D-BAUG | Analysis I und II | Sommer 2013
M. Akveld | | T. Bühler

1. **a)** Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -9 + 9\sqrt{3}i$$

und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.

b) Bestimmen und skizzieren Sie den Bereich M in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$

$$M := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 1 - 2i| \leq |z - 4 + i| \wedge \mathrm{Re}(z) < 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0\}\,.$$

2. Die Bewegung eines Teilchens wird durch folgende parametrisierte Kurve beschrieben, wobei $t \in \mathbb{R}$ als Zeit aufzufassen ist:

$$\alpha(t) = (3\cosh t, 2\sinh t).$$

a) Bestimmen Sie die kartesische Gleichung der Kurve (d.h. in x und in y) und bestimmen Sie die Steigung ihrer Asymptoten für $t \to \pm\infty$.

b) Was ist die minimale Geschwindigkeit des Teilchens und wo wird diese angenommen?

c) Bestimmen Sie die maximale Krümmung der Bahn dieser Kurve. Wo wird diese angenommen? Zeichnen Sie an dieser Stelle den Krümmungskreis ein.

d) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Krümmung für $t \to \pm\infty$.

Bemerkung: Sie dürfen die Identität $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ohne Beweis verwenden.

3. Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x(x+1)^{40}\,\mathrm{d}x$

4. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) = 8$$

für $x > 0$ mit der Nebenbedingung $y(1) = 4$.

5. a) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert, weil

- ◯ sie streng monoton wachsend und von oben durch 3 beschränkt ist.
- ◯ sie streng monoton wachsend und von unten durch 2 beschränkt ist.
- ◯ sie streng monoton fallend und von oben durch 3 beschränkt ist.
- ◯ sie streng monoton fallend und von unten durch 2 beschränkt ist.

b) Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

- ◯ Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind; daher divergiert die Reihe.
- ◯ Bei jedem Schritt addiert man weniger dazu als beim vorangegangenen; daher konvergiert die Reihe.
- ◯ Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton; daher konvergiert die Reihe.
- ◯ Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert; daher konvergiert die Reihe absolut.

c) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{n} x^{3n}$ beträgt

- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{2}$.
- ◯ $\frac{1}{8}$.
- ◯ 2.
- ◯ 8.
- ◯ ∞.

d) Der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{n} x^{3n}$ ist

- ◯ $\mathbb{R}$.
- ◯ $(-\varrho, \varrho)$ für ein $\varrho < \infty$.
- ◯ $[-\varrho, \varrho)$ für ein $\varrho < \infty$.
- ◯ $[-\varrho, \varrho]$ für ein $\varrho < \infty$.
- ◯ $(-\varrho, \varrho]$ für ein $\varrho < \infty$.

e) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(-2)^k x^k$ in ihrem Konvergenzbereich dar?

- ◯ $(1 + 2x)^{-1}$
- ◯ $(1 - 2x)^{-1}$
- ◯ $-2 \cdot (1 + x)^{-2}$
- ◯ $-2x \cdot (1 + 2x)^{-2}$
- ◯ $-2x \cdot (1 - 2x)^{-2}$

6. Berechne Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y,z) = x+y-z$ auf der Menge

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 = 1,\ 4x = 3z\}.$$

7. Seien $K(x,y,z) = (x,y,z)$ und F die Fläche

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

und n der vom Ursprung wegzeigende Normalenvektor von F.

Berechne

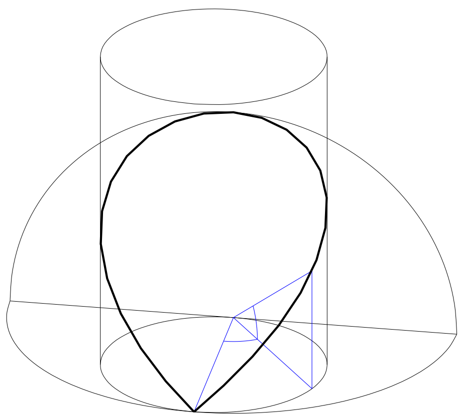
$$\int_F \operatorname{rot} K \cdot n \, \mathrm{d}o$$

a) direkt.

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

8. Das Viviani-Fenster ist der Durchschnitt der Oberfläche der oberen Halbkugel $x^2+y^2+z^2 = 4r^2$, $z \geq 0$ mit dem Vollzylinder $(x-r)^2+y^2 \leq r^2$, wobei $r > 0$.

Berechne die Fläche des Viviani-Fensters.



9. Bestimme mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$ die Eigenwerte λ_{kl} und Eigenfunktionen u_{kl} des Eigenwertproblems

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

auf dem Rechteck $G = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ mit Dirichlet-Randbedingungen $u = 0$ auf ∂G.

10. Volumen des Bizylinders.

Der Bizylinder D ist der Durchschnitt der beiden Vollzylinder $x^2 + z^2 \leq 1$ und $y^2 + z^2 \leq 1$, also

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

a) Die horizontalen Schnitte D_z, $-1 < z < 1$, haben alle dieselbe Form. Welche?

- ◯ Kreis
- ◯ Quadrat
- ◯ Kreuz

b) Die Fläche $|D_z|$ des horizontalen Schnitts D_z ist für $-1 < z < 1$:

- ◯ $|D_z| = \pi(1 - z^2)$
- ◯ $|D_z| = \pi(1 - z)^2$
- ◯ $|D_z| = 4(1 - z^2)$
- ◯ $|D_z| = 2(1 - z)^2$

c) Das Volumen des Bizylinders D ist:

- ◯ $|D| = \frac{4\pi}{3}$
- ◯ $|D| = \frac{8\pi}{3}$
- ◯ $|D| = \frac{16}{3}$
- ◯ $|D| = 4$