D-BAUG — Analysis I/II — HS 2020 / FS 2021
Dr. Meike Akveld

Zwischenprüfung

Dienstag, 23.02.2021

---

1. Funktionen: Welche Eigenschaften hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto \cosh(x) + \sinh(x)$?

(a) f ist monoton fallend.

√ (b) f ist injektiv.

(c) f ist beschränkt.

(d) f ist gerade.

Es ist

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x.$$

Aus dem bekannten Graph der Exponentialfunktion kann man direkt ablesen, dass $f(x) = e^x$ injektiv ist, die anderen Aussagen hingegen falsch sind.

2. Funktionen: Sei $f(x) = \frac{4}{x-1}$ und $g(x) = 2x$, so ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(g(x)) = g(f(x))$ gegeben durch

√ (a) $\{\frac{1}{3}\}$

(b) $\{2\}$

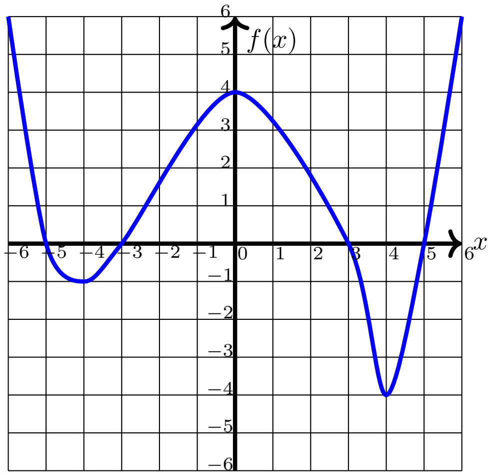
(c) $\{3\}$

(d) $\mathbb{R}$

Es ist

$$\begin{aligned} & f(g(x)) = g(f(x)) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4}{2x-1} = \frac{8}{x-1} \\ \Leftrightarrow\quad & 4(x-1) = 8(2x-1) \\ \Leftrightarrow\quad & 4x - 4 = 16x - 8 \\ \Leftrightarrow\quad & 12x = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Funktionen: Gegeben ist die Funktion $f : [-6, 6] \to [-6, 6]$ mit Graph wie in der Abbildung. Wie viele Lösungen hat $f(f(x)) = 0$?



(a) 2

(b) 4

(c) 6

√ (d) 8

Aus der Abbildung kann man ablesen, dass die Nullstellen von f bei $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$ und $x_4 = 5$ sind. Also ist $f(f(x)) = 0$ genau dann, wenn $f(x) \in \{-5, -3, 3, 5\}$ ist. Man kann wiederum in der Abbildung ablesen, dass $f(x) = -5$ keine Lösung hat, $f(x) = -3$ zwei Lösungen hat, $f(x) = 3$ vier Lösungen hat und $f(x) = 5$ zwei Lösungen hat. Somit haben wir insgesamt $0 + 2 + 4 + 2 = 8$ Lösungen für $f(f(x)) = 0$.

4. Komplexe Zahlen: Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit positivem Imaginärteil. Welche der folgenden Zahlen hat ebenfalls positiven Imaginärteil?

(a) $1/z$

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $y > 0$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

hat Imaginärteil $\frac{-y}{x^2+y^2} < 0$, da $y > 0$ ist.

√ (b) $-1/z$

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $y > 0$.

$$\frac{-1}{z} = -\frac{1}{x+iy} = -\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$$

hat Imaginärteil $\frac{y}{x^2+y^2} > 0$, da $y > 0$ ist.

(c) $\bar{z}$

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $y > 0$.

$$\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$$

hat Imaginärteil $-y < 0$.

(d) $-1/\bar{z}$

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $y > 0$.

$$\frac{-1}{\bar{z}} = -\frac{1}{x-iy} = -\frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

hat Imaginärteil $\frac{-y}{x^2+y^2} < 0$, da $y > 0$ ist.

Alternativ kann man geometrisch überlegen.

5. Komplexe Zahlen: Gegeben sind zwei komplexe Zahlen deren Summe 6 ist und deren Produkt 10 ist. So ist eine dieser Zahlen gleich

(a) $-3 - i$

Angenommen $z = -3 - i$ ist eine der beiden Zahlen. Dann ist die zweite Zahl $w = 6 - z = 9 + i$. Dann ist aber $|zw| = |z||w| = \sqrt{10}\sqrt{82} > 10$, was ein Widerspruch zu $zw = 10$ ist.

(b) $-3 + i$

Angenommen $z = -3 + i$ ist eine der beiden Zahlen. Dann ist die zweite Zahl $w = 6 - z = 9 - i$. Dann ist aber $|zw| = |z||w| = \sqrt{10}\sqrt{82} > 10$, was ein Widerspruch zu $zw = 10$ ist.

$\surd$ (c) $3 + i$

Mit $z = 3 + i$ und $w = 6 - z = 3 - i$ ist $zw = (3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = 10$ wie gefordert.

(d) $-6 + i$

Angenommen $z = -6 + i$ ist eine der beiden Zahlen. Dann ist die zweite Zahl $w = 6 - z = 12 - i$. Dann ist aber $|zw| = |z||w| = \sqrt{37}\sqrt{145} > 10$, was ein Widerspruch zu $zw = 10$ ist.

Wir schreiben in Polarkoordinaten $z = r_1 e^{i\phi_1}$ und $w = r_2 e^{i\phi_2}$ und überlegen geometrisch. Damit das Produkt reell ist, muss $\phi_1 + \phi_2 = 0$ gelten. Damit die Summe eine positive reelle Zahl sein kann, müssen die Realteile beider Zahlen positiv sein. Dadurch kommt nur noch eine Antwort in Frage.
Des Weiteren wüsste man mit dieser Überlegung auch, dass $z = \overline{w}$ ist. Also folgt für $z = x + iy$ und $w = x - iy$, dass $6 = w + z = 2x$ und $10 = zw = x^2 + y^2$ ist. Somit erhält man $x = 3$ und $y = \pm 1$ als Lösungen.

6. Komplexe Zahlen: Welche geometrische Form hat die folgende Region in der komplexen Ebene

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < |z - 2 - 3i|\}?$$

(a) Sie ist eine Kreisscheibe

(b) Sie ist die Fläche eines Rechtecks

$\surd$ (c) Sie ist eine Halbebene

(d) Sie ist eine Gerade

Die Menge enthält alle komplexen Zahlen, die näher bei i als bei $2+3i$ liegen. Dies entspricht der Halbebenen auf der rechten Seite der Mittelsenkrechten zwischen den beiden Punkten i und $2 + 3i$.

7. Komplexe Zahlen: Seien P, Q und R komplexe Polynome mit reellen Koeffizienten, so dass $P(z) = Q(z) \cdot R(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. P sei vom Grad 7 und Q vom Grad 4. Dann hat R mindestens eine reelle Nullstelle.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Da P vom Grad 7 und Q vom Grad 4 ist, muss R vom Grad 3 sein. Die komplexen Nullstellen treten immer in (komplex konjugierten) Paaren auf. Somit kann ein Polynom nicht 3 komplexe Nullstellen haben. Es folgt, dass R entweder eine oder drei reelle Nullstellen hat. Insbesondere hat R also mindestens eine reelle Nullstelle.

8. Folgen: Eine reelle Folge, welche positiv und beschränkt ist, ist auch konvergent.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Die Folge $a_n = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$ ist positiv und beschränkt, aber nicht konvergent.

9. Folgen: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n = (-1)^n \sin(a_n)$$

eine Nullfolge.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Da der Sinus eine stetige Funktion ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = \sin(\lim_{n\to\infty} a_n) = \sin(0) = 0.$$

Da $(|b_n|)$ eine Nullfolge ist, ist auch (b_n) eine Nullfolge.

10. Parametrisierte Kurven: Gegeben sei die Parabel p mittels der impliziten Darstellung $y = x^2$. Welche Aussage über die Evolute von p ist richtig?

√ (a) Die Evolute liegt in der oberen Halbebene, d.h. $y \geq 0$ für alle Punkte (x, y) auf der Evolute.

Zeichnet man sich die Parabel auf und überlegt sich, wie die Krümmungskreise aussehen, sieht man sofort, dass die Mittelpunkte alle oberhalb der x-Achse liegen.

(b) Die Evolute schneidet p in genau einem Punkt.

Da die Funktion $y = x^2$ symmetrisch bzgl der y-Achse ist, und die Evolute die Kurve sicher nicht im Ursprung schneidet, gibt es eine gerade Anzahl von Schnittpunkten von der Evolute mit der Parabel p.

(c) Die Evolute ist beschränkt.

Wir können die Parabel p parametrisieren als $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$. Die Evolute ist

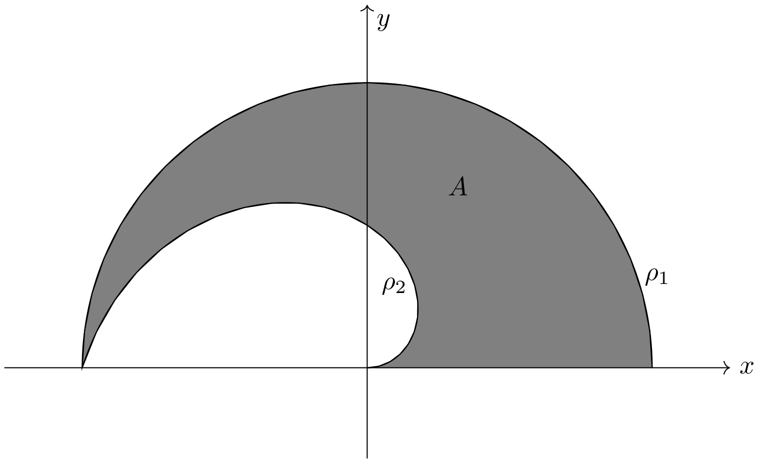
$$\begin{aligned}\vec{m}(t) &= (x(t), y(t)) + \frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}(-\dot{y}(t), \dot{x}(t)) \\ &= (t, t^2) + \frac{1 + 4t^2}{2}(-2t, 1) = (-8t^3, \tfrac{1}{2} + 3t^2).\end{aligned}$$

Diese Funktion ist nicht beschränkt.

(d) Die Evolute ist rotationssymmetrisch bezüglich dem Koordinatenursprung.

Da die Parabel achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist, ist auch die Evolute achsensymmetrisch bzgl der y-Achse. Insbesondere ist sie nicht rotationssymmetrisch gezüglich dem Koordinatenursprung.

11. Parametrisierte Kurven: Wie gross ist die Fläche, die die Kurven mit Polarkoordinatendarstellung $\rho_1(\varphi) = \pi$ und $\rho_2(\varphi) = \varphi$ in den ersten zwei Quadranten einschliessen?



√ (a) $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\pi^2 - \varphi^2\right) \mathrm{d}\varphi$

(b) $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \pi^2 \,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi$

(c) $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\pi - \varphi\right)^2 \mathrm{d}\varphi$

(d) $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi^2 \,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi$

Die Formel für die Fläche unter einer Kurve ist

$$\frac{1}{2}\int_a^b r(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi.$$

Die gesuchte Fläche A ist die Fläche unter der Kurve ρ_1 minus die Fläche unter der Kurve ρ_2, also

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho_1(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho_2(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho_1(\phi)^2 - \rho_2(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \pi^2 - \phi^2 \,\mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

12. Parametrisierte Kurven: Die parametrisierte Kurve definiert durch $r(t) = \begin{pmatrix} \tan(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ist identisch zum Graphen der Funktion

(a) $y = \arctan(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $y = \arctan(x)$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

√ (c) $y = \arctan(x) + \pi$ für $x \in \mathbb{R}$

(d) $y = \arctan(x) - \pi$ für $x \in \mathbb{R}$

Die parametrisierte Kurve ist identisch zu $x = \tan(y)$ für $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Wir sind hier im 2. Quadranten, während die Umkehrfunktion des Tangens für Werte in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definiert ist. Entsprechend muss man noch ein π addieren und erhält $y = \arctan(x) + \pi$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

13. Differentialrechnung: Sei $f(x) = \ln(x^2)$. Welche der folgenden Gleichungen beschreibt eine Tangente an den Graphen von f?

(a) $y = 0$

(b) $y = x + \pi$

√ (c) $y = 2x - 2$

(d) Keine der obigen 3 Gleichungen beschreibt eine Tangente an den Graphen von f.

Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, also

$$y = \frac{2}{x_0}(x - x_0) + \ln(x_0^2) = \frac{2}{x_0}x + \ln(x_0^2) - 2.$$

Für $x_0 = 1$ erhält man $y = 2x - 2$.

14. Differentialrechnung: Seien f und g differenzierbare Funktionen mit

$$f(1) = 2 \quad , \quad f'(1) = 3 \quad , \quad f'(2) = -4,$$

$$g(1) = 2 \quad , \quad g'(1) = -3 \quad , \quad g'(2) = 5$$

Sei $h(x) = f(g(x))$. Dann gilt $h'(1) =$

(a) -9

(b) -4

√ (c) 12

(d) 15

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2)g'(1) = (-4) \cdot (-3) = 12.$$

15. Differentialrechnung: Seien g und h Umkehrfunktionen voneinander mit

x	$g(x)$	$h(x)$	$h'(x)$
-1	6	-10	4
6	20	-1	3

Wie lautet $g'(-10)$?

√ (a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) -1

(d) $\frac{1}{10}$

Mit der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen gilt

$$g'(-10) = g'(h(-1)) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{4}.$$

16. Integrationstechnik: Welches der folgenden Integrale kann man mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung berechnen?

$\checkmark$ (a) $\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

Die Nullstellen von $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ sind 1 und 3. Mit dem Ansatz

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx - B}{(x-1)(x-3)}$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -3A - B &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-3}$$

kann man das Integral berechnen:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C.$$

(b) $\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$

Das Polynom $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x_0 = 2$. Somit bringt eine Partialbruchzerlegung nichts bzw die Partialbruchzerlegung lässt den Bruch unverändert.

(c) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$

Die Nullstellen von $x^2 - 4x + 5$ sind $x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$. Die Nullstellen sind also komplex und nicht reell. Somit kann man den quadratischen Faktor $x^2 - 4x + 5$ über $\mathbb{R}$ nicht faktorisieren, weswegen wir keine Partialbruchzerlegung machen können bzw die Partialbruchzerlegung lässt den Bruch unverändert.

(d) $\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx$

Die Nullstellen von $x^2 - 4x + 6$ sind $x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}i$. Die Nullstellen sind also komplex und nicht reell. Somit kann man den quadratischen Faktor $x^2 - 4x + 6$ über $\mathbb{R}$ nicht faktorisieren, weswegen wir keine Partialbruchzerlegung machen können bzw die Partialbruchzerlegung lässt den Bruch unverändert.

17. Integrationstechnik: Betrachten Sie die folgende Variablensubstitution:

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int u\, du.$$

Welche Substitution wurde hier gemacht?

(a) $u = \ln x$

Mit $u = \ln x$ ist $du = \frac{1}{x} dx$. Somit wäre

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \frac{\ln u}{u}\, du,$$

Diese Substitution ist also sinnvoll, aber es ist nicht die gesuchte Substitution.

(b) $u = x \ln x$

Mit $u = x \ln x$ ist $du = (\ln x + 1) dx$. Somit wäre

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \frac{\ln\left(\frac{u}{x}\right)}{u} \frac{1}{\ln x + 1}\, du = \int \frac{\ln u - \ln x}{u(\ln x + 1)}\, du.$$

Dies macht aber gar keinen Sinn, da sich die x-Terme nicht herausstreichen. Diese Substitution funktioniert also gar nicht.

(c) $u = \frac{1}{\ln x}$

Mit $u = \frac{1}{\ln x}$ ist $du = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x(\ln x)^2} dx$. Somit wäre

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \frac{\ln \frac{1}{u}}{\frac{x}{u}} (-x(\ln x)^2)\, du = \int \ln(u) \frac{(\ln x)^2}{x}\, du.$$

Dies macht aber gar keinen Sinn, da sich die x-Terme nicht herausstreichen. Diese Substitution funktioniert also gar nicht.

√ (d) $u = \ln(\ln x)$

Mit $u = \ln(\ln x)$ ist $du = \frac{1}{x \ln x} dx$. Somit gilt

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx = \int \ln(\ln x) \frac{dx}{x \ln x}\, dx = \int u\, du.$$

18. Integrationstechnik: Seien $0 < a < b$ und $0 < c < d$. Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende und surjektive Funktion mit Umkehrfunktion f^{-1}. Dann gilt $\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{dy} =$

(a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✓ (b) $bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) $\frac{1}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.

(d) $bd - ac - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mit der Substitution $x = f^{-1}(y)$ bzw $y = f(x)$ und $dy = f'(x)dx$ gilt

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,dy = \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} xf'(x)\,dx.$$

Mit partieller Integration erhalten wir weiter

$$= [xf(x)]_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} - \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f(x)\,dx = f^{-1}(d)d - f^{-1}(c)c - \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f(x)\,dx$$
$$= bd - ac - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Im letzten Schritt haben wir $f(a) = c$ und $f(b) = d$ verwendet, was gilt, da f streng monoton wachsend und surjektiv ist.

19. Anwendungen der Integralrechnung: Das Gebiet begrenzt durch die Kurve $y = x^2$, die Gerade $y = 4$ und die y-Achse wird um die ***y*-Achse** rotiert. Was ist das Volumen des so entstehenden Körpers?

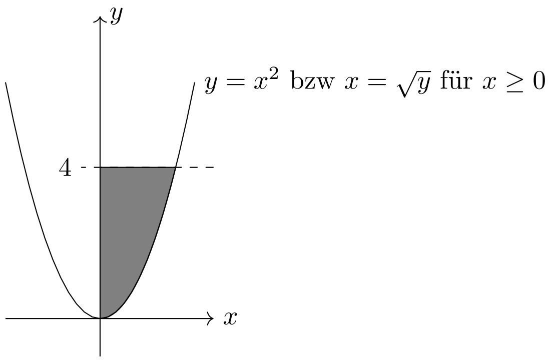
√ (a) 8π

(b) $\frac{80}{3}\pi$

(c) $\frac{32}{5}\pi$

(d) $\frac{1024}{5}\pi$

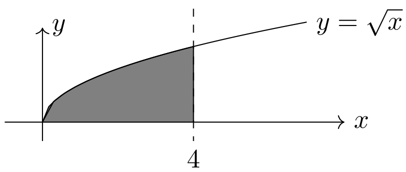
Wir bemerken zuerst, dass die Rotation um die y-Achse ist, und nicht um die x-Achse. Das Rotationsvolumen von dem Gebiet



um die y-Achse ist

$$\pi \int_0^4 g(y)^2 \, dy = \pi \int_0^4 \sqrt{y}^2 \, dy = \pi \int_0^4 y \, dy = \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 = 8\pi.$$

Alternative: Man kann das Gebiet auch um 90° drehen und die Rotation um die x-Achse betrachten:



Das Rotationsvolumen ist

$$\pi \int_0^4 \sqrt{x}^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = 8\pi.$$

20. Anwendungen der Integralrechnung: Ein *Deltoid* ist durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = 6\cos(t) + 3\cos(2t)$$
$$y(t) = 6\sin(t) - 3\sin(2t)$$

gegeben, wobei $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt. Welcher Ausdruck entspricht der Bogenlänge des Deltoids?

Hinweis: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ für alle reellen Zahlen a und b.

√ (a) $3\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(b) $3\int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(c) $3\int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(d) $3\int_0^{\pi} \sqrt{5 - 4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

Die Bogenlänge berechnet sich als

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-6\sin(t) - 6\sin(2t))^2 + (6\cos(t) - 6\cos(2t))^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{36(\sin(t)^2 + 2\sin(t)\sin(2t) + \sin(2t)^2 + \cos(t)^2 - 2\cos(t)\cos(2t) + \cos(2t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{36(2 + 2\sin(t)\sin(2t) - 2\cos(t)\cos(2t))}\,dt$$
$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8(\cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t)))}\,dt$$
$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos(t+2t)}\,dt = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos(3t)}\,dt.$$

21. Anwendungen der Integralrechnung: Gegeben seien zwei positive stetige Funktionen $f_1, f_2 : [0,1] \to (0,\infty)$. Es sei K_i der Rotationskörper, der durch Rotation von f_i um die x-Achse entsteht und V_i das Volumen von K_i. Wir nehmen an, dass $\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x$ gilt. Dann ist $V_1 = V_2$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Es gilt

$$V_i = \pi \int_0^1 f_i(x)^2\,dx.$$

Im Allgemeinen folgt aus $\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 f_2(x)\,dx$ nicht, dass $\int_0^1 f_1(x)^2\,dx = \int_0^1 f_2(x)^2\,dx$ ist. Betrachten wir zum Beispiel $f_1(x) = 1$ und $f_2(x) = 2x$. Dann gilt

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

und auch

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1.$$

Die Volumen der Rotationskörper sind aber nicht gleich:

$$V_1 = \pi \int_0^1 f_1(x)^2\,dx = \pi \int_0^1 1\,dx = \pi,$$

aber

$$V_2 = \pi \int_0^1 f_2(x)^2\,dx = \pi \int_0^1 4x^2\,dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

22. Reihen: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{5}{4}}}{(n+1)^{\frac{5}{4}}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^{\frac{5}{4}} = 1^{\frac{5}{4}} = 1.$$

Somit kann man mit dem Quotientenkriterium nichts über die Konvergenz der Reihe aussagen.

23. Reihen: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+6}{4n-2}\right)^n$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3n+6}{4n-2}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+6}{4n-2}=\frac{3}{4}<1.$$

Folglich konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

24. Potenzreihen: Sei $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ eine Potenzreihe und K ihr Konvergenzbereich. Wenn $4\in K$, so muss $-3\in K$ sein.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist immer von der Form $(-\rho,\rho)$ und enthält allenfalls auch noch einen oder beide Randpunkte. Dabei ist ρ der Konvergenzradius. Da $4\in K$ liegt, muss der Konvergenzradius $\rho\geq 4$ sein. Somit liegt aber auch $-3\in(-4,4)\subset(-\rho,\rho)$. Also ist $-3\in K$.

25. Potenzreihen: Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. Sie konvergiert für $x=-3$ und sie divergiert für $x=5$. Mit diesen Informationen kann man bestimmen, ob die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k3^k$ konvergiert oder nicht.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Da die Potenzreihe für $x=-3$ konvergiert und für $x=5$ divergiert, weiss man, dass der Konvergenzradius ρ zwischen 3 und 5 liegen muss. Es ist also möglich, dass der Konvergenzradius $\rho=3$ ist. Über den Randpunkt $x=3$ kann man in diesem Fall aber keine Aussage machen, d.h. es ist nicht bekannt, ob $\sum_{k=0}^{\infty}a_k3^k$ konvergiert oder nicht.