D-ITET
Meike Akveld

FS 2019
401-0302-10L

Lösung: Komplexe Analysis

Aufgabe 1: Multiple Choice [*16 Punkte*]

(1.a) [*2 Punkte*] Sei $z \in \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(z) > 0$. Welche der folgenden Zahlen $w \in \mathbb{C}$ erfüllt $\mathrm{Re}(w) < 0$?

i. $w = \frac{1}{\overline{z}}$ ii. $w = \overline{z}$ iii. $w = \frac{1}{z}$ iv. $w = -\frac{1}{\overline{z}}$

(1.b) [*2 Punkte*] Was ist eine Polarform von $\overline{\mathrm{i}\sqrt{2} - \sqrt{2}}$?

i. $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

iii. $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ii. $2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

iv. $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(1.c) [*2 Punkte*] Betrachten Sie die schwarzen Punkte in der Abbildung 1. Den Lösungen welcher Gleichung entsprechen diese Punkte?

i. $z^6 = \frac{1}{2}$ ii. $z^6 = \frac{1}{64}$ iii. $z^6 = -\frac{1}{64}$ iv. $z^8 = \frac{1}{256}$

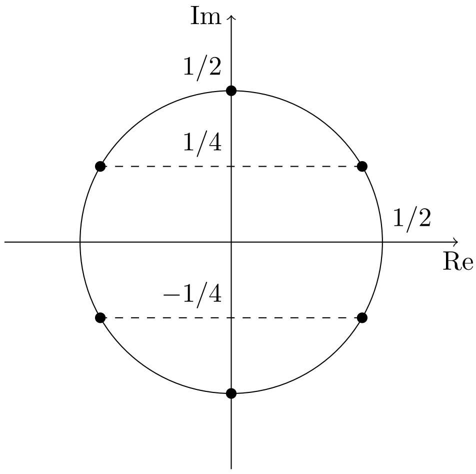

Abbildung 1: Punkte auf einem Kreis.

(1.d) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Welche der folgenden Funktionen ist *nicht* holomorph?

i. $g(z) = f(z)^3$ ii. $g(z) = f\left(z^4\right)$ iii. $g(z) = f(\overline{z})$ iv. $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$

(1.e) [*2 Punkte*] Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Weg. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\gamma \mathrm{Im}\left(f(z)\right)\,\mathrm{d}z$

ii. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$

iii. $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$, wenn ein $t \in [0,1]$ existiert, so dass $f(\gamma(t)) \neq 0$.

iv. $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, wenn für alle $t \in [0,1]$, $f(\gamma(t)) = 0$ gilt.

(1.f) [*2 Punkte*] Welche der folgenden Aussagen gilt?

i. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ ii. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = 1 + \dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ iii. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{e} + \pi \mathrm{i}$ iv. $\mathrm{Log}(\mathrm{i}) = \pi \mathrm{i}$

(1.g) [*2 Punkte*] Welche der Funktionen, deren Absolutbetrag in Abbildung 2 dargestellt ist, ist sicherlich nicht holomorph?

i. Die Funktion zur Abbildung 2i.

ii. Die Funktion zur Abbildung 2ii.

iii. Die Funktion zur Abbildung 2iii.

iv. Die Funktion zur Abbildung 2iv.

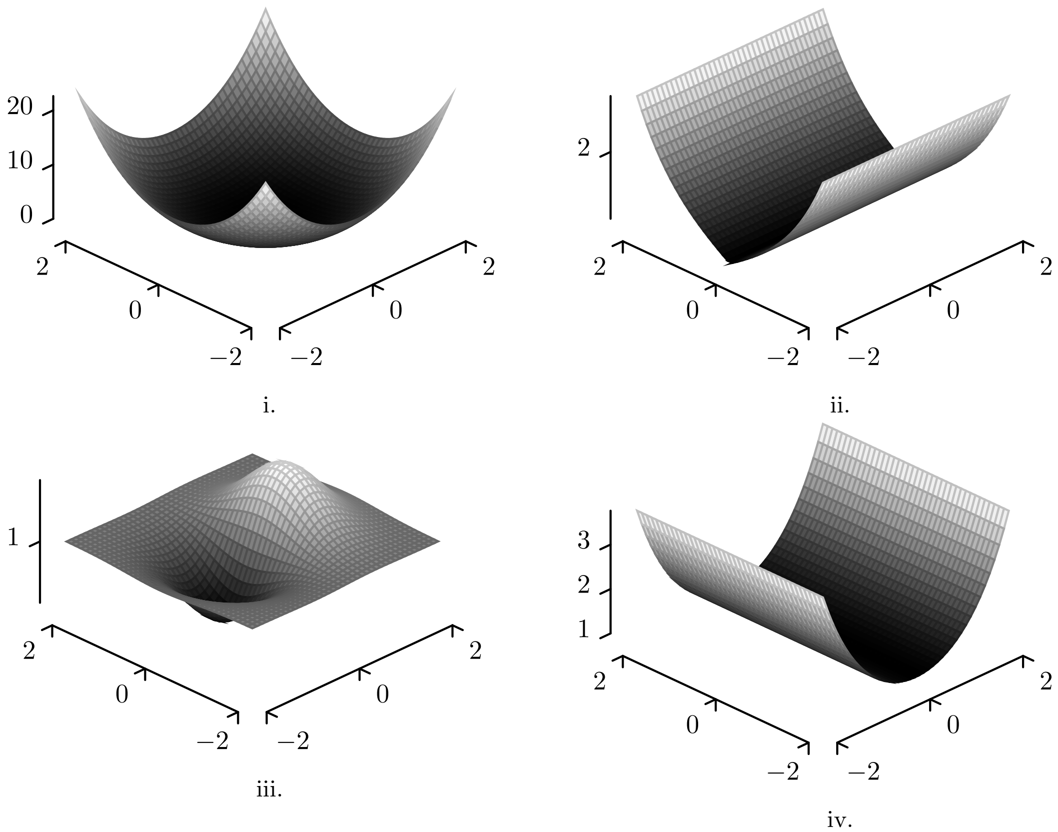

Abbildung 2: Die Absolutbeträge von vier Funktionen.

(1.h) [*2 Punkte*] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die kontinuierliche Fouriertransformation von $f(t) = \exp(-t^2)$ gegeben ist durch $\widehat{f}(s) = \sqrt{\pi}\exp(-s^2/4)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

i. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{s^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

ii. $\widehat{g}(s) = \sqrt{\pi}\left(\dfrac{s^2}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iii. $\widehat{g}(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}s}{2}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

iv. $\widehat{g}(s) = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-s^2/4}$

Aufgabe 2: Residuensatz [*16 Punkte*] Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Sollte ein Kurvenintegral gegen Null konvergieren in Ihrer Berechnung, so argumentieren Sie warum dies der Fall ist.

Lösung. Wir betrachten die Wege $\gamma_R^{(0)}, \gamma_R^{(1)} : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\gamma_R^{(0)}(t) = 2Rt - R, \qquad \gamma_R^{(1)}(t) = R\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}t}, \qquad t \in [0,1].$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)}} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,\mathrm{d}z &= \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{2R}{((2Rt-R)^2-4Rt+2R+5)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

mit der Substitution $x = 2Rt - R$. Ausserdem hatten wir in der Vorlesung gesehen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt, da $(z^2-2z+5)^{-2}$ sich schreiben lässt als $p(z)/q(z)$, mit $p(z) = 1$ und $q(z) = (z^2-2z+5)^2$ zwei Polynomen, welche $\deg p + 2 = 2 < 4 = \deg q$ erfüllen. Wir werden im Folgenden den Residuensatz anwenden. Ist $R > \sqrt{5}$, so hat

$$\frac{1}{(z^2-2z+5)^2} = \frac{1}{(z-1-2\mathrm{i})^2(z-1+2\mathrm{i})^2}$$

innerhalb des Weges $\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}$ nur eine Singularität: Einen Pol zweiter Ordnung an der Stelle $z_0 = 1+2\mathrm{i}$. Wir berechnen das Residuum an z_0 mit der aus der Übung bekannten Formel

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}, z_0\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0} \frac{1}{(z-1+2\mathrm{i})^2} = \frac{-2}{(4\mathrm{i})^3} = \frac{1}{32\mathrm{i}}.$$

Damit gilt laut dem Residuensatz, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^{(0)} * \gamma_R^{(1)}} \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}, z_0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

Aufgabe 3: Fourierreihe [*16 Punkte*] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die **2π-periodische Funktion**, die durch

$$f(t) = \cosh(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2},$$

für $t \in [0, 2\pi]$, gegeben ist.

(3.a) [*2 Punkte*] Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(3.b) [*8 Punkte*] Berechnen Sie die Koeffizienten

$$c_n = \frac{\sinh(2\pi) + \mathrm{i}n(\cosh(2\pi) - 1)}{2\pi(n^2+1)}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

der komplexen Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

von f, wobei $\sinh(t) = (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$.

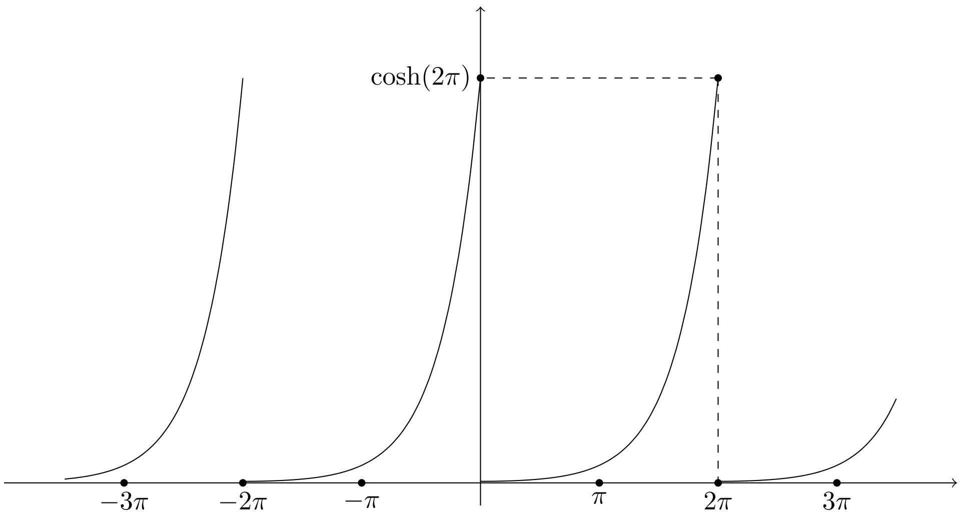

Abbildung 3: Die Funktion f.

(3.c) [*6 Punkte*] Benutzen Sie (2.b), um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi \cosh(\pi)}{\sinh(2\pi)} - 1 \right)$$

gilt.

Lösung. (3.a) Wir zeichnen die Skizze in Abbildung 3.

(3.b) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen die komplexen Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cosh(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{t-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}nt} \, \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{t-\mathrm{i}nt}}{1-\mathrm{i}n} \bigg|_0^{2\pi} - \frac{\mathrm{e}^{-t-\mathrm{i}nt}}{1+\mathrm{i}n} \bigg|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi - 2\pi\mathrm{i}n} - 1}{1-\mathrm{i}n} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi-2\pi\mathrm{i}n} - 1}{1+\mathrm{i}n} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{1-\mathrm{i}n} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi} - 1}{1+\mathrm{i}n} \right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1 + \mathrm{i}n\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{i}n}{1+n^2} - \frac{\mathrm{e}^{-2\pi} - 1 - \mathrm{i}n\mathrm{e}^{-2\pi} + \mathrm{i}n}{1+n^2} \right) \\ &= \frac{\sinh(2\pi) + \mathrm{i}n \left(\cosh(2\pi) - 1\right)}{2\pi(1+n^2)}. \end{aligned}$$

Damit ist also die komplexe Fourierreihe von f gegeben durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(2\pi) + \mathrm{i}n \left(\cosh(2\pi) - 1\right)}{2\pi(1+n^2)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

(3.c) Es gilt

$$\cosh(\pi) = f(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(2\pi) + \mathrm{i}n \left(\cosh(2\pi) - 1\right)}{2\pi(1+n^2)} (-1)^n$$

und damit

$$\begin{aligned} \cosh(\pi) = \operatorname{Re} \cosh(\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi(1+n^2)} (-1)^n = \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi(1+n^2)} (-1)^n \\ &= \frac{\sinh(2\pi)}{2\pi} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi \cosh(\pi)}{\sinh(2\pi)} - 1 \right) \approx -0.36399.$$

Aufgabe 4: Laplacetransformation [*16 Punkte*]

(4.a) [*4 Punkte*] Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, dass

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) = \frac{1}{s-a},$$

für alle $s \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re} s > a$.

(4.b) [*12 Punkte*] Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) &= \mathrm{e}^{-t}, \qquad t > 0, \\ \dot{y}(0) = 0, &\qquad y(0) = -1. \end{aligned}$$

Lösung. **(4.a)** Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{\mathrm{e}^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^R = \lim_{R\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{(a-s)R}-1}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, da in diesem Falle

$$\lim_{R\to\infty}\left|\mathrm{e}^{(a-s)R}\right| = \lim_{R\to\infty}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(a-s)R} = 0,$$

weil $\operatorname{Re}(a-s) = \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} s < 0$.

(4.b) Sei $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Laut dem Differentiationssatz aus der Vorlesung gilt

$$\mathcal{L}[\dot{y}](s) = s\mathcal{L}[y](s) - y(0) = sY(s) + 1$$

und

$$\mathcal{L}[\ddot{y}](s) = s\mathcal{L}[\dot{y}](s) - \dot{y}(0) = s^2Y(s) + s.$$

Mit diesen Berechnungen und mit der Aufgabestellung von Aufgabe (4.a), berechnen wir

$$s^2Y(s) + s + sY(s) + 1 - 2Y(s) = \frac{1}{s+1},$$

sodass

$$Y(s) = \frac{1-(s+1)^2}{(s+1)(s^2+s-2)} = \frac{-s^2-2s}{(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{-s}{(s+1)(s-1)}.$$

Wir benutzen nun die Partialbruchzerlegung

$$\frac{-s}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1},$$

welche

$$-s = A(s-1) + B(s+1)$$

impliziert. Wir lösen das lineare Gleichungssystem $A + B = -1$, $-A + B = 0$ durch $A = B = -1/2$. Damit folgt

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}.$$

Wir benutzen nun die Aufgabestellung von Aufgabe (4.a) ein weiteres Mal zusammen mit der Eindeutigkeit der Laplacetransformation (Satz von Lerch), um zu schliessen, dass

$$y(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} = -\cosh(t).$$