D-BAUG | Analysis I/II | Sommer 2016
Dr. Meike Akveld
Dr. Cornelia Busch

Prüfungsaufgaben

1. **a)** [**4 Punkte**] Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist $z = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot (5\sqrt{3} + bi)$ rein imaginär?

b) [**4 Punkte**] Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im Inneren des ersten Quadranten. Betrachten Sie die beiden Terme $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{w}}\right)$ und $\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w})$. Bestimmen Sie jeweils das Vorzeichen des Ausdrucks oder erklären Sie, wieso dies nicht allgemein möglich ist.

c) [**2 Punkte**] Beweisen Sie: $\forall z \in \mathbb{C} : \arg(z \cdot \bar{z}) = 0$.

---

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte:

a) [**3 Punkte**]

$$\int_0^e e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x,$$

b) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\,\mathrm{d}x,$$

c) [**3 Punkte**]

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

---

3. [**10 Punkte**] Für $\alpha > 0$ sei das Gebiet

$$B_\alpha = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq x^\alpha \right\}$$

gegeben. Wird B_α um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V_x(\alpha)$. Wird B_α um die y-Achse rotiert, so entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V_y(\alpha)$. Man finde den Wertebereich der Funktion

$$\alpha \longmapsto \frac{V_x(\alpha)}{V_y(\alpha)}.$$

Bitte wenden!

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, −1 Punkt, falls Ihre Antwort falsch ist, und 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

a) Man befinde sich über dem Punkt $(x_0, y_0) := (1, 1)$, auf dem Graphen der Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2y - xy^2 =: z\,. \end{array}$$

Bewegt man sich nun im Definitionsbereich in Richtung $\binom{1}{-1}$, so gewinnt man zunächst an Höhe z.

WAHR FALSCH
☐ ☐

---

b) Für $c \geq 0$ sind die Niveauflächen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ der Funktion

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2 - 2x + y^2 + 2y + \frac{z^2}{4} \end{array}$$

Ellipsoide.

WAHR FALSCH
☐ ☐

---

c) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$. Dann ist die Ableitung der Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in einer Umgebung von x_0 durch $f(x, \varphi(x)) = 0$ und $\varphi(x_0) = y_0$ definiert ist, gegeben durch

$$\varphi'(x_0) = \frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}.$$

WAHR FALSCH
☐ ☐

Siehe nächstes Blatt!

d) Das Volumen V des endlichen Körpers, der von der Fläche

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - (x-1)^2 - y^2\}$$

und der (x, y)-Ebene begrenzt wird, ist in den Koordinaten (r, φ, z) gegeben durch

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2-1} r \, dz \, dr \, d\varphi \,,$$

wobei r und φ durch $x = r\cos\varphi - 1$ und $y = r\sin\varphi$ definiert sind.

WAHR FALSCH
☐ ☐

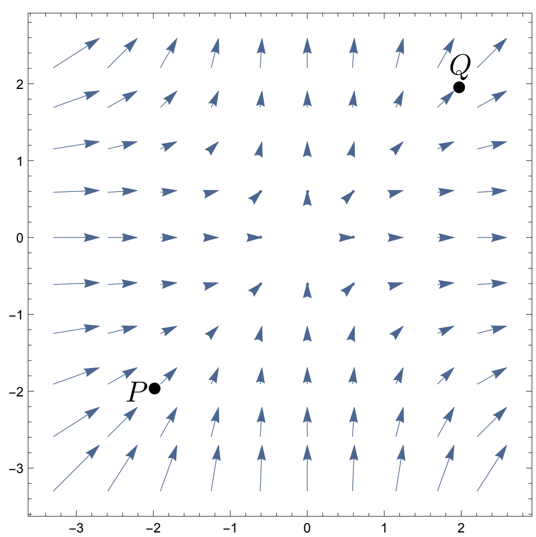
---

e) Eine homogene dünne Platte in der xy-Ebene die symmetrisch bezüglich der x-Achse ist, hat bezüglich der x-Achse das Trägheitsmoment $\Theta_x = 0$.

WAHR FALSCH
☐ ☐

---

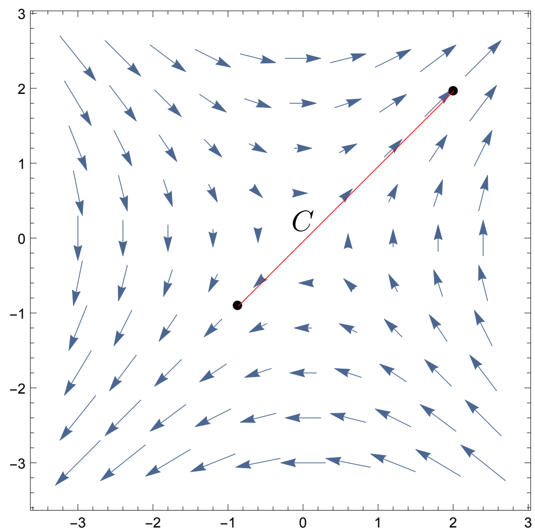
f) Betrache das folgende Vektorfeld. Es seien $P = (-2, -2)$ und $Q = (2, 2)$. So ist die Divergenz in P sowie in Q positiv.



WAHR FALSCH
☐ ☐

Bitte wenden!

g) Es sei $\mathbf{F}$ das folgende punktsymmetrische Vektorfeld und C die Verbindungsstrecke von $(-1,-1)$ nach $(2,2)$. So ist die Arbeit von $\mathbf{F}$ entlang C positiv.



WAHR FALSCH

☐ ☐

---

h) Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\mathbf{F}(x,y) = (f(x), f(x)).$$

Dann gilt

$$\oint_c \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_c \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{n},$$

für jede geschlossene Kurve c.

WAHR FALSCH

☐ ☐

---

i) Das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ and der Stelle $(3,4)$ ist gegeben durch

$$T_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

WAHR FALSCH

☐ ☐

Siehe nächstes Blatt!

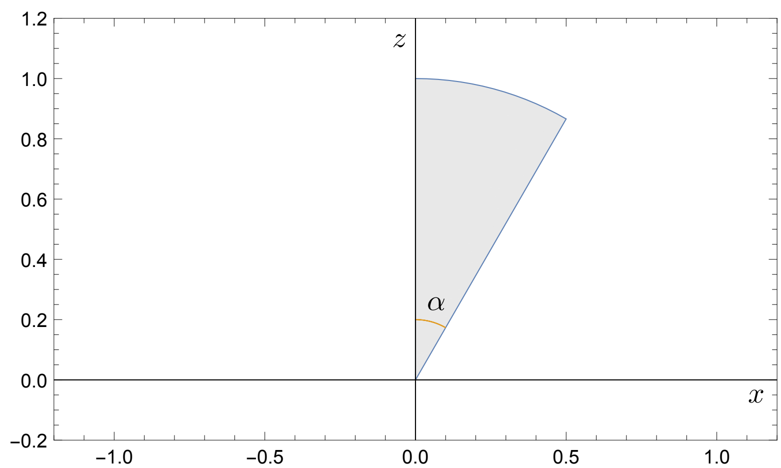
j) Die Subnormale einer stetig differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ für den Wert x ist die Länge der Strecke vom Schnittpunkt $(x_N, 0)$ der Normalen im Punkt $(x, f(x))$ mit der x-Achse bis zum Punkt $(x, 0)$. Wenn die Subnormale konstant ist, so erfüllt die Funktion die folgende Differentialgleichung

$$f(x) \cdot f'(x) = \text{konstant}$$

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

5. [10 Punkte] Gegeben sei ein Cornet C, welches durch Rotation eines Kreissektors mit Radius $r = 1$ und Öffnungswinkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ um die z-Achse entsteht (Dichte $\varrho = 1$). Berechnen Sie das Trägheitsmoment von C um die x-Achse.



---

6. [10 Punkte] Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (x + y)e^{xy}$$

auf dem Gebiet

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}.$$

Bitte wenden!

7. Gegeben sei das Vektrofeld $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xy} \\ xze^{xy} \\ e^{xy} \end{pmatrix}.$$

(a) **[5 Punkte]** Berechnen Sie den Fluss von **F** durch die Fläche

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$$

mit Normalenvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) **[5 Punkte]** Betrachten Sie die Spirale $\mathbf{r}\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Arbeit von **F** entlang **r**.

---

8. **[10 Punkte]** Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = x + 1\,.$$

---

9. **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die durch den Punkt $(x_0, y_0) := (0,2)$ gehende Lösung der Differentialgleichung

$$y'(1+\cos^2 x) + y\sin(2x) = (1+\cos^2 x)^2\,.$$