückweise stetig und stetig bei $x = 0$ und $x = 1$ ist, ist $f$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

**14.** Sei

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{4x - 1}.$$

Was lässt sich mit dem Zwischenwertsatz folgern?

√ (a) $\exists x_0 \in [-1, 0]$ mit $f(x_0) = 0$.

(b) $\exists x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = 0$.

(c) $\exists x_1 \neq x_2 \in [-1, 1]$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0$

(d) Der Zwischenwertsatz gibt keine Information über die Nullstellen von $f$.

Die Funktion $f$ ist auf dem Intervall $[-1, 0]$ stetig und es gilt $f(-1) = \frac{-1-3-2+1}{-4-1} = 1 > 0$ und $f(0) = -1 < 0$. Somit folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in [-1, 0]$ geben muss mit $f(x_0) = 0$. Somit ist die erste Antwort korrekt.
Es ist zu beachten, dass obwohl $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$ gilt, der Zwischenwertsatz auf das Intervall $[0, 1]$ nicht anwendbar ist. Da $f$ bei $x = \frac{1}{4} \in [0, 1]$ nicht definiert ist, ist diese Funktion auch nicht stetig auf diesem Intervall, was aber eine Voraussetzung des Zwischenwertsatzes ist.

**15.** Gesucht ist eine Approximation der Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + 2x + 2$. Verwenden Sie das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 = 0$. Dann ist $x_2 = ...$

(a) $-\frac{5}{6}$

$\surd$ (b) $-\frac{4}{5}$

(c) $-\frac{3}{4}$

(d) $-\frac{3}{5}$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n + 2}{3x_n^2 + 2}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0 + 2}{3x_0^2 + 2} = -1 \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1 + 2}{3x_1^2 + 2} = -1 - \frac{-1}{5} = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

**16.** Sei $m \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Betrachten Sie die Fläche in der Ebene begrenzt durch den Graph von $y = \frac{2}{x}$, die $x$-Achse und die Geraden $x = m$ und $x = 2m$. Der Flächeninhalt dieser Fläche ist unabhängig von $m$.

$\surd$ (a) Wahr

(b) Falsch

Der Flächeninhalt dieser Fläche ist gleich

$$\int_m^{2m} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\left[\ln(x)\right]_m^{2m} = 2(\ln(2m) - \ln(m)) = 2\left(\ln(2) + \ln(m) - \ln(m)\right) = 2\ln(2)$$

und somit unabhängig von $m$.

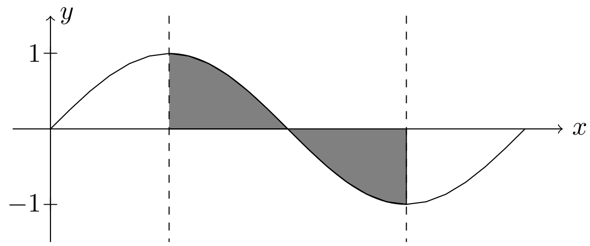
**17.** Das folgende Integral ist positiv:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) \cdot e^x \, \mathrm{d}x.$$

(a) Wahr

$\surd$ (b) Falsch

Variante 1 (überlegen): Man kann sich überlegen, wie $\sin(x)$ auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ aussieht:




Da $e^x$ grösser ist je grösser $x$ ist, überwiegt die Fläche unter der $x$-Achse. D.h. das Integral ist negativ.
Variante 2 (rechnen): Man kann das Integral mit zweimaliger partieller Integration ausrechnen:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^x}_{\uparrow} \, \mathrm{d}x &= [\sin(x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{\cos(x)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{e^x}_{\uparrow} \, \mathrm{d}x \\ &= [\sin(x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - [\cos(x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin(x))e^x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) \cdot e^x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left([\sin(x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - [\cos(x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 0\right) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)}_{>0} < 0.\end{aligned}$$

**18.** Sei $\int_0^1 f(c-x)\,\mathrm{d}x = 1$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_{c-1}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = ...$

(a) $-1$

√ (b) $1$

(c) $c-1$

(d) $c+1$

Mit der Substitution $y = c - x$, $dy = -dx$, respektive $x = c - y$ erhält man

$$\int_{c-1}^{c} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_1^0 f(c-x)(-1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(c-x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

**19.** Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Gebiets, welches durch $f(x) = 5x^2 - 5$ und die $x$-Achse begrenzt wird.

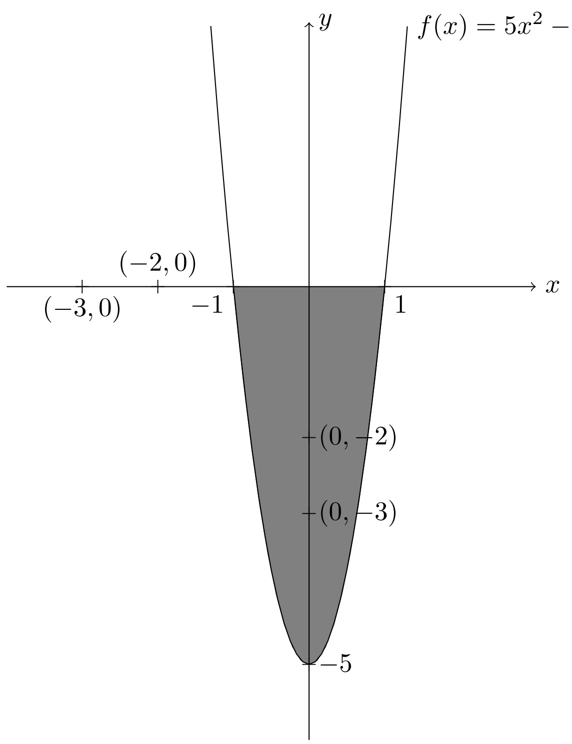
$\surd$ (a) $S = (0, -2)$

(b) $S = (0, -4)$

(c) $S = (-2, 0)$

(d) $S = (-4, 0)$

Variante 1 (überlegen): Man kann sich überlegen, wie die Fläche aussehen sollte. $f(x) = 5x^2 - 5$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit $y$-Achsenabschnitt $-5$ und Nullstellen $\pm 1$:




Aus der Skizze sieht man direkt, dass $(0, -2)$ die einzige Antwort ist, die nicht offensichtlich falsch ist. Genauer: Da das Gebiet symmetrisch zur $y$-Achse ist, ist die $x$-Koordinate des Schwerpunktes $x_S = 0$. Ausserdem sieht man, dass die $y$-Koordinate des Schwerpunktes irgendetwas zwischen 0 und $-2.5$ sein muss. Somit ist $S = (0, -2)$ die einzige Antwort, die in Frage kommt.

Variante 2 (rechnen): Die Nullstellen von $f(x) = 5x^2 - 5$ sind $a = -1$ und $b = 1$. Somit sidn die Koordinaten des Schwerpunktes des angegebenen Gebiets

$$x_S = \frac{\int_{-1}^{1} 5x^3 - 5x \, \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 5x^2 - 5 \, \mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^{1}}{\left[\frac{5}{3}x^3 - 5x\right]_{-1}^{1}} = 0$$

und

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(5x^2-5)^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}5x^2-5\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{25}{2}\int_{-1}^{1}x^4-2x^2+1\,\mathrm{d}x}{5\int_{-1}^{1}x^2-1\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{25}{2}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}}{5\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-1}^{1}}$$

$$= 5\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+2\right)}{\left(\frac{2}{3}-2\right)} = 5\frac{\frac{1}{2}\frac{8}{15}}{-\frac{4}{3}} = -2.$$

**20.** Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\sqrt{3}\int_{\frac{\pi^2}{27}}^{\frac{\pi^2}{12}}\frac{\sin(\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(a) 0

√ (b) 1

(c) 2

(d) $\pi$

Mit der Substitution $y=\sqrt{3x}$, $x=\frac{y^2}{3}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{3}y\,\mathrm{d}y$ erhalten wir

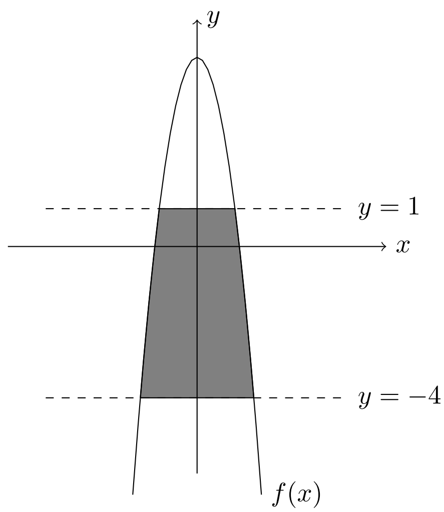
$$\sqrt{3}\int_{\frac{\pi^2}{27}}^{\frac{\pi^2}{12}}\frac{\sin(\sqrt{3x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(y)}{\frac{y}{\sqrt{3}}}\frac{2}{3}y\,\mathrm{d}y = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\,\mathrm{d}y = 2\left[-\cos(y)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(-0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1.$$

**21.** Unten ist der Graph der Funktion

$$f(x) = 5 - 4x^2$$

abgebildet. Was ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Bereichs?




(a) $\frac{17}{3}$

(b) $\frac{25}{3}$

(c) $\frac{31}{3}$

√ (d) $\frac{38}{3}$

Variante 1: Spiegelt man an der Geraden $x = 0$, so muss man den Flächeninhalt unter dem Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}$ von $f$ zwischen $-1$ und $1$ berechnen. Es ist $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{5-y}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5-y}$ und daher gilt für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F = 2\int_{-4}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{5-y}\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{1}(5-y)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}(5-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{1} = -\frac{2}{3}\left[(5-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{1} \\ = -\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) = -\frac{2}{3}(8-27) = \frac{2}{3}\cdot 19 = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

Variante 2: Es gilt $f(x) = -4$ genau dann, wenn $x = \pm\frac{3}{2}$. Und es gilt $f(x) = 1$

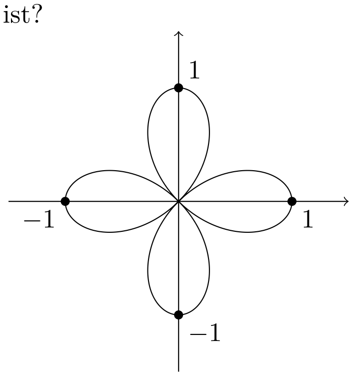
genau dann, wenn $x = \pm 1$. Somit ist der Flächeninhalt auch gleich

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) + 4 \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(x) - 1 \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} 9 - 4x^2 \,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_{0}^{\frac{3}{2}} 9 - 4x^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} 4 - 4x^2 \,\mathrm{d}x = 2\left[9x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} - 2\left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{27}{2} - \frac{9}{2} - 0\right) - 2\left(4 - \frac{4}{3} - 0\right) = 18 - \frac{16}{3} = \frac{38}{3}.$$

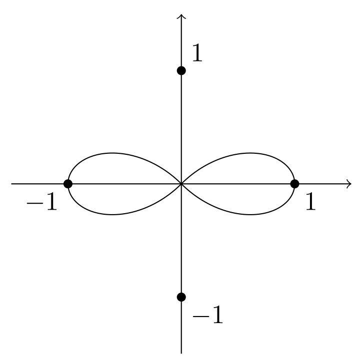
**22.** Welche der folgenden Abbildungen stellt die Kurve dar, die in Polarkoordinaten durch

$$R(\phi) = \cos(2\phi), \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

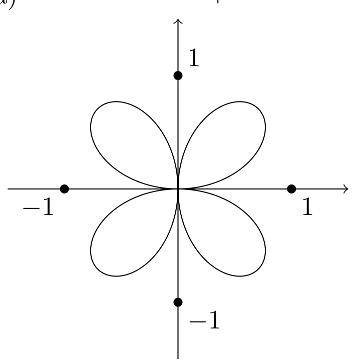
gegeben ist?



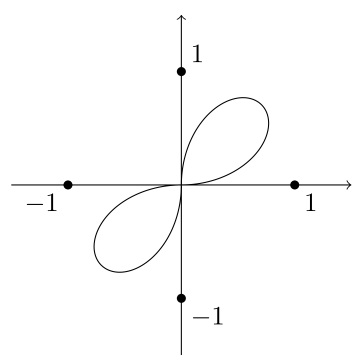

√ (a)




(b)




(c)




(d)

Es gilt $R(\frac{\pi}{2}) = \cos(\pi) = -1$, womit wir alle anderen Antworten ausschliessen können.

**23.** Eine Kreisbahn mit Mittelpunkt $(0,1)$ und Radius 2 beginnend bei $(0,3)$ sei parametrisiert durch

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \sin(8t) \\ \cos(8t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie wird der Kreis bei dieser Parametrisierung durchlaufen?

(a) einmaliger Umlauf im Gegenuhrzeigersinn

(b) einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn

(c) zweimaliger Umlauf im Gegenuhrzeigersinn

$\checkmark$ (d) zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn

**24.** Seien $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurven gegeben durch

$$\gamma_1(t) = (x(t), y(t)) \quad , \quad \gamma_2(t) = \left(\tfrac{1}{2}x(t), \tfrac{1}{2}y(t)\right).$$

Sei $\kappa_1(t)$ die Krümmung von $\gamma_1$ und $\kappa_2(t)$ die Krümmung von $\gamma_2$. Dann gilt

(a) $\kappa_1(t) = 2\kappa_2(t)$

$\checkmark$ (b) $2\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$

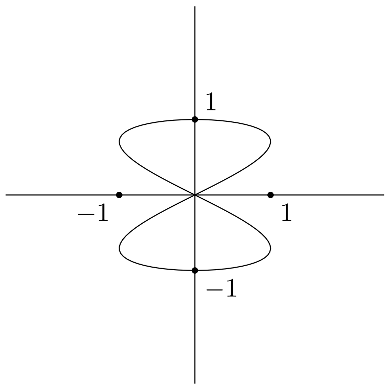
(c) $\kappa_1(t) = 4\kappa_2(t)$

(d) $4\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$

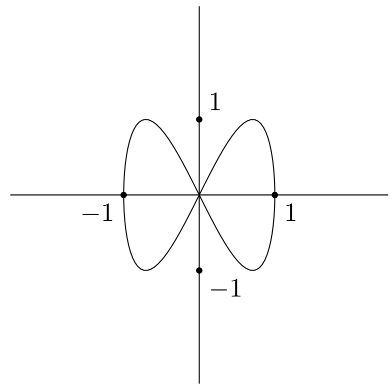
Ein Kreis mit doppelt so grossem Radius hat halb so grosse Krümmung. Somit ist $\kappa_1(t) = \frac{1}{2}\kappa_2(t)$ bzw. $2\kappa_1(t) = \kappa_2(t)$.

**25.** Welches Bild hat die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t))$?

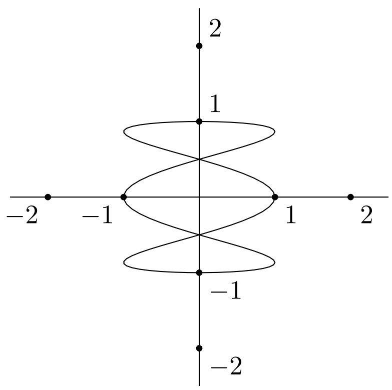
$\surd$ (a)



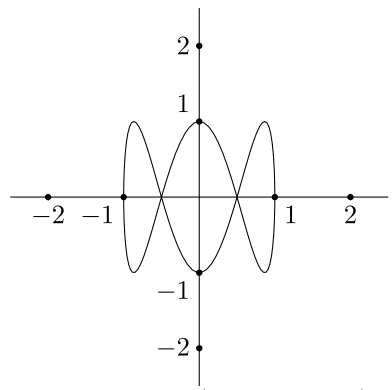

(b)




(c)




(d)




Nur Kurve (a) geht durch die Punkte $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(\frac{\pi}{2}) = \big(\sin(\pi), \sin(\frac{\pi}{2})\big) = (0,1)$.