ETH Zürich, Basisprüfung

Analysis I/II D-BAUG Sommer 2011

Dr. Cornelia Busch / Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten, 60 Punkte
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten, 30 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für Semesterkurs Analysis II: 15 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. a) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

i) $(5+i)\overline{(4+2i)}$ ii) $5e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) Für welche komplexen Zahlen z wird der Ausdruck

$$\frac{z^2+9}{z+1}$$

reell? Man skizziere diese Zahlenmenge in der komplexen Ebene.

2. Berechnen Sie:

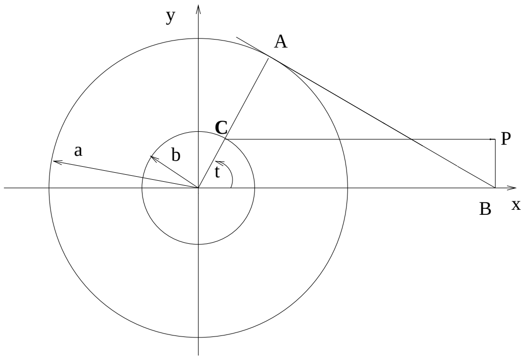
a) $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2\right)$ b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n+2}$ Hinweis: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$

c) Benutzen Sie a) und b) um den folgenden Grenzwert zu berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2k}$$

Bitte wenden!

3. Gegeben sind die reellen Zahlen $a > b > 0$. Der Punkt $P(t)$ ist definiert in abhängigkeit vom Winkel t (siehe Abbildung). Dabei ist die y- Koordinate von $P(t)$ gleich der y- Koordinate des entsprechenden Punktes C auf dem kleinen Kreis. Die x- Koordinate erhält man indem man die Tangente am ensprechenden Punkt auf dem grösseren Kreis mit der x- Achse schneidet. Bestimmen Sie die Parametriesierung $P(t)$, eliminieren Sie dann den Parameter t aus den Gleichungen und bestimmen Sie die Kurvengleichung. Skizzieren Sie diese Kurve.



4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \arctan 3x\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx$

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} xy'(x) + (1+x)y(x) &= e^{-x}, \\ y(-1) &= e \end{aligned}$$

6. Gegeben sei das Ellipsoid

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Von einem beliebigen Punkt P von E geht man nun senkrecht zur (x, y)-Ebene zum Punkt P' auf E. Von P' geht man dann senkrecht zur (x, z)-Ebene zu P'' auf E und von dort noch senkrecht zur (y, z)-Ebene nach P''' auf E. Wie lang kann die Verbindung $PP'P''P'''$ höchstens werden?

Siehe nächstes Blatt!

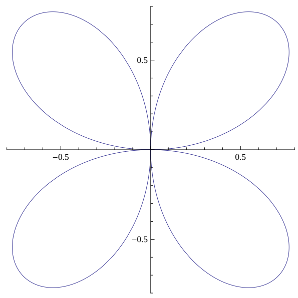
7. Ein nach Hitze strebendes Teilchen hat die Eigenschaft, dass es sich in jedem Punkt (x, y) der Ebene in Richtung des maximalen Temperaturanstiegs bewegt. Die Temperatur im Punkt (x, y) sei gegeben durch die Funktion $T(x, y) = -e^{-2y} \cos x$. Bestimmen Sie eine Gleichung $y = f(x)$ für den Weg eines nach Hitze strebenden Teilchens, welches im Punkt $(\frac{\pi}{4}, 0)$ startet.

8. Betrachten Sie für ein Gebiet E im Raum und einen Punkt (x, y, z) in E das dreifache Integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, welches in sphärischen Koordinaten als das iterierte Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^3 r^2 \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

geschrieben werden kann. Geben Sie die Funktion $f(x, y, z)$ explizit an. Beschreiben (oder skizzieren) Sie den Integrationsbereich E. Berechnen Sie das Integral I, und geben Sie an, was es darstellt.

9. Bestimmen Sie die Arbeit des Vektorfeldes $\vec{F} = (\cos y + 2\ln x, \ln x + y^3 - x \sin y)$ entlang des Blütenblattes im ersten Quadranten. Das Blütenblatt ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = \sin(2\phi)$.



10. Bestimme eine Lösung $u(x, t)$ des folgenden Randwertprobems mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\begin{cases} u_{xx} & = u_t - 4u \quad \text{für } 0 < x < \pi \text{ und } 0 < t \\ u_x(0, t) & = 0 \\ u_x(\pi, t) & = 0 \\ u(x, 0) & = \cos^2 x \end{cases}$$