ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Sommer 2009
Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten, 60 Punkte
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten, 30 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 20 A4-Seiten selbst verfasste Zusammenfassung (für Semesterkurs Analysis II: 10 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. **a)** (**3 Punkte**) Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{z - 3i - 3}{z + 2 + 4i} = i$ und stellen Sie das Resultat in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

b) (**3 Punkte**) Skizzieren Sie die Teilmenge M der komplexen Zahlenebene:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\,\mathrm{Re}(z) \right\}$$

2. **a)** (**4 Punkte**) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in der Umgebung von $x_0 = 1$ durch das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$. Wie gross ist der absolute Fehler von $T_2(x)$ an der Stelle $x = \frac{9}{4}$?

b) (**2 Punkte**) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

3. (**5+1 Punkte**) Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0, 0)$ aus mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven x-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$x(t) = v\cos(\varphi)\,t$$
$$y(t) = v\sin(\varphi)\,t - 5t^2$$

Bitte wenden!

a) Wie muss der Winkel φ bei vorgegebenem v gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der x-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 100$ ist?

4. (**1.5+2.5+2 Punkte**) Bestimmen Sie ohne Verwendung von Tabellen:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}} \arctan\sqrt{t}\,dt$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

5. (**6 Punkte**) Bestimmen Sie die Lösung von

$$y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 15\,e^{2x}$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3,\ \ y''(0) = 2.$

6. (**6 Punkte**) Bestimmen Sie für $f(x,y,z) = y(z+x)$ die globalen Maxima und Minima auf der Schnittmenge von $y^2 + z^2 = 1$ und $xy = 1$.

7. (**6 Punkte**) Zeigen Sie: Schneidet man die Tangentialebenen an die Fläche, welche durch $xyz = c^3$ gegeben ist, mit den Koordinatenachsen, so ist das Produkt der Schnittpunktkoordinaten stets dasselbe.

8. (**6 Punkte**) Bestimmen Sie das endliche Volumen, welches im ersten Oktanten durch den Zylinder $x^2 + z^2 = 4$ und die Ebene $x = y$ begrenzt wird.

9. (**6 Punkte**) Bestimmen Sie $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ für $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2yz, yz^2, z^3e^{xy})$ und

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5 \text{ und } z \geq 1\right\},$$

wobei die Fläche S nach oben orientiert sein soll.

10. (**6 Punkte**) Lösen Sie die Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

im Quadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 3\sin(\pi y), \qquad & u(x,0) &= 0, \\ u(1,y) &= 0, & u(x,1) &= 0. \end{aligned}$$