D-ITET
Meike Akveld

HS 2019
401-0302-10L

Prüfung: Komplexe Analysis

Hinweise:

i. Legen Sie Ihre ETH-Karte (Legi) auf den Tisch.

ii. Die Prüfung besteht aus einer Multiple-Choice Aufgabe mit acht Teilaufgaben (Aufgaben mit jeweils vier Antworten von denen nur eine wahr ist) und drei Aufgaben zur schriftlichen Beantwortung. Alle vier Aufgaben sind mit der gleichen Anzahl Punkte gewichtet.

iii. Schreiben Sie entweder in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Wenn Sie diese Regeln missachten, werden Sie möglicherweise nicht die volle Punktzahl erreichen können!

iv. Beantworten Sie die Multiple-Choice Aufgaben auf das beiliegende Blatt. Setzen Sie dazu ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Setzen Sie kein Kreuz oder ist Ihre Antwort falsch, so erhalten Sie keine Punkte. Ist ihre Antwort richtig, so erhalten Sie zwei Punkte.

v. Wenn Sie einen Fehler beim Ankreuzen der Multiple-Choice Antworten gemacht haben, so melden Sie sich indem Sie Ihre Hand heben. Ein Assistent/Eine Assistentin bringt Ihnen dann ein Korrekturmittel, mit welchem Sie das Kreuz entfernen können. Machen Sie danach ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Malen Sie auf keinen Fall die entfernte Box nach, sonst erhalten Sie keine Punkte!

vi. Beantworten Sie die schriftlichen Aufgaben direkt auf die Aufgabenblätter, welche in diesem Dossier enthalten sind. Weitere abgegebene Blätter werden nicht beachtet!

vii. Begründen Sie Ihre Aussagen bei den schriftlichen Aufgaben. Nicht motivierte Lösungen werden dort nicht mit der vollen Punktezahl bewertet!

viii. Öffnen Sie dieses Dossier erst, wenn die Assistierenden das Zeichen dazu geben!

Viel Erfolg!

Datum: 07.02.2020
Prüfungsdauer: 120 min.

Identifikationsnummer:
Name:

Aufgabe 1: Multiple-Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp\left(\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}b\right)$$

reell?

i. $b = 1$ ii. $b = 2$ iii. $b = 0$ iv. $b = \sqrt{2}$

(1.b) [*2 Punkte*] Seien $z = 2(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4))$ und $w = 4(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6))$. Was ist dann der Wert von zw^{-1}?

i. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iii. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

ii. $8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

iv. $8\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

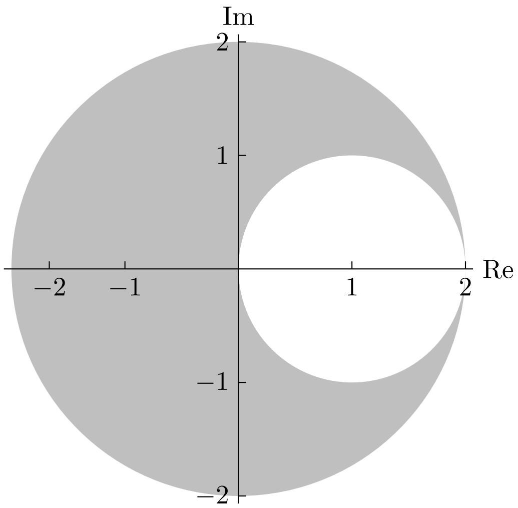
(1.c) [*2 Punkte*] Welche Menge ist in der Abbildung unten grau gefärbt?

i. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 1\}$

iii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 4\}$

ii. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 1 \text{ und } 2|z| < 1\}$

iv. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| > 1 \text{ und } |z| < 2\}$



(1.d) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Funktionen ist holomorph?

i. $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - 2\mathrm{i}xy + y^2$

iii. $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$

ii. $f(x + \mathrm{i}y) = y + \mathrm{i}x$

iv. $f(x + \mathrm{i}y) = -y + \mathrm{i}x$

(1.e) [*2 Punkte*] Was ist der Wert des Integrals

$$\int_\gamma \exp(z^3)\,\mathrm{d}z,$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ den Einheitskreis mit negativer mathematischer Orientierung parametrisiert?

i. 1 ii. 0 iii. $-\mathrm{e}$ iv. $-3\mathrm{e}$

(1.f) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Polstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ an $z_0 \in \mathbb{C}$. Was ist dann die Ordnung der Polstelle z_0 von f'?

i. $n+1$ ii. $n-1$ iii. n iv. $2n$

(1.g) [*2 Punkte*] Sei

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

i. $(f * f)(0) < 0$

ii. $(f * f)(0) > 0$

iii. $(f * f)(0) = 0$

iv. $(f * f)(0)$ konvergiert nicht

(1.h) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante, gerade Funktion mit kontinuierlicher Fouriertransformation $\widehat{f}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\widehat{f}(s) \in \mathbb{R}$, $(f')^\frown(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

ii. $\widehat{f}(s), (f')^\frown(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

iii. $\widehat{f}(s), (f')^\frown(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

iv. $\widehat{f}(s) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $(f')^\frown(s) \in \mathbb{R}$, für alle $s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 6x + 10)^2} \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung.

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **gerade 2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, \pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*4 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f auf $[-3\pi, 3\pi]$.

(3.b) [*10 Punkte*] Weisen Sie nach, dass die Koeffizienten a_n der reellen Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

von f gegeben sind durch

$$a_n = \frac{2(-1)^n \cosh(\pi) - 2}{\pi(n^2 + 1)}, \qquad n \geq 0.$$

Hinweis: Es gilt

$$\cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(3.c) [*2 Punkte*] Bestimmen Sie nun auch die Koeffizienten b_n, $n \geq 1$.

Lösung.

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) &= 1 - t^2, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = -1, &\qquad y(0) = 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > 0$, und

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

Lösung.