D-BAUG
Dr. Meike Akveld

Analysis I/II

Winter 2015

Lösung

1. [**10 Punkte**] Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{|z|^2}{2} \leq 1 + \mathrm{Im}(z) \right\}$$

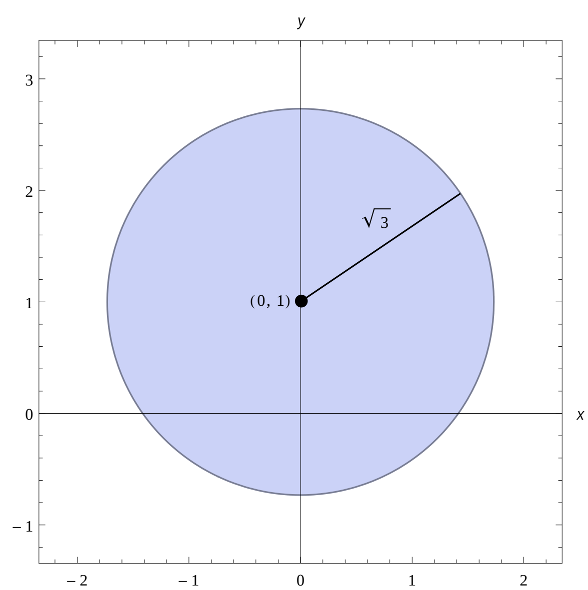
gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{|z|^2}{2} \leq 1 + \mathrm{Im}(z) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 1 + y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 \leq 2 + 2y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - 2y \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + (y-1)^2 \leq 3. \end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 1)$ und Radius $\sqrt{3}$. Der Rand gehört dabei zur Menge.



Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie $(1+i)e^{\frac{3\pi i}{4}}$ und die Nullstellen des Polynoms $z^2+z+\frac{1}{2}$ in Normal- und Polarform.

Es gilt
$$z_0 = (1+i)e^{\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{2}e^{\pi i}.$$

Dies ist die Darstellung in Polarform, die Darstellung in Normalform ist $-\sqrt{2}$. Die Nullstellen des Polynoms sind gegeben durch

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2},$$

in Polarform ergibt das
$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pm 3\pi i}{4}}.$$

c) Welche dieser komplexen Zahlen befinden sich in B?

Für z_0 gilt
$$x^2 + (y-1)^2 = 2 + 1 = 3,$$

für z_1 gilt
$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

für z_2 gilt
$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}.$$

Somit liegen alle drei Zahlen in B.

2. [**10 Punkte**] Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

Der Nenner lässt sich faktorisieren durch

$$x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)(x-1),$$

dies führt auf den Ansatz

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\\
&\Leftrightarrow 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx\\
&\Leftrightarrow (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow B = -A \text{ und } C = A \text{ und } A = 1\\
&\Leftrightarrow A = 1 \text{ und } B = -1 \text{ und } C = 1.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man in die Gleichung

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

auch $x = 0$ und $x = 1$ einsetzen um $A = 1$ und $C = 1$ zu erhalten, beispielsweise mit $x = 2$ folgt dann auch $B = -1$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\\
&= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \frac{1}{1-x} + C.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_1^2 x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Wir erhalten mit der Substitution $t = x^2+1$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^5 \frac{t^{3/2}-t^{1/2}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^{5/2} - \frac{1}{3}t^{3/2}\Big|_{t=2}^{5}\\
&= \left(\frac{1}{5}5^{5/2} - \frac{1}{3}5^{3/2}\right) - \left(\frac{1}{5}2^{5/2} - \frac{1}{3}2^{3/2}\right)\\
&= 5^{3/2} - \frac{1}{3}5^{3/2} - \frac{2}{5}2^{3/2} + \frac{1}{3}2^{3/2}\\
&= \frac{2}{3}5^{3/2} - \frac{1}{15}2^{3/2} = \frac{2}{3}5\sqrt{5} - \frac{1}{15}2\sqrt{2}\\
&= \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ können wir auch partielle Integration verwenden:

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 x^3\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \underbrace{x^2}_{\downarrow}\cdot\underbrace{x\sqrt{x^2+1}}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x \\
&= x^2\cdot\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\Big|_1^2 - \int_1^2 2x\cdot\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3}5^{3/2} - \frac{1}{3}2^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{5/2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{20}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{50}{15}\sqrt{5} + \frac{8}{15}\sqrt{2} \\
&= \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\tan(x^2)}$

Im Schritt $(*)$ wenden wir de L'Hôpital an, weil der Ausdruck die Form "$\frac{0}{0}$" hat:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{\tan(x^2)} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2x}{\cos^2(x^2)}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-x)-(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{\frac{2x}{\cos^2(x^2)}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{2x}{\cos^2(x^2)}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x^2)}{x^2-1} \\
&= \frac{1}{-1} = -1.
\end{aligned}
$$

3. [**10 Punkte**] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) \cdot x^2 - 3y(x) = 3e^{-3/x}, \quad y(3) = 0.$$

Zuerst lösen wir die homogene Differentialgleichung

$$y'(x) \cdot x^2 - 3y(x) = 0.$$

Diese Gleichung ist separierbar, wir erhalten also

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot x^2 = 3y \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \ln|y| = -\frac{3}{x} + \tilde{C} \\ \Leftrightarrow \quad & |y| = e^{\tilde{C}} \cdot e^{-3/x} \\ \Leftrightarrow \quad & y(x) = Ce^{-3/x}. \end{aligned}$$

Für die inhomogene Lösung verwenden wir Variation der Konstanten, also den Ansatz

$$y(x) = C(x)e^{-3/x}.$$

Es folgt

$$y'(x) = C'(x)e^{-3/x} + C(x)\frac{3}{x^2}e^{-3/x}$$

und durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(C'(x)e^{-3/x} + C(x)\frac{3}{x^2}e^{-3/x}\right) \cdot x^2 - 3C(x)e^{-3/x} = 3e^{-3/x} \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x)x^2e^{-3/x} = 3e^{-3/x} \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x)x^2 = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x) = 3x^{-2}. \end{aligned}$$

Integrieren liefert

$$C(x) = -3/x + C$$

und daraus ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung

$$y(x) = (-3/x + C) \cdot e^{-3/x}.$$

Wir setzen den Anfangswert $y(3) = 0$ ein und erhalten

$$0 = (-1 + C)e^{-1},$$

also $C = 1$ und die Lösung lautet

$$y(x) = (-3/x + 1) \cdot e^{-3/x}.$$

Bitte wenden!

4. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn Ihre Antwort richtig ist, -1 falls Ihre Antwort falsch ist und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = y^2 - (x^2 + z^2)$. Die Niveauflächen von f sind Paraboloiden mit Scheitel auf der y-Achse.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(Niveaufläche zum Niveau 0 ist ein Kegel)

---

b) Das Dreifachintegral einer Funktion f über dem Gebiet

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq z \leq -2x + 4,\ -3 \leq y \leq 0\right\}$$

kann geschrieben werden als

$$\int_0^{-2x+4} \int_0^2 \int_{-3}^0 f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(Die äussersten Schranken müssen Konstanten sein)

---

c) Die Mengen $\left\{(r, \varphi, z) \,|\, r = \frac{\sqrt{3}}{3} z\right\}$ und $\{(r, \varphi, \vartheta) \,|\, \vartheta = \pi/4\}$ stimmen überein. Dabei ist die erste Menge in Zylinderkoordinaten notiert und die zweite Menge in Kugelkoordinaten.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(Kegel mit Öffnungswinkel $\pi/6$ bzw. $\pi/4$)

---

d) Das Vektorfeld $\mathbf{F} = (y, x)$ hat keine Zirkulation entlang und keinen Fluss durch den Einheitskreis.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	($\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$)

Siehe nächstes Blatt!

e) Wenn ein Vektorfeld auf einem Gebiet (welches die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt) positive zwei-dimensionale Rotation hat, so ist die Zirkulation (im Gegenuhrzeigersinn) entlang des Randes von diesem Gebiet ebenfalls positiv.

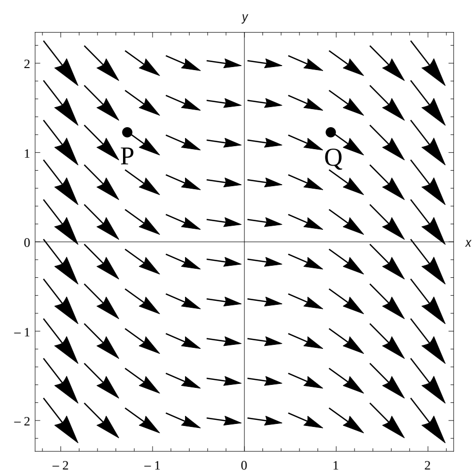
WAHR	FALSCH	
$\boxtimes$	$\square$	(Der Satz von Green I besagt $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \mathrm{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}A > 0$)

---

f) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

WAHR	FALSCH	
$\square$	$\boxtimes$	($\mathbf{F} = (y, 0)$ mit $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = -1$)

Die nächste Aufgabe bezieht sich auf die folgende Abbildung eines zwei-dimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{F}$ und die eingezeichneten Punkte P und Q:



g) Es gilt für die zwei-dimensionale Rotation $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}|_P > 0$ und $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}|_Q < 0$.

WAHR	FALSCH	
$\boxtimes$	$\square$	(P : y-Komponente wächst in x; x-Komponente konstant in y Q : y-Komponente fällt in x; x-Komponente konstant in y)

---

h) Für jedes zwei-dimensionale Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y)$ gilt

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}(2x, 2y)) = 4 \cdot \mathrm{div}(\mathbf{F}(x, y)).$$

WAHR	FALSCH	
$\square$	$\boxtimes$	(Gegenbeispiel: $\mathbf{F}(x, y) = (x, 0)$)

Bitte wenden!

i) Wird die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch $f(x) = x^3$ definierte Funktion periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt, so gilt für ihre Fourierreihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

dass $a_n = 0$, für alle $n \geq 0$.

WAHR	FALSCH	
☒	☐	(f ungerade $\Rightarrow a_n = 0,\ n \geq 0$)

---

j) Seien $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ zwei Lösungen der Gleichung

$$u_x \cdot u_y = 1.$$

Dann ist die Funktion $u_1 \cdot u_2$ im Allgemeinen auch eine Lösung dieser Gleichung.

WAHR	FALSCH	
☐	☒	(Gegenbeispiel: $u_1(x, y) = u_2(x, y) = x + y$)

Siehe nächstes Blatt!

5. [**10 Punkte**] Wir betrachten die Schnittkurve

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = -1\}.$$

Bestimmen Sie den höchsten Punkt auf S.

<u>Lösung mit Lagrange-Multiplikatoren:</u>
Wir maximieren die Funktion $f(x,y,z) = z$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0 \text{ und } g_2(x,y,z) = z - 1 - x - y = 0.$$

Zu lösen ist das Gleichungssystem $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ unter den Nebenbedingungen, also

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 0 &= -2\lambda_1 y - \lambda_2 \\ 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ z - x^2 - y^2 &= 0 \\ z - 1 - x - y &= 0. \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung liefert $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, es ergibt sich für die anderen Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -2(1-\lambda_2)x - \lambda_2 \\ 0 &= -2(1-\lambda_2)y - \lambda_2 \\ z - x^2 - y^2 &= 0 \\ z - 1 - x - y &= 0. \end{aligned}$$

Nun sieht man aus der ersten Gleichung, dass $\lambda_2 \neq 1$ gelten muss, die Gleichung kann somit nach x aufgelöst werden durch

$$x = -\frac{\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt analog $x = y$. Nun können wir die beiden Nebenbedingungen nach z auflösen und für x und y einsetzen. Dies ergibt eine Gleichung in λ_2:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_2^2}{2(1-\lambda_2)^2} = 1 - \frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_2^2 = 2(1-\lambda_2)^2 - 2\lambda_2(1-\lambda_2) = 4\lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3\lambda_2^2 - 6\lambda_2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\lambda_2 = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

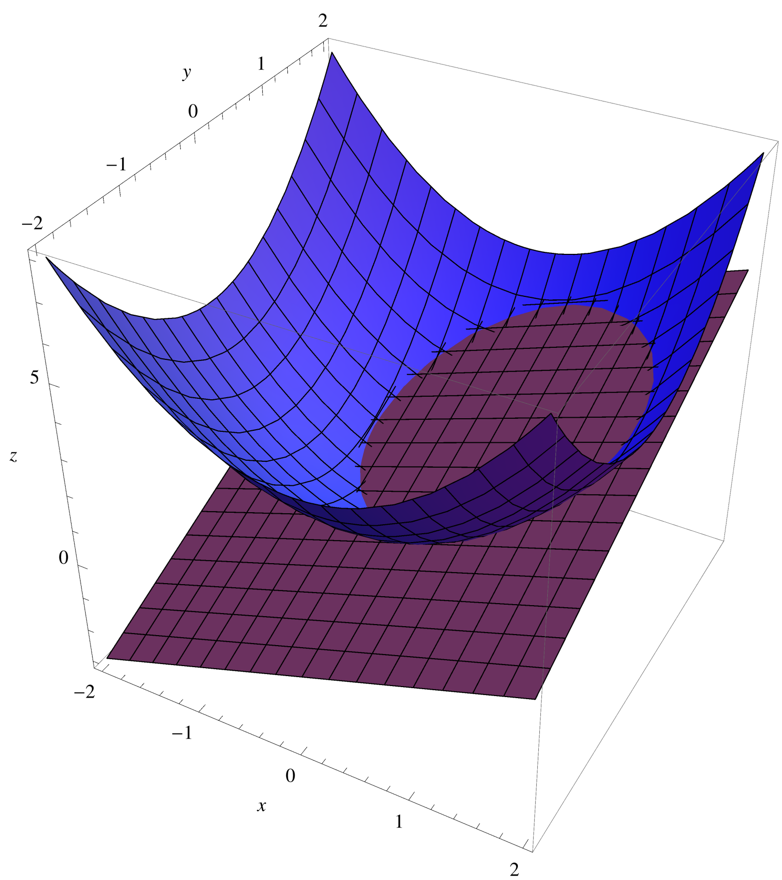
Bitte wenden!

Daraus ergibt sich

$$z = 1 - \frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)} = 1 - \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{\mp\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 \pm \sqrt{3} + 1 = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Das Maximum wird also auf der Höhe $z = 2 + \sqrt{3}$ angenommen, dies entspricht dem Punkt

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$



<u>Direkt:</u>
Die Schnittkurve S erfüllt die Gleichung

$$z = x^2 + y^2 = 1 + x + y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 1.$$

Quadratisches Ergänzen ergibt

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

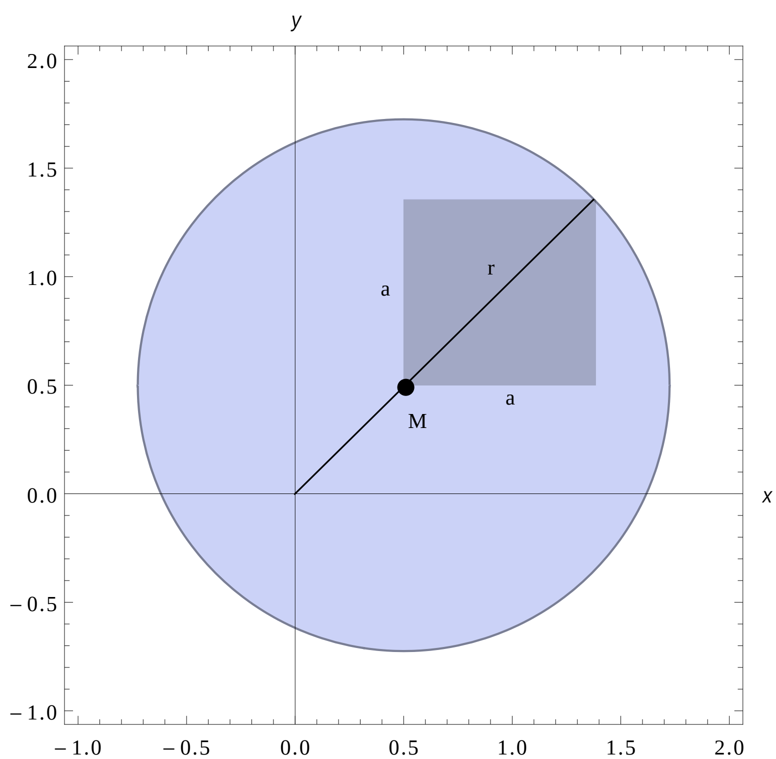
Wir sehen, dass S, projiziert auf die $x - y$-Ebene, der Kreis mit Mittelpunkt $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und Radius $r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ist. Da insbesondere $z = x^2 + y^2$ gilt, ist der höchste Punkt auf S jener, welcher am weitesten vom Ursprung entfernt liegt. Dieser liegt auf der Geraden, welche durch den Ursprung und M geht. Mit dem Satz von Pythagoras berechnen wir nun die Länge a (sh. Skizze), also

$$2a^2 = r^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Der höchste Punkt liegt also über der dem Punkt

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

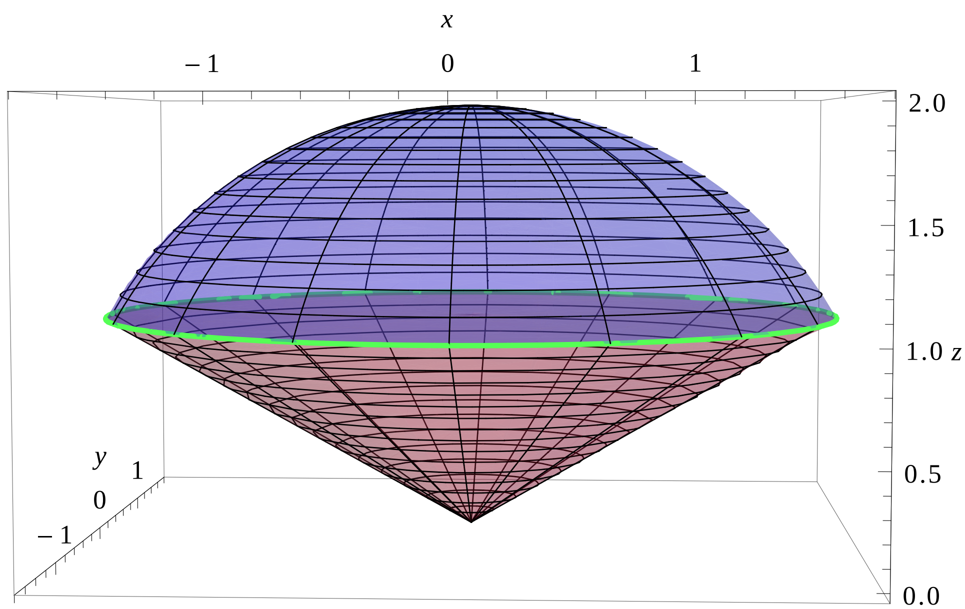
auf der Höhe $z = x + y + 1 = 2 + \sqrt{3}$.



Bitte wenden!

6. [**10 Punkte**] Wir betrachten den Teil K_R der Kugel K mit Zentrum $(0,0,0)$ und Radius $R > 1$, welcher über der Ebene $z = 1$ liegt mit Dichte $\varrho(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$.

a) Leiten Sie eine Formel für die Masse von K_R her, welche keine Integrale enthält.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.



In der Skizze ist K_R das blaue Kugelsegment, Mittelpunkt der Kugel K ist die Spitze des roten Kegels. Der Radius des grünen Kreises ist mit dem Satz von Pythagoras gegeben durch $\sqrt{R^2-1}$.
In Zylinderkoordinaten gilt also

$$K_R = \left\{(r,\varphi,z) \,|\, 0 \le r \le \sqrt{R^2-z^2},\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 1 \le z \le R\right\}.$$

Die Masse von K_R beträgt also

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_1^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_0^{2\pi} r \cdot \varrho(r,\varphi,z)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{z^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{2\pi r^3}{z^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \left[\frac{\pi r^4}{2z^2}\right]_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \frac{\pi(R^2-z^2)^2}{2z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \frac{\pi R^4 - 2\pi R^2 z^2 + \pi z^4}{2z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^R \left(\frac{\pi R^4}{2z^2} - \pi R^2 + \frac{\pi z^2}{2}\right) \mathrm{d}z \\
&= \left[-\frac{\pi R^4}{2z} - \pi R^2 z + \frac{\pi z^3}{6}\right]_{z=1}^{R} \\
&= \left(-\frac{\pi R^3}{2} - \pi R^3 + \frac{\pi R^3}{6}\right) - \left(-\frac{\pi R^4}{2} - \pi R^2 + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}R^4 - \frac{4\pi}{3}R^3 + \pi R^2 - \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Masse von K_R für $R = 2$.

Für $R = 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{\pi}{2}\cdot 16 - \frac{4\pi}{3}\cdot 8 + \pi\cdot 4 - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{48\pi - 64\pi + 24\pi - \pi}{6} \\
&= \frac{7\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

7. [10 Punkte] Seien $a > 0$ und $b > 0$. Bestimmen Sie unter allen rechteckigen Gebieten

$$G_{a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\right\}$$

dasjenige, für welches der Fluss nach aussen von $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2 - 4xy, 6y)$ durch den Rand von $G_{a,b}$ am grössten ist. Welchen Wert hat dieser grösste Fluss?

Nach dem Satz von Green II gilt für den gesuchten Fluss

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G_{a,b}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} &= \iint_{G_{a,b}} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}A \\
&= \int_0^b \int_0^a (-2x - 4y + 6) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \left[-x^2 - 4xy + 6x\right]_{x=0}^a \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b (-a^2 - 4ay + 6a) \mathrm{d}y \\
&= \left[-a^2 y - 2ay^2 + 6ay\right]_{y=0}^b \\
&= -a^2 b - 2ab^2 + 6ab.
\end{aligned}$$

Wir müssen nun das Maximum von

$$f(a, b) = -a^2 b - 2ab^2 + 6ab$$

für $a > 0$ und $b > 0$ suchen. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte:

$$\nabla f(a, b) = \begin{pmatrix} -2ab - 2b^2 + 6b \\ -a^2 - 4ab + 6a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $b \neq 0$ gilt, folgt aus der ersten Komponente

$$-2a - 2b + 6 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{6 - 2a}{2} = 3 - a.$$

Dies setzen wir in die zweite Komponente ein und beachten ebenfalls $a \neq 0$:

$$-a - 4b + 6 = 0 \Leftrightarrow -a - 12 + 4a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Der kritische Punkt $(2, 1)$ ist ein Maximum, wie sich überprüfen lässt. Wir wenden das Kriterium aus der Vorlesung an:

$$f_{aa}(a, b) = -2b, \qquad f_{bb}(a, b) = -4a, \qquad f_{ab}(a, b) = -2a - 4b + 6,$$

$$D = f_{ab}^2 - f_{aa} f_{bb} = (-2a - 4b + 6)^2 - 8ab.$$

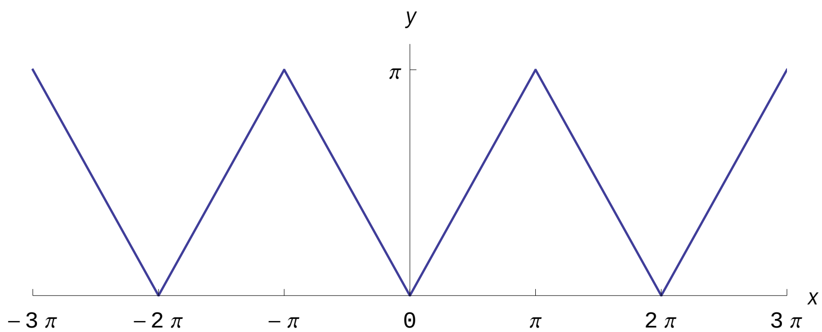
Es folgt für den Punkt $(2, 1)$:

$$D = -12 < 0, \quad f_{aa}(2, 1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum.}$$

Siehe nächstes Blatt!

8. [**10 Punkte**] Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

a) Skizzieren Sie die gerade 2π-periodische Fortsetzung von f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.



b) Bestimmen Sie die Fourierreihe der geraden 2π-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

Gesucht ist die Fourierreihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x, n \geq 1.$$

Da wir die gerade Fortsetzung von $f(x)$ betrachten, gilt $b_n = 0, n \geq 1$.

Weiter rechnen wir

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\, x^2\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

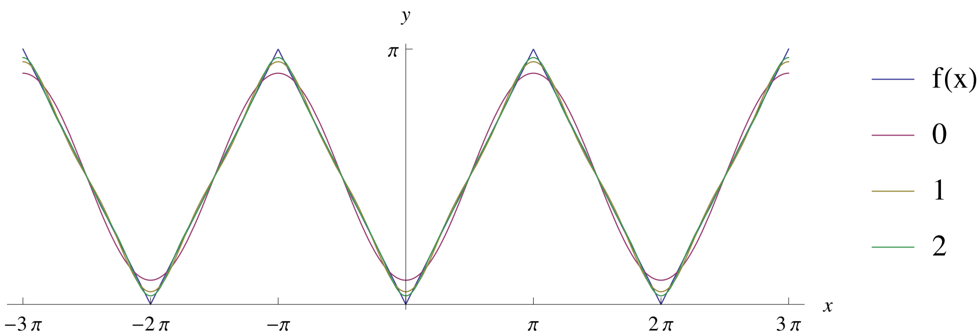
und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{\cos nx}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{2}{n\pi}\, x \sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos nx\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Fourierreihe der geraden Fortsetzung von $f(x)$ ist damit

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos(2k+1)x.$$



Die Partialsummen bis $k = 0, 1, 2$ und $f(x)$

c) Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Es gilt $f(0) = 0$, also insbesondere

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi}$$

und nach Multiplikation von $\frac{\pi}{4}$ schliesslich

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots .$$

Siehe nächstes Blatt!

9. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,y)$ des folgenden Randwertproblems mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$.

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{yy} &= u_y, & \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1 \\ u(0,y) &= 0, & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(1,y) &= 0, & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } 0 < x < 1 \\ u(x,1) &= \sin(\pi x), & \text{für } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} & X''(x)Y(y) + 2X(x)Y''(y) = X(x)Y'(y) \\ \Leftrightarrow\ & X''(x)Y(y) = -2X(x)Y''(y) + X(x)Y'(y) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-2Y''(y) + Y'(y)}{Y(y)} \stackrel{!}{=} k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir oben wie üblich wegen der Unabhängigkeit von x und y beide Seiten konstant annehmen. Wir betrachten die Differentialgleichung für X. Aus $u(0,y) = 0$ und $u(1,y) = 0$ folgt, dass es nur interessante Lösungen für $X(0) = 0$ und $X(1) = 0$ geben kann.

<u>$k = 0:$</u>
Wir erhalten $X(x) = Ax + B$ und aus den Randbedingungen $X \equiv 0$, dieser Fall ist also uninteressant.

<u>$k = \varrho^2 > 0:$</u>
Wir erhalten $X(x) = Ae^{\varrho x} + Be^{-\varrho x}$ und aus den Randbedingungen $X \equiv 0$, dieser Fall ist also uninteressant.

<u>$k = -\lambda^2 < 0:$</u>
Wir erhalten $X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$.

Aus der Randbedingung $X(0) = 0$ ergibt sich $A = 0$ und mit $X(1) = 0$ ergibt das interessante Lösungen für

$$0 = X(1) = B\sin(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \lambda = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Das ergibt die Fundamentallösungen

$$X_n(x) = \sin n\pi x,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Bitte wenden!

Für Y müssen wir also

$$\frac{-2Y_n''(y) + Y_n'(y)}{Y_n(y)} = -n^2\pi^2$$

lösen, das ist äquivalent zur homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$2Y_n''(y) - Y_n'(y) - n^2\pi^2 Y_n(y) = 0.$$

Diese hat das charakteristische Polynom

$$2t^2 - t - n^2\pi^2 = 0$$

mit den Nullstellen

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}.$$

Dies ergibt die Lösungen

$$Y_n(y) = C_1 e^{\frac{1}{4}(1+\sqrt{1+8n^2\pi^2})y} + C_2 e^{\frac{1}{4}(1-\sqrt{1+8n^2\pi^2})y}.$$

Aus $u(x,0) = 0$ folgt, dass es nur interessante Lösungen für $Y_n(0) = 0$ geben kann. Daraus erhalten wir

$$0 = Y_n(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

und somit

$$Y_n(y) = C_1 e^{\frac{1}{4}y}\left(e^{\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}y} - e^{-\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}y}\right) = 2C_1 e^{\frac{1}{4}y} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}y\right).$$

Für die Eigenfunktionen ergibt sich damit

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = A_n e^{\frac{1}{4}y} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}y\right) \sin n\pi x$$

und der Ansatz für die Lösung lautet

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{1}{4}y} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}y\right) \sin n\pi x.$$

Betrachte nun die noch verbleibende Anfangsbedingung:

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{1}{4}} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8n^2\pi^2}}{4}\right) \sin n\pi x. \stackrel{!}{=} \sin \pi x.$$

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt mit einem Koeffizientenvergleich

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{1}{4}} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8\pi^2}}{4}\right)}, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher lautet die Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{e^{\frac{1}{4}} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8\pi^2}}{4}\right)} e^{\frac{1}{4}y} \sinh\left(\frac{\sqrt{1+8\pi^2}}{4} y\right) \sin \pi x.$$