D-BAUG | Analysis I/II | Sommer 2016

Dr. Meike Akveld
Dr. Cornelia Busch

Musterlösung

1. a) [**4 Punkte**] Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist $z = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot (5\sqrt{3} + bi)$ rein imaginär?

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2 \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6})\right) \cdot \left(5\sqrt{3} + bi\right) \\ &= 2 \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i\right) \cdot \left(5\sqrt{3} + bi\right) \\ &= 2 \cdot \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5\sqrt{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot bi + \tfrac{1}{2}i \cdot 5\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \cdot b\right) \\ &= 15 - b + \sqrt{3}\,(b+5)\,i \end{aligned}$$

und folglich

$$\operatorname{Re}(z) = 15 - b.$$

Somit gilt $\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow b = 15$.

b) [**4 Punkte**] Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im Inneren des ersten Quadranten. Betrachten Sie die beiden Terme $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{\overline{w}}\right)$ und $\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w})$. Bestimmen Sie jeweils das Vorzeichen des Ausdrucks oder erklären Sie, wieso dies nicht allgemein möglich ist.

Lösung: Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}z, \operatorname{Re}w, \operatorname{Im}z, \operatorname{Im}w > 0$ haben wir

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{zw}{\overline{w}w}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)\cdot\operatorname{Re}(w)}{|w|^2} > 0.$$

Das Vorzeichen von $\operatorname{Im}(z\overline{w})$ ist jedoch im Allgemeinen nicht klar. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left((1+i)\overline{(1+2i)}\right) &= -1 < 0 \\ \operatorname{Im}\left((1+i)\overline{(2+i)}\right) &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) [**2 Punkte**] Beweisen Sie:

$$\forall z \in \mathbb{C} \, : \, \arg(z \cdot \bar{z}) = 0.$$

Lösung: In Polarkoordinaten gilt $z = re^{i\varphi}$ und $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Somit folgt

$$z \cdot \bar{z} = r^2 e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2 e^{i0},$$

d.h. $\arg(z \cdot \bar{z}) = 0$.

---

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte:

a) [**3 Punkte**]

$$\int_0^e e^{x+e^x} \, \mathrm{d}x,$$

Lösung:

$$\int_0^e e^{x+e^x} \, dx = \int_0^e e^x e^{e^x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{e^x} \right]_0^e = e^{e^e} - e.$$

b) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x,$$

Lösung: Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch. Wegen

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx}{x^3 - x^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A + B + C &= 3, \\ -A - 2B + C &= -7, \\ -2A &= -2 \end{aligned}$$

und daher $(A, B, C) = (1, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x + \tfrac{8}{3} \int \frac{1}{x+1} \, \mathrm{d}x - \tfrac{2}{3} \int \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x \\ &= \ln(|x|) + \tfrac{8}{3} \ln(|x+1|) - \tfrac{2}{3} \ln(|x-2|) + C. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) **[3 Punkte]**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right).$$

Lösung: Durch zweimalige Anwendung von Bernoulli- de l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x-\ln(x+1)}^{\to 0}}{\underbrace{x\ln(x+1)}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{x+1}}^{\to 0}}{\underbrace{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}_{\to 0}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{1}{2}.$$

---

3. **[10 Punkte]** Für $\alpha>0$ sei das Gebiet

$$B_\alpha=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\le x\le 1 \text{ und } 0\le y\le x^\alpha\right\}$$

gegeben. Wird B_α um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V_x(\alpha)$. Wird B_α um die y-Achse rotiert, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V_y(\alpha)$. Man finde den Wertebereich der Funktion

$$\alpha\longmapsto\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)}\,.$$

Lösung: Für $f_\alpha(x):=x^\alpha$ ist

$$V_x(\alpha)=\pi\int_0^1 f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x^{2\alpha}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{2\alpha+1}\,.$$

Es gilt $V_x(\frac{1}{\alpha})+V_y(\alpha)=\pi$ (= Zylindervolumen). Somit ist

$$V_y(\alpha)=\pi-V_x\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\pi\left(1-\frac{1}{\frac{2}{\alpha}+1}\right)=\pi\,\frac{2}{2+\alpha}.$$

Alternativ kann man $V_y(\alpha)$ auch folgendermassen berechnen:

$$V_y(\alpha)=2\pi\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 x^{1+\alpha}\,\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{x^{2+\alpha}}{2+\alpha}\right]_0^1=\frac{2\pi}{2+\alpha}.$$

Bitte wenden!

Es ist
$$\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} = \frac{\alpha+2}{4\alpha+2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{4\alpha+2} > \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} = \frac{1}{4}\,.$$
Es ist
$$\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} = \frac{\alpha+2}{4\alpha+2} = 1 - \frac{3\alpha}{4\alpha+2} < 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} = 1\,.$$
Somit ist
$$\left\{ \frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} \;\middle|\; 0 < \alpha < \infty \right\} = \left(\frac{1}{4}\,,\,1\right).$$

Bemerkung: Anstelle der Ungleichungen $\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} > \frac{1}{4}$ und $\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)} < 1$ kann auch Monotonie gezeigt werden:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)}\right) = -\frac{6}{(4\alpha+2)^2} < 0.$$

---

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, −1 Punkt, falls Ihre Antwort falsch ist, und 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

a) Man befinde sich über dem Punkt $(x_0, y_0) := (1,1)$, auf dem Graphen der Funktion
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2y - xy^2 =: z\,. \end{aligned}$$
Bewegt man sich nun im Definitionsbereich in Richtung $\binom{1}{-1}$, so gewinnt man zunächst an Höhe z.

WAHR	FALSCH
☒	☐

Siehe nächstes Blatt!

b) Für $c \geq 0$ sind die Niveauflächen $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = c\}$ der Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - 2x + y^2 + 2y + \frac{z^2}{4} \end{array}$$

Ellipsoide.

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$. Dann ist die Ableitung der Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in einer Umgebung von x_0 durch $f(x, \varphi(x)) = 0$ und $\varphi(x_0) = y_0$ definiert ist, gegeben durch

$$\varphi'(x_0) = \frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}.$$

WAHR	FALSCH
☐	☒

---

d) Das Volumen V des endlichen Körpers, der von der Fläche

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - (x-1)^2 - y^2\}$$

und der (x,y)-Ebene begrenzt wird, ist in den Koordinaten (r, φ, z) gegeben durch

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2-1} r\, dz\, dr\, d\varphi\,,$$

wobei r und φ durch $x = r\cos\varphi - 1$ und $y = r\sin\varphi$ definiert sind.

WAHR	FALSCH
☐	☒

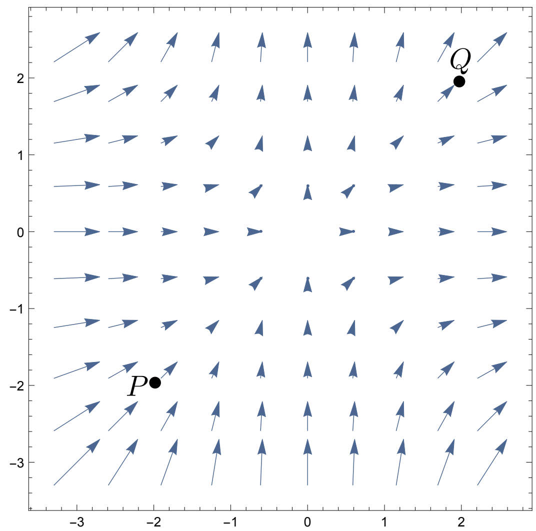
---

e) Eine homogene dünne Platte in der xy-Ebene die symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, hat bezüglich der x-Achse das Trägheitsmoment $\Theta_x = 0$.

WAHR	FALSCH
☐	☒

Bitte wenden!

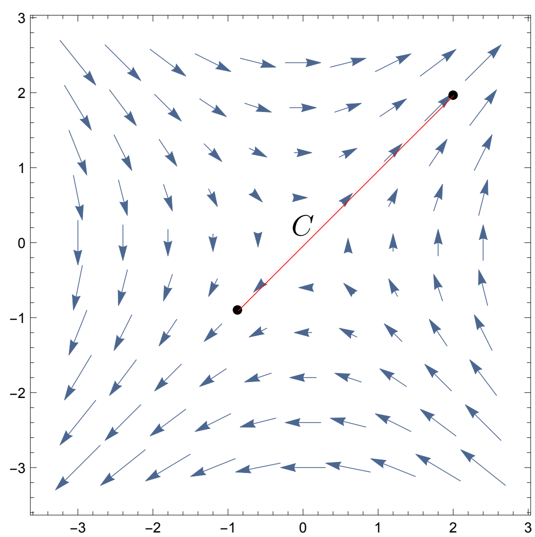
f) Betrache das folgende Vektorfeld. Es seien $P = (-2, -2)$ und $Q = (2, 2)$. So ist die Divergenz in P sowie in Q positiv.



WAHR	FALSCH
☐	☒

---

g) Es sei $\mathbf{F}$ das folgende punktsymmetrische Vektorfeld und C die Verbindungsstrecke von $(-1, -1)$ nach $(2, 2)$. So ist die Arbeit von $\mathbf{F}$ entlang C positiv.



WAHR	FALSCH
☒	☐

Siehe nächstes Blatt!

h) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\mathbf{F}(x, y) = (f(x), f(x)).$$

Dann gilt

$$\oint_c \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_c \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{n},$$

für jede geschlossene Kurve c.

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

i) Das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ and der Stelle $(3, 4)$ ist gegeben durch

$$T_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

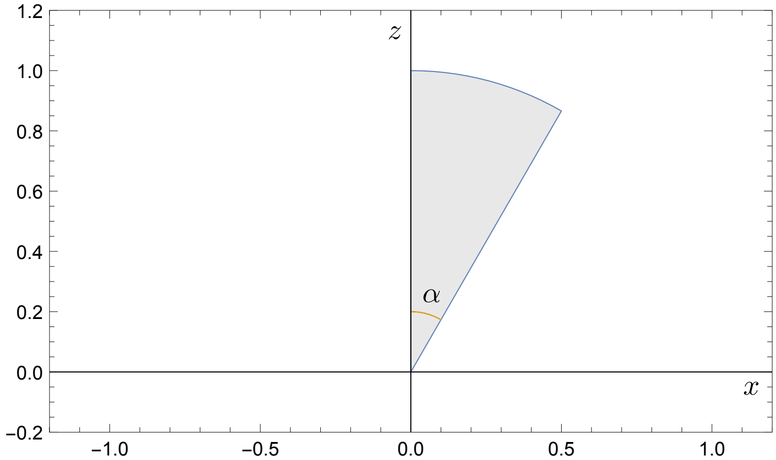
j) Die Subnormale einer stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ für den Wert x ist die Länge der Strecke vom Schnittpunkt $(x_N, 0)$ der Normalen im Punkt $(x, f(x))$ mit der x-Achse bis zum Punkt $(x, 0)$. Wenn die Subnormale konstant ist, so erfüllt die Funktion die folgende Differentialgleichung

$$f(x) \cdot f'(x) = \text{konstant}$$

WAHR	FALSCH
☒	☐

Bitte wenden!

5. **[10 Punkte]** Gegeben sei ein Cornet C, welches durch Rotation eines Kreissektors mit Radius $r = 1$ und Öffnungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ um die z-Achse entsteht (Dichte $\varrho = 1$). Berechnen Sie das Trägheitsmoment von C um die x-Achse.



Lösung: In Kugelkoordinaten ist das Cornet gegeben durch

$$C = \{(r, \varphi, \vartheta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}\}.$$

Für das Trägheitsmoment um die x-Achse gilt also

$$\begin{aligned}
\Theta_x &= \iiint_C \left(y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}V \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \vartheta + r^2 \cdot \cos^2 \vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 r^4 \, \mathrm{d}r \cdot \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \\
&= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot \left(\int_0^{2\pi} \tfrac{1-\cos 2\varphi}{2} \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos^2 \vartheta) \cdot \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 2\pi \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3} \right) + 2\pi \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{3} \right) \right) \\
&= \left(\frac{4}{15} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \pi.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

6. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (x+y)e^{xy}$$

auf dem Gebiet

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}.$$

Lösung: Wir suchen alle kritischen Punkte von f im Innern, auf den Randkurven und in den Eckpunkten.

(i) Für Punkte im Innern von D gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1+xy+y^2 \\ 1+x^2+xy \end{pmatrix} e^{xy} \neq \mathbf{0}.$$

Folglich gibt es dort keine kritischen Punkte.

(ii) Auf den beiden Achsen gilt $f(x,0) = x$, respektive $f(0,y) = y$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,0) = 1 \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0,y) = 1 \neq 0.$$

Es befinden sich also auch keine kritischen Punkte im Innern dieser beiden Randstücke.

(iii) Wir parametrisieren die Randkurve auf der Geraden $x+y=1$ durch $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, 1-t)$. Sei nun $g(t) := f \circ c(t) = e^{t(1-t)}$. Durch Ableiten erhalten wir den kritischen Punkt:

$$g'(t) = (1-2t)e^{t(1-t)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \tfrac{1}{2}.$$

Es gilt $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{4}}$.

(iv) Zum Schluss betrachten wir noch die Eckpunkte

$$f(0,0) = 0,$$
$$f(1,0) = 1,$$
$$f(0,1) = 1.$$

Das Minimum von f ist $f(0,0) = 0$ und das Maximum ist gegeben durch $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{4}}$.

Bitte wenden!

7. Gegeben sei das Vektrofeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xy} \\ xze^{xy} \\ e^{xy} \end{pmatrix}.$$

(a) [**5 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{F}$ durch die Fläche

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$$

mit Normalenvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: Der Fluss von $\mathbf{F}$ durch S ist

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} yze^{y} \\ ze^{y} \\ e^{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \left(\int_0^1 z \, \mathrm{d}z\right) \cdot \left(\int_0^1 ye^{y} \, \mathrm{d}y\right) \\
&= \left(\left[\tfrac{z^2}{2}\right]_0^1\right) \cdot \left([ye^{y}]_0^1 - \int_0^1 e^{y} \, \mathrm{d}y\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e - [e^{y}]_0^1\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e - e + 1\right) = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) [**5 Punkte**] Betrachten Sie die Spirale $\mathbf{r}\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Arbeit von $\mathbf{F}$ entlang $\mathbf{r}$.

Lösung: Es gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} xe^{xy} - xe^{xy} \\ ye^{xy} - ye^{xy} \\ ze^{xy} + xyze^{xy} - (ze^{xy} + xyze^{xy}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Daher ist das Vektorfeld konservativ und besitzt daher ein Potential, z.B.

$$f(x,y,z) = ze^{xy}.$$

Folglich gilt

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = f(\mathbf{r}(2)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(2,0,2) - f(0,0,0) = 2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Bemerkung: Alternativ können wir die Arbeit auch direkt berechnen:

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^2 \begin{pmatrix} t^2 \sin(2\pi t) e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \\ t^2 \cos(2\pi t) e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \\ e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - 2\pi t \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) + 2\pi t \cos(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^2 \left(2t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t) - 2\pi t^3 \sin^2(2\pi t) + 2\pi t^3 \cos^2(2\pi t) + 1\right) e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^2 t \left[e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}\right]' \mathrm{d}t + \int_0^2 e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \, \mathrm{d}t$$

$$= \left[t e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \, \mathrm{d}t + \int_0^2 e^{t^2 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)} \, \mathrm{d}t = 2.$$

---

8. [**10 Punkte**] Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = x + 1\,.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der homogenen DGL ist

$$Q(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1\,.$$

Man sieht leicht, dass -1 eine Nullstelle von $Q(\lambda)$ ist. Es ist also

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}\,,$$

bzw.

$$\lambda \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}},\, e^{-i\frac{\pi}{3}},\, e^{i\frac{4\pi}{3}},\, e^{-i\frac{4\pi}{3}} \right\}\,.$$

Daraus erhält man die Nullstellen

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \lambda_{4,5} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_{hom} = C_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Bitte wenden!

Der Ansatz y_p für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist $y_p(x) = Ax$. Mit $y_p'(x) = A$ und $y_p''(x) = \ldots = y^{(5)}(x) = 0$ folgt $A = 1$. Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{hom}(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &\qquad + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $(\lambda - 1)Q(\lambda) = \lambda^6 - 1$. Dieses Polynom hat 6 verschiedene Nullstellen $e^{ik\frac{\pi}{3}}$, $k = 0, 1, \ldots 5$. Daher hat das Polynom $Q(\lambda)$ die 5 verschiedenen Nullstellen $e^{ik\frac{\pi}{3}}$, $k = 1, \ldots 5$.

---

9. **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die durch den Punkt $(x_0, y_0) := (0, 2)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y'(1 + \cos^2 x) + y \sin(2x) = (1 + \cos^2 x)^2\,.$$

Lösung: Die homogene DGL

$$y'(1 + \cos^2 x) = -y \sin(2x)$$

ist separierbar. Es ist

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{-\sin(2x)}{1 + \cos^2 x}\,.$$

Wir verwenden

$$-\sin(2x) = -2\sin x \cos x = \frac{d}{dx}(1 + \cos^2 x)$$

und erhalten

$$\ln \pm y = \ln(1 + \cos^2 x) + C$$

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(x) = D(1 + \cos^2 x)\,,$$

wobei $D = \pm e^C$.

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden wir durch Variation der Konstanten. Der Ansatz ist

$$y_p = D(x)(1 + \cos^2 x)\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann ist

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= D'(x)(1+\cos^2 x) + D(x)(-2\sin x\cos x) \\ &= D'(x)(1+\cos^2 x) - D(x)(\sin(2x)) \end{aligned}$$

Dies wird in die Differentialgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} D'(x)(1+\cos^2 x)^2 - D(x)(\sin(2x))(1+\cos^2 x) + D(x)(1+\cos^2 x)\sin(2x) \\ = (1+\cos^2 x)^2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$D'(x)(1+\cos^2 x)^2 = (1+\cos^2 x)^2$$

also $D'(x) = 1$ und $D(x) = x$. (Die Konstante braucht man nicht, da man eine partikuläre Lösung möchte.) Es ist also

$$y_p(x) = x(1+\cos^2 x)\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist hiermit

$$y(x) = (D+x)(1+\cos^2 x)\,.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2 = 2D$ erhalten wir $D = 1$ und somit

$$y(x) = (1+x)(1+\cos^2 x)\,.$$