D-BAUG Analysis I/II Sommer 2015
Dr. Meike Akveld

Musterlösung

1. a) [**5 Punkte**] Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q, so dass $z_1 = -2 + i$ eine Lösung der Gleichung

$$z^3 + pz^2 - 7z + q = 0$$

ist. Bestimmen Sie ebenfalls die weiteren Lösungen z_2 und z_3.

Wir setzen z_1 in die Gleichung ein und erhalten

$$-2 + 11i + 3p - 4pi + 14 - 7i + q = 0.$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil bekommen wir nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 12 + 3p + q &= 0 \\ 4 - 4p &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $p = 1, q = -15$.

Offensichtlich ist $z_2 = \bar{z}_1 = -2 - i$ eine weitere Lösung.

Es gilt $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + 4z + 5$ und mit Polynomdivision erhalten wir

$$z^3 + z^2 - 7z - 15 = (z^2 + 4z + 5)(z - 3).$$

Somit ist die dritte Lösung $z_3 = 3$.

b) [**5 Punkte**] Sei k der Kreis durch die Punkte z_1, z_2 und z_3. Bestimmen Sie die Kreisgleichung von k in der Form

$$|z - z_0| = r.$$

Aus Symmetriegründen gilt $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Wir setzen z_1 und z_3 in die Kreisgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} (x_0 + 2)^2 + 1 &= r^2, \\ (x_0 - 3)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung folgt

$$10x_0 - 4 = 0$$

Bitte wenden!

und daher $x_0 = \frac{2}{5}$.

Für den Radius gilt $r = |x_0 - 3| = \frac{13}{5}$ und die gesuchte Gleichung lautet

$$|z - \tfrac{2}{5}| = \tfrac{13}{5}.$$

Alternativ: Falls Sie die Punkte z_2 und z_3 nicht gefunden haben, verwenden Sie $z_2 = 2 + i$ und $z_3 = -3i$.

Hier gilt aus Symmetriegründen $z_0 = iy_0 \in i\mathbb{R}$. Wir setzen wiederum z_1 und z_3 in die Kreisgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 2^2 + (y_0 - 1)^2 &= r^2, \\ (y_0 + 3)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung folgt

$$-8y_0 - 4 = 0$$

und daher $y_0 = -\frac{1}{2}$.

Für den Radius gilt $r = |y_0 + 3| = \frac{5}{2}$ und die gesuchte Gleichung lautet

$$|z + \tfrac{1}{2}i| = \tfrac{5}{2}.$$

---

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte.

a) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{e^{5x} - 14e^x}{e^{2x} - 4} \,\mathrm{d}x,$$

Wir substituieren zuerst mit $u = e^x$ und führen anschliessend eine Partialbruchzerlegung durch.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{5x} - 14e^x}{e^{2x} - 4} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{u^4 - 14}{u^2 - 4} \,\mathrm{d}u = \int u^2 + 4 + \frac{2}{u^2 - 4} \,\mathrm{d}u \\ &= \int u^2 \,\mathrm{d}u + \int 4 \,\mathrm{d}u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u - 2} \,\mathrm{d}u - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u + 2} \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^3}{3} + 4u + \frac{1}{2} \log(u - 2) - \frac{1}{2} \log(u + 2) + C \\ &= \frac{e^3x}{3} + 4e^x + \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right) + C. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) [3 Punkte]

$$\int_0^2 x^3 e^x \, \mathrm{d}x,$$

Durch dreifache partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^3 e^x \, \mathrm{d}x &= \left[x^3 e^x\right]_0^2 - \int_0^2 3x^2 e^x \, \mathrm{d}x \\
&= 8e^2 - \left[3x^2 e^x\right]_0^2 + \int_0^2 6x e^x \, \mathrm{d}x \\
&= 8e^2 - 12e^2 + [6xe^x]_0^2 - \int_0^2 6e^x \, \mathrm{d}x \\
&= 8e^2 - 12e^2 + 12e^2 - [6e^x]_0^2 = 2e^2 + 6.
\end{aligned}$$

c) [3 Punkte]

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-2}\right).$$

Wir erweitern mit $\left(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-2}\right)$ und bekommen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\frac{2x+5-2x+2}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{7}{\sqrt{2+\frac{5}{x}}+\sqrt{2-\frac{2}{x}}} \qquad = \frac{7}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

---

3. Betrachten Sie das Kurvenstück γ gegeben durch die Parameterdarstellung $r(t) = (\cos t, \sin(2t))$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

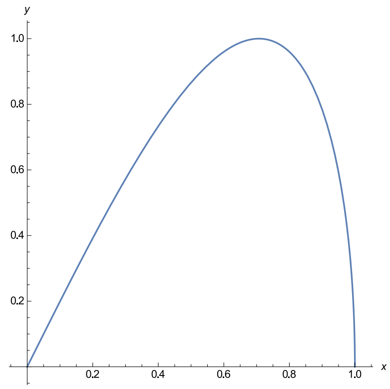
a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen und denjenigen Punkt P auf γ mit der grössten y-Koordinate. Skizzieren Sie die Kurve.

Für die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen gilt entweder $\cos t = 0$ oder $\sin(2t) = 0$, also $t \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, bzw. $S_1 = (0,0), S_2(1,0)$.

Im höchsten Punkt gilt $\dot{y}(t) = 2\cos(2t) = 0$, also $t = \frac{\pi}{4}$. Somit ist

$$P = r(\tfrac{\pi}{4}) = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1).$$

Bitte wenden!



b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve im Punkt P.

Die Krümmung ist gegeben durch

$$\kappa(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\dot{x}(\frac{\pi}{4})\ddot{y}(\frac{\pi}{4}) - \ddot{x}(\frac{\pi}{4})\dot{y}(\frac{\pi}{4})}{\left(\dot{x}^2(\frac{\pi}{4}) + \dot{y}^2(\frac{\pi}{4})\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}4 - 0}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0\right)^{\frac{3}{2}}} = 8.$$

c) [**6 Punkte**] Das Flächenstück zwischen der x-Achse und dem durch die Parameterdarstellung gegebenen Kurvenbogen wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelförmiger Körper. Berechnen Sie das Trägheitsmoment dieses Körpers bezüglich der x-Achse (Dichte $\varrho = 1$).

Hinweis: Beschreiben Sie das Kurvenstück als Graph einer Funktion.

Das Kurvenstück ist gegeben durch den Graph der Funktion

$$f(x) = y = \sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Foglich ist das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
\Theta_x &= \int_0^1 \int_0^{f(x)} y^2(2\pi y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 \frac{f^4(x)}{4}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\pi \int_0^1 x^4(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = 8\pi \int_0^1 x^8 - 2x^6 + x^4\,\mathrm{d}x \\
&= 8\pi \left[\frac{x^9}{9} - 2\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 8\pi \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right) \\
&= 8\pi \frac{35 - 90 + 63}{315} = \frac{64\pi}{315}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, -1 Punkt, falls Ihre Antwort falsch ist, und 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-3}^{0}\int_{-2}^{-\frac{1}{3}y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\int_{-3}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\int_{-3}^{-\frac{1}{3}x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

WAHR	FALSCH
☐	☒

---

b) Die Schnittmenge der Einheitssphäre S mit dem Vollkegel $K\colon z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$S \cap K = \left\{(r,\varphi,z) : z = \sqrt{1-r^2}, 0 \leq r \leq \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}.$$

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

c) Betrachten Sie die Vektorfelder

$$\mathbf{F}_1(x,y) = (y^2x, yx^2+\cos(y)) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x,y) = (y^2x-y, yx^2+\cos(y))$$

und die Kurve γ, welche den Rand der folgenden Figur im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

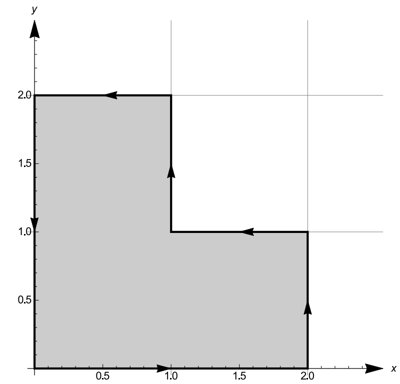
(i) $\int_\gamma \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} \neq 0$

WAHR	FALSCH
☐	☒

(ii) $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 3$

WAHR	FALSCH
☒	☐

Bitte wenden!



---

d) Es ist eine Fläche S gegeben durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$. Die gleiche Fläche S sei auch durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen regulären Punkt P_0 auf der Fläche S; dabei sei $\vec{OP_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Dann gilt $\nabla f|_{P_0} = \lambda \cdot \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ für eine reelle Zahl λ.

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

e) Die Differentialgleichung $y'(x)^2 + y(x)^4 = -1$ hat genau eine reelle Lösung.

WAHR	FALSCH
☐	☒

---

f) Sei $y(x) = e^{3x} \cos x$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

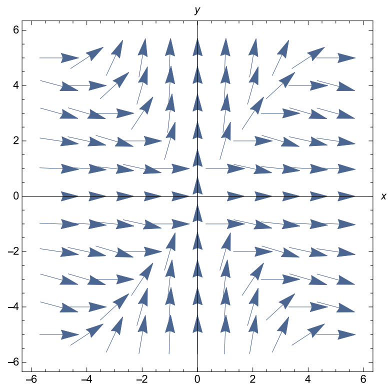
Dann muss $k = 9$ gelten.

WAHR	FALSCH
☐	☒

Siehe nächstes Blatt!

g) Das folgende Bild zeigt das normierte Richtungsfeld von

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(x^2\left(\frac{x^4}{9} - y^4\right), y^2\left(\frac{y^4}{9} - x^4\right)\right).$$



WAHR	FALSCH
☐	☒

---

h) Die folgende Differentialgleichung ist separierbar.

(i) $\frac{dy}{dx} = x + y$

WAHR	FALSCH
☐	☒

(ii) $\frac{dy}{dx} = xy + y$

WAHR	FALSCH
☒	☐

Bitte wenden!

5. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie den Schwerpunkt der homogenen Fläche rechts von der Geraden $x = 2$, welche durch den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ begrenzt wird.

Wir berechnen zuerst mit Hilfe der Substitution $x = 4 \sin t$ die Masse

$$\begin{aligned} m &= 2 \int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\, \mathrm{d}x = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 16 \cos^2 t \, \mathrm{d}t \\ &= 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\ \mathrm{d}t = 16 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{m} \int_2^4 2x\sqrt{16 - x^2} = \frac{1}{m} \left[-\frac{2}{3} \left(16 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{m} \frac{2}{3} (12)^{\frac{3}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Zudem gilt aus Symmetriegründen $y_S = 0$ und der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$S = \left(\frac{12\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}}, 0 \right).$$

---

6. [**10 Punkte**] Gegeben seien die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1,\ z = 0 \right\}$$

und die Parabel

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{\sqrt{2}}{4} y^2,\ x = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen E und P.

Siehe nächstes Blatt!

Variante 1

Wir parametrisieren zuerst die beiden Kurven:

$$\begin{aligned} e(s) &= (8\cos s, 4\sin s, 0), \\ p(t) &= (0, t, \frac{\sqrt{2}}{4}t^2). \end{aligned}$$

Nun minimieren wir den Abstand dieser beiden Kurven im Quadrat

$$f(s,t) = d(e(s), p(t))^2 = 64\cos^2 s + (t - 4\sin s)^2 + \frac{1}{8}t^4.$$

Bei einem Minimum gilt

$$\nabla f(s,t) = \begin{pmatrix} -128\cos s\sin s - 8(t - 4\sin s)\cos s \\ 2(t - 4\sin s) + \frac{1}{2}t^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Die erst Gleichung ist äquivalent zu $(12\sin s + t)\cos s = 0$.

Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1. $\cos s = 0$

Für $s = \frac{\pi}{2}$ folgt aus der zweiten Gleichung $t^3 + 4t - 16 = 0$ mit der einzigen reellen Lösung $t = 2$.

Für $s = \frac{3\pi}{2}$ folgt aus der zweiten Gleichung $t^3 + 4t + 16 = 0$ mit der einzigen reellen Lösung $t = -2$.

In beiden Fällen erhalten wir

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) = 6.$$

Fall 2. $\cos s \neq 0$

Aus der ersten Gleichung folgt $-4\sin s = \frac{t}{3}$. Setzen wir dies in der zweiten Gleichung ein, bekommen wir $t\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}t^2\right) = 0$ mit der einzigen reellen Lösung $t = 0$. Es folgt $\sin s = 0$, also $s \in \{0, \pi\}$. Es gilt

$$f(0,0) = f(\pi, 0) = 64 > 6.$$

Der Abstand zwischen E und P beträgt also $d(E,P) = \sqrt{6}$.

Bitte wenden!

Variante 2

Es seien $(x, y, 0)$ die Koordinaten eines Punktes in E und $(0, v, w)$ die Koordinaten eines Punktes in P. Ihr Abstand im Quadrat ist gegeben durch

$$f(x, y, v, w) = x^2 + (y - v)^2 + w^2.$$

Gesucht ist also das Minimum von f unter den beiden Nebenbedingungen

$$g(x, y, v, w) := x^2 + 4y^2 = 64.$$
$$h(x, y, v, w) := w - \frac{\sqrt{2}}{4} v^2 = 0.$$

Nach der Methode von Lagrange muss $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ gelten, also

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-v) \\ -2(y-v) \\ 2w \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten folgendes Gleichungssystem

$$(1 - \lambda)x = 0, \tag{1}$$
$$(1 - 4\lambda)y = v, \tag{2}$$
$$y = (1 + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\mu)v, \tag{3}$$
$$\mu = 2w, \tag{4}$$
$$x^2 + 4y^2 = 64, \tag{5}$$
$$w = \tfrac{\sqrt{2}}{4} v^2. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von (4) und (6) in (3) folgt

$$y = v + \tfrac{1}{4} v^3. \tag{7}$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch

Fall 1. $x = 0$

Mit (5) folgt $y = \pm 4$.

Für $y = 4$ erhalten wir aus (7) die Gleichung $\frac{1}{4}v^3 + v = 4$ mit der einzigen reellen Lösung $v = 2$. Weiter gilt $w = \sqrt{2}$ und $f(0, 4, 2, \sqrt{2}) = 6$.

Siehe nächstes Blatt!

Für $y = -4$ erhalten wir aus (7) die Gleichung $\frac{1}{4}v^3 + v = -4$ mit der einzigen reellen Lösung $v = -2$. Ebenfalls gilt $w = \sqrt{2}$ und $f(0, -4, -2, \sqrt{2}) = 6$.

Fall 2. $x \neq 0$

Aus (1) folgt $\lambda = 1$ und (2) liefert somit $y = -\frac{1}{3}v$. Eingesetzt in (7) erhalten wir

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3} + \frac{v^2}{4}\right)}_{\neq 0} v = 0$$

mit einziger reellen Lösung $v = 0$. Es folgt $y = w = 0$ und $x = \pm 8$ mit $f(\pm 8, 0, 0, 0) = 64 > 6$.

Der Abstand zwischen E und P beträgt also $d(E, P) = \sqrt{6}$.

---

7. [**10 Punkte**] Sei G das Gebiet im Innern des massiven Zylinders $x^2 + y^2 \leq 4$ zwischen der Ebene $z = 0$ und der Fläche $z = x^2 + y^2$. Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld gegeben durch $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, xy, z)$. Bestimmen Sie den Fluss von innen nach aussen von $\mathbf{F}$ durch den Rand von G.

Wir verwenden den Satz von Gauss. und Arbeiten in Zylinderkoordinaten. Es gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = x + 1$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial G} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{n} &= \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{A} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} (1 + r\cos\varphi) r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^2 r^3 \, \mathrm{d}r + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{=0} \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \frac{2^4}{4} = 8\pi.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

8. [**10 Punkte**] Ein Abhang wird durch den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = \left(16 - y^4\right) e^{-x}$$

beschrieben. Ein Bach kommt im Punkt $(7,2,0)$ ins Tal. Beschreiben Sie den Verlauf des Bachbetts als Funktion $x(y)$.

Der Bach fliesst jeweils in die Richtung des steilsten Gefälle. Also gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \lambda \nabla f(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} -(16-y^4)e^{-x} \\ -4y^3 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Folglich erhalten wir

$$x'(y) = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{16-y^4}{4y^3} = \frac{4}{y^3} - \frac{y}{4}.$$

Integration liefert

$$x(y) = -\frac{2}{y^2} - \frac{y^2}{8} + C.$$

Mit den Randbedingungen muss $7 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C$ und somit $C = 8$ gelten. Wir erhalten $x(y) = 8 - \frac{y^2}{8} - \frac{2}{y^2}$.

---

9. a) [**7 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} x^2 y'(x) + xy(x) = 1 & \text{für } x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Wir bestimmen zuerst die Lösung der homogenen Gleichung $y' + \frac{y}{x} = 0$.

Durch Separation erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x}, \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \\ \ln y &= -\ln x + \tilde{C}, \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir führen nun eine Variation der Konstanten durch. Der Ansatz $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ mit $y'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$ liefert $C'(x) = \frac{1}{x}$ und daher $C(x) = \ln x + C_0$. Mit der Nebenbedingung erhalten wir $1 = y(1) = C_0$ und somit

$$y(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

b) [**3 Punkte**] Bestimmen Sie eine Approximation für $y(\frac{5}{4})$ auf zwei Dezimalstellen genau und begründen Sie, weshalb Ihr Resultat stimmt.

Für die Approximation entwickeln wir $\ln x$ im Punkt $x_0 = 1$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} y(\tfrac{5}{4}) &= \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^3} - \dots\right) \\ &\approx 0.8 + 0.2 - 0.025 = 0.975 \approx 0.98. \end{aligned}$$

Da es sich um eine alternierende Summe einer monoton fallenden Folge handelt, liegt der Grenzwert immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilsummen. Da $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^3} = \frac{1}{240} < \frac{1}{200} = 0.005$ gilt, befindet sich $y(\frac{5}{4})$ im Intervall $[0.975, 0.98)$. Auf zwei Dezimalstellen gerundet erhalten wir also $y(\frac{5}{4}) \approx 0.98$.