D-BAUG | Analysis I/II | Winter 2015

Dr. Meike Akveld

Prüfungsaufgaben

1. [**10 Punkte**] Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{|z|^2}{2} \leq 1 + \operatorname{Im}(z) \right\}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

b) Bestimmen Sie $(1+i)e^{\frac{3\pi i}{4}}$ und die Nullstellen des Polynoms $z^2 + z + \frac{1}{2}$ in Normal- und Polarform.

c) Welche dieser komplexen Zahlen befinden sich in B?

2. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\tan(x^2)}$

3. [**10 Punkte**] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) \cdot x^2 - 3y(x) = 3e^{-3/x}, \quad y(3) = 0.$$

Bitte wenden!

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, -1 falls Ihre Antwort falsch ist und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = y^2 - (x^2 + z^2)$. Die Niveauflächen von f sind Paraboloiden mit Scheitel auf der y-Achse.

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

b) Das Dreifachintegral einer Funktion f über dem Gebiet

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq z \leq -2x + 4,\ -3 \leq y \leq 0\right\}$$

kann geschrieben werden als

$$\int_0^{-2x+4} \int_0^2 \int_{-3}^0 f(x, y, z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z.$$

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

c) Die Mengen $\left\{(r, \varphi, z) \,|\, r = \frac{\sqrt{3}}{3} z\right\}$ und $\{(r, \varphi, \vartheta) \,|\, \vartheta = \pi/4\}$ stimmen überein. Dabei ist die erste Menge in Zylinderkoordinaten notiert und die zweite Menge in Kugelkoordinaten.

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

d) Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (y, x)$ hat keine Zirkulation entlang und keinen Fluss durch den Einheitskreis.

WAHR	FALSCH
☐	☐

Siehe nächstes Blatt!

e) Wenn ein Vektorfeld auf einem Gebiet (welches die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt) positive zwei-dimensionale Rotation hat, so ist die Zirkulation (im Gegenuhrzeigersinn) entlang des Randes von diesem Gebiet ebenfalls positiv.

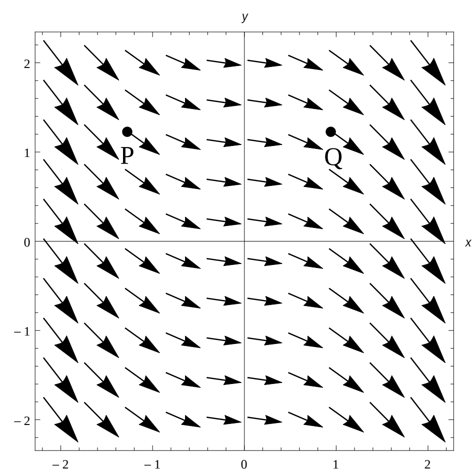
WAHR FALSCH
☐ ☐

---

f) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

WAHR FALSCH
☐ ☐

Die nächste Aufgabe bezieht sich auf die folgende Abbildung eines zwei-dimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{F}$ und die eingezeichneten Punkte P und Q:



g) Es gilt für die zwei-dimensionale Rotation $\operatorname{rot} \mathbf{F}|_P > 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{F}|_Q < 0$.

WAHR FALSCH
☐ ☐

---

h) Für jedes zwei-dimensionale Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y)$ gilt

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}(2x, 2y)) = 4 \cdot \operatorname{div}(\mathbf{F}(x, y)).$$

WAHR FALSCH
☐ ☐

Bitte wenden!

i) Wird die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch $f(x) = x^3$ definierte Funktion periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt, so gilt für ihre Fourierreihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

dass $a_n = 0$, für alle $n \geq 0$.

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

j) Seien $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$u_x \cdot u_y = 1.$$

Dann ist die Funktion $u_1 \cdot u_2$ im Allgemeinen auch eine Lösung dieser Gleichung.

WAHR	FALSCH
☐	☐

---

5. [10 Punkte] Wir betrachten die Schnittkurve

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = -1\}.$$

Bestimmen Sie den höchsten Punkt auf S.

6. [10 Punkte] Wir betrachten den Teil K_R der Kugel K mit Zentrum $(0, 0, 0)$ und Radius $R > 1$, welcher über der Ebene $z = 1$ liegt mit Dichte $\varrho(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$.

a) Leiten Sie eine Formel für die Masse von K_R her, welche keine Integrale enthält.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.

b) Berechnen Sie die Masse von K_R für $R = 2$.

7. [10 Punkte] Seien $a > 0$ und $b > 0$. Bestimmen Sie unter allen rechteckigen Gebieten

$$G_{a,b} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\big\}$$

dasjenige, für welches der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2 - 4xy, 6y)$ durch den Rand von $G_{a,b}$ am grössten ist. Welchen Wert hat dieser grösste Fluss?

8. [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

a) Skizzieren Sie die gerade 2π-periodische Fortsetzung von f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der geraden 2π-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

c) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

9. [10 Punkte] Bestimmen Sie eine Lösung $u(x, y)$ des folgenden Randwertproblems mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{yy} &= u_y, & \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1 \\ u(0, y) &= 0, & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(1, y) &= 0, & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(x, 0) &= 0, & \text{für } 0 < x < 1 \\ u(x, 1) &= \sin(\pi x), & \text{für } 0 < x < 1. \end{cases}$$