D-ITET | FS 2019
Meike Akveld | 401-0302-10L

Prüfung: Komplexe Analysis

Hinweise:

i. Legen Sie Ihre ETH-Karte (Legi) auf den Tisch.

ii. Die Prüfung besteht aus einer Multiple-Choice Aufgabe mit acht Teilaufgaben (Aufgaben mit jeweils vier Antworten von denen nur eine wahr ist) und drei Aufgaben zur schriftlichen Beantwortung. Alle vier Aufgaben sind mit der gleichen Anzahl Punkte gewichtet.

iii. Schreiben Sie entweder in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Wenn Sie diese Regeln missachten, werden Sie möglicherweise nicht die volle Punktzahl erreichen können!

iv. Beantworten Sie die Multiple-Choice Aufgaben auf das beiliegende Blatt. Setzen Sie dazu ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Setzen Sie kein Kreuz oder ist Ihre Antwort falsch, so erhalten Sie keine Punkte. Ist ihre Antwort richtig, so erhalten Sie zwei Punkte.

v. Wenn Sie einen Fehler beim Ankreuzen der Multiple-Choice Antworten gemacht haben, so melden Sie sich indem Sie Ihre Hand heben. Ein Assistent/Eine Assistentin bringt Ihnen dann ein Korrekturmittel, mit welchem Sie das Kreuz entfernen können. Machen Sie danach ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Malen Sie auf keinen Fall die entfernte Box nach, sonst erhalten Sie keine Punkte!

vi. Beantworten Sie die schriftlichen Aufgaben direkt auf die Aufgabenblätter, welche in diesem Dossier enthalten sind. Weitere abgegebene Blätter werden nicht beachtet!

vii. Begründen Sie Ihre Aussagen bei den schriftlichen Aufgaben. Nicht motivierte Lösungen werden dort nicht mit der vollen Punktezahl bewertet!

viii. Öffnen Sie dieses Dossier erst, wenn die Assistierenden das Zeichen dazu geben!

Viel Erfolg!

Datum: 21.08.2019 | *Identifikationsnummer*:
Prüfungsdauer: 120 min. | *Name*:

Aufgabe 1: Multiple Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Sei $z \in \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(z) > 0$. Welche der folgenden Zahlen $w \in \mathbb{C}$ erfüllt $\mathrm{Re}(w) < 0$?

i. $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ ii. $w = \overline{z}$ iii. $w = \dfrac{1}{z}$ iv. $w = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

(1.b) [*2 Punkte*] Was ist eine Polarform von $\overline{\mathrm{i}\sqrt{2} - \sqrt{2}}$?

i. $2\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

iii. $2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

ii. $2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

iv. $4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

(1.c) [*2 Punkte*] Betrachten Sie die schwarzen Punkte in der Abbildung 1. Den Lösungen welcher Gleichung entsprechen diese Punkte?

i. $z^6 = \dfrac{1}{2}$ ii. $z^6 = \dfrac{1}{64}$ iii. $z^6 = -\dfrac{1}{64}$ iv. $z^8 = \dfrac{1}{256}$

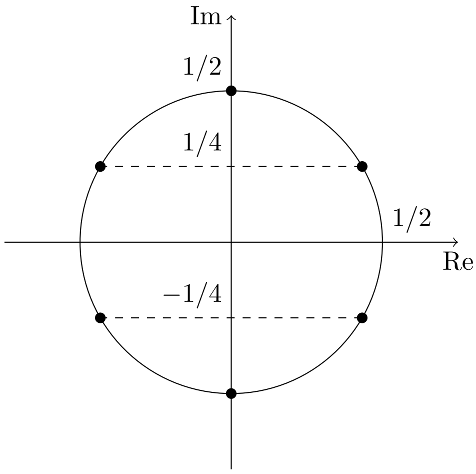

Abbildung 1: Punkte auf einem Kreis.

(1.d) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Welche der folgenden Funktionen ist im Allgemeinen *nicht* holomorph?

i. $g(z) = f(z)^3$ ii. $g(z) = f\left(z^4\right)$ iii. $g(z) = f(\overline{z})$ iv. $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$

(1.e) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \displaystyle\int_\gamma \mathrm{Im}\left(f(z)\right)\,\mathrm{d}z$

ii. $\left|\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \displaystyle\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$

iii. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, wenn ein $t \in [0,1]$ existiert, so dass $f(\gamma(t)) \neq 0$.

iv. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, wenn für alle $t \in [0,1]$, $f(\gamma(t)) = 0$ gilt.

(1.f) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ ii. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = 1 + \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ iii. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{e} + \pi \mathrm{i}$ iv. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \pi \mathrm{i}$

(1.g) [*2 Punkte*] Welche der Funktionen, deren Absolutbetrag in Abbildung 2 dargestellt ist, ist sicherlich nicht holomorph?

i. Die Funktion zur Abbildung 2i.

ii. Die Funktion zur Abbildung 2ii.

iii. Die Funktion zur Abbildung 2iii.

iv. Die Funktion zur Abbildung 2iv.

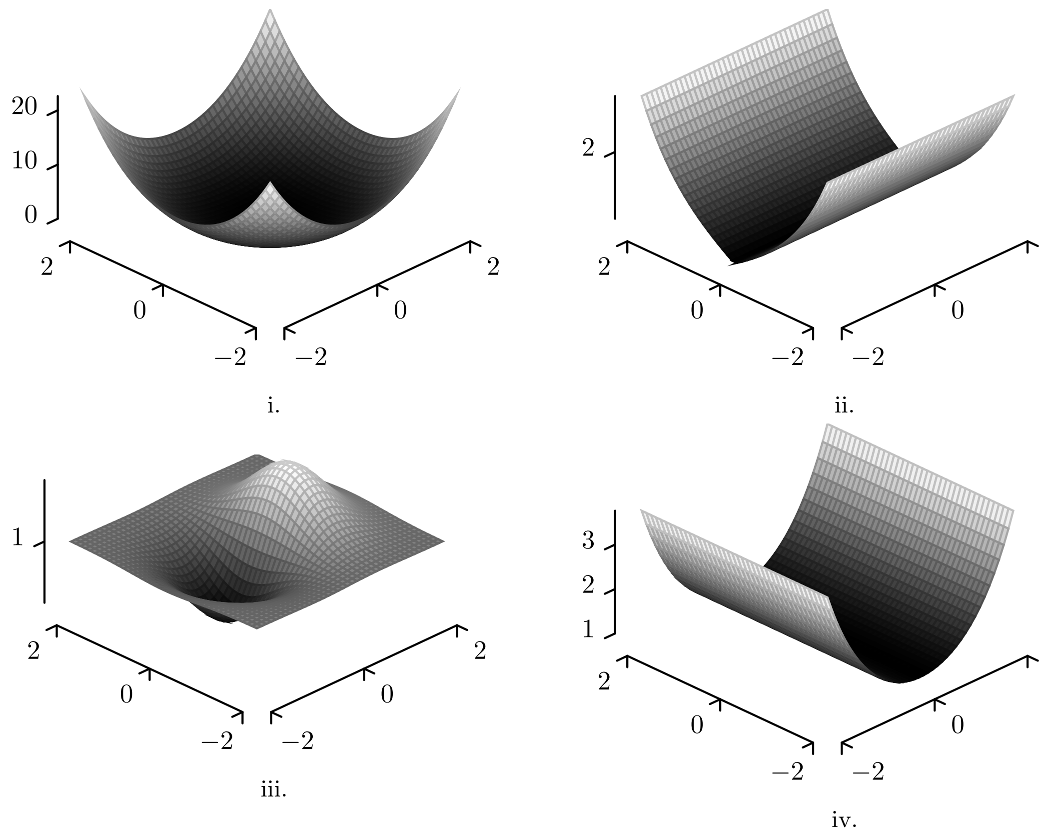

Abbildung 2: Die Absolutbeträge von vier Funktionen.

(1.h) [*2 Punkte*] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die kontinuierliche Fouriertransformation von $f(t) = \exp(-t^2)$ gegeben ist durch $\widehat{f}(s) = \sqrt{\pi}\exp(-s^2/4)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{s^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

ii. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{s^2}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iii. $\widehat{g}(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}s}{2}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iv. $\widehat{g}(s) = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung.

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, 2\pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*2 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(3.b) [*8 Punkte*] Berechnen Sie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{\sinh(2\pi) + \mathrm{i}n(\cosh(2\pi) - 1)}{2\pi(n^2 + 1)}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

der komplexen Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

von f, wobei $\sinh(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$.

(3.c) [*6 Punkte*] Benutzen Sie (2.b), um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi \cosh(\pi)}{\sinh(2\pi)} - 1 \right)$$

gilt.

Lösung.

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*]

(4.a) [*4 Punkte*] Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, dass

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

(4.b) [*12 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) &= \mathrm{e}^{-t}, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = 0, &\qquad y(0) = -1. \end{aligned}$$

Lösung.