D-BAUG | Analysis I/II | Sommer 2015

Dr. Meike Akveld

Prüfungsaufgaben

1. **a)** [**5 Punkte**] Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q, so dass $z_1 = -2 + i$ eine Lösung der Gleichung

$$z^3 + pz^2 - 7z + q = 0$$

ist. Bestimmen Sie ebenfalls die weiteren Lösungen z_2 und z_3.

b) [**5 Punkte**] Sei k der Kreis durch die Punkte z_1, z_2 und z_3. Bestimmen Sie die Kreisgleichung von k in der Form

$$|z - z_0| = r.$$

Alternativ: Falls Sie die Punkte z_2 und z_3 nicht gefunden haben, verwenden Sie $z_2 = 2 + i$ und $z_3 = -3i$.

---

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte.

a) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{e^{5x} - 14e^x}{e^{2x} - 4}\,\mathrm{d}x,$$

b) [**3 Punkte**]

$$\int_0^2 x^3 e^x\,\mathrm{d}x,$$

c) [**3 Punkte**]

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-2}\right).$$

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie das Kurvenstück γ gegeben durch die Parameterdarstellung $r(t) = (\cos t, \sin(2t))$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen und denjenigen Punkt P auf γ mit der grössten y-Koordinate. Skizzieren Sie die Kurve.

b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve im Punkt P.

c) [**6 Punkte**] Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger Körper. Berechnen Sie das Trägheitsmoment dieses Körpers bezüglich der x-Achse (Dichte $\varrho = 1$).

Hinweis: Beschreiben Sie das Kurvenstück als Graph einer Funktion.

---

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, -1 Punkt, falls Ihre Antwort falsch ist, und 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-3}^{0}\int_{-2}^{-\frac{1}{3}y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\int_{-3}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-3}^{-\frac{1}{3}x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

b) Die Schnittmenge der Einheitssphäre S mit dem Vollkegel $K\colon z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$S \cap K = \left\{(r,\varphi,z) : z = \sqrt{1-r^2}, 0 \le r \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}.$$

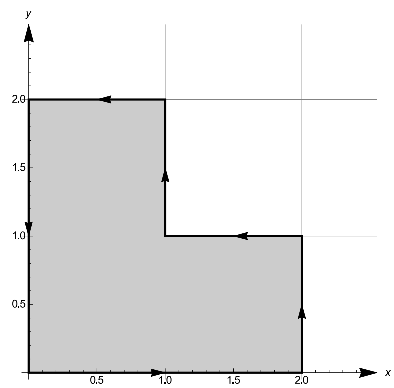
WAHR ☐ FALSCH ☐

Siehe nächstes Blatt!

c) Betrachten Sie die Vektorfelder

$$\mathbf{F}_1(x,y) = (y^2 x, yx^2 + \cos(y)) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x,y) = (y^2 x - y, yx^2 + \cos(y))$$

und die Kurve γ, welche den Rand der folgenden Figur im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.



(i) $\int_\gamma \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} \neq 0$

WAHR FALSCH
☐ ☐

(ii) $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 3$

WAHR FALSCH
☐ ☐

---

d) Es ist eine Fläche S gegeben durch die Parameterdarstellung $(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v)$. Die gleiche Fläche S sei auch durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen regulären Punkt P_0 auf der Fläche S; dabei sei $\vec{OP_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Dann gilt $\nabla f|_{P_0} = \lambda \cdot \mathbf{r}_u(u_0,v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ für eine reelle Zahl λ.

WAHR FALSCH
☐ ☐

Bitte wenden!

e) Die Differentialgleichung $y'(x)^2 + y(x)^4 = -1$ hat genau eine reelle Lösung.

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

f) Sei $y(x) = e^{3x} \cos x$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

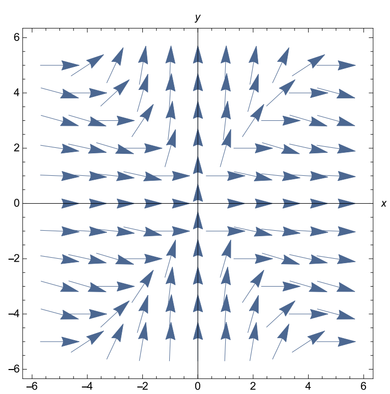
Dann muss $k = 9$ gelten.

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

g) Das folgende Bild zeigt das normierte Richtungsfeld von

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x^2\left(\frac{x^4}{9} - y^4\right), y^2\left(\frac{y^4}{9} - x^4\right)\right).$$



WAHR ☐ FALSCH ☐

Siehe nächstes Blatt!

h) Die folgende Differentialgleichung ist separierbar.

(i) $\frac{dy}{dx} = x + y$

WAHR FALSCH

☐ ☐

(ii) $\frac{dy}{dx} = xy + y$

WAHR FALSCH

☐ ☐

---

5. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie den Schwerpunkt der homogenen Fläche rechts von der Geraden $x = 2$, welche durch den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ begrenzt wird.

---

6. [**10 Punkte**] Gegeben seien die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1,\ z = 0 \right\}$$

und die Parabel

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{\sqrt{2}}{4} y^2,\ x = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen E und P.

---

7. [**10 Punkte**] Sei G das Gebiet im Innern des massiven Zylinders $x^2 + y^2 \leq 4$ zwischen der Ebene $z = 0$ und der Fläche $z = x^2 + y^2$. Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld gegeben durch $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, xy, z)$. Bestimmen Sie den Fluss von innen nach aussen von $\mathbf{F}$ durch den Rand von G.

Bitte wenden!

8. [**10 Punkte**] Ein Abhang wird durch den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = \left(16 - y^4\right) e^{-x}$$

beschrieben. Ein Bach kommt im Punkt $(7,2,0)$ ins Tal. Beschreiben Sie den Verlauf des Bachbetts als Funktion $x(y)$.

---

9. **a)** [**7 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} x^2 y'(x) + x y(x) = 1 & \text{für } x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

b) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie eine Approximation für $y(\frac{5}{4})$ auf zwei Dezimalstellen genau und begründen Sie, weshalb Ihr Resultat stimmt.