ETH Zürich, Basisprüfung

Analysis I/II D-BAUG Sommer 2010

Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten, 60 Punkte
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten, 30 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für Semesterkurs Analysis II: 15 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. (a) **(4 Punkte)** Lösen Sie $(z+2(1+i)^5)^2 = 2i$. Stellen Sie die Lösungen in der Form $x + iy$ dar.

(b) **(2 Punkte)** Skizzieren Sie die Teilmenge M der komplexen Zahlenebene:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq |z| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \text{ Im } z + \text{ Re } z > 0 \right\}$$

2. (a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

(b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom der Funktion

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$$

zum Punkt $x_0 = 0$.

Bitte wenden!

3. (2 + 2.5+ 1.5 Punkte) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\textbf{a)} \int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx \qquad \textbf{b)} \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx \qquad \textbf{c)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2^{\sin x}\cos x\,dx$$

4. (6 Punkte) Ein Behälter bestehend aus Mantel, Deckel und Boden für radioaktiven Abfall besteht aus einem inneren und einem äusseren Zylinder, wobei der 6 cm dicke Zwischenraum mit Blei gefüllt sein soll. Das Volumen des äuseren Zylinders ist 11664π cm^3.
Bestimmen Sie den Radius und die Höhe des inneren Zylinders wenn die Kapazität für die Speicherung maximal ist.

5. (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) &= 2x^2 \\ y(0) &= 5 \\ y'(0) &= 12 \\ y''(0) &= 2 \end{cases} .$$

6. (3 + 3 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$F_a(x,y) = a\,(x+y) - x^2 + 2y\arctan y - \ln\left(y^2+1\right)$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat F_a keine kritischen Punkte.

(b) Die Gleichung $F_4(x,y) = 0$ bestimmt eine Kurve in $\mathbb{R}^2$, die lokal aufgefasst werden kann als Graph einer Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie $y'(2)$.

7. (6 Punkte) Betrachten Sie die Temperaturfunktion $T(x,y,z) = 400x\,y\,z^2$.
Bestimmen Sie die Maximal- und Minimaltemperatur auf der Oberfläche der Einheitskugel $x^2+y^2+z^2 = 1$ und geben Sie an, wo diese erreicht wird.

8. (6 Punkte) Berechnen Sie das Volumen oberhalb der Ellipse

$$E = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+4y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$$

und unterhalb der Fläche $z = 1 - x^2$.

Siehe nächstes Blatt!

9. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}x^3 - xz\,,\, xy + yz\,,\, y^2z - xz\right)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels mit Spitze in $(0,0,2)$ und Grundfläche

$$\{(x,y,z) \,|\, z = 0\,,\, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

10. (6 Punkte) Sei $u(x,t)$ die Temperatur in einem isolierten Stab der Länge L. Der Stab liegt zuerst in einem 100°C warmen Wasserbad. Zur Zeit $t = 0$ wird ein Ende in Eiswasser getaucht. Wir haben dann das folgende Problem

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) &= 0°C \\ u(L,t) &= 100°C \\ u(x,0) &= 100°C \end{cases}$$

Hierbei ist $k = \frac{K}{c\,\varrho}$ eine gegebene Konstante.

(a) Bestimmen Sie eine stationäre Lösung $u^*(x)$, die die Randbedingung erfüllt.

(b) Lösen Sie $(*)$.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = u^*(x) + v(x,t)$, bestimmen Sie das entsprechende Problem für $v(x,t)$ und lösen Sie dieses zuerst.