Prüfungsaufgaben

1. a) [**4 Punkte**] Bestimmen und skizzieren Sie die Menge M in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, welche gegeben ist durch

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) [**6 Punkte**] Gegeben seien zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass die Punkte $0, z, w$ ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel in 0 bilden.

(i) Bestimmen Sie das Argument und den Betrag von

$$\frac{z^2}{w^2}.$$

(ii) Folgern Sie daraus, dass

$$z^2 + w^2 = 0$$

gilt.

---

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte.

a) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{x^2+2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,\mathrm{d}x,$$

b) [**3 Punkte**]

$$\int_1^e \frac{1}{y + y\ln(y)}\,\mathrm{d}y,$$

c) [**3 Punkte**]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2(x)}{\cos(x) - 1}.$$

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die folgende Funktion

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

a) [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$.

b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Ableitung von $y = \tanh(x)$ und zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) [**6 Punkte**] Begründen Sie, welshalb eine Umkehrfunktion $\operatorname{artanh}(x)$ existiert, bestimmen Sie diese explizit und geben Sie den Definitions- und Wertebereich an.

---

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtige Kreuz gibt einen Punkt, jedes falsche -1 Punkt. Es gibt 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Die Masse eines unendlichen Zylinders mit Radius 1 und Dichte ϱ ist gegeben durch

$$\int_0^{\frac{1}{\sin\vartheta}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varrho(r, \varphi, \vartheta) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r.$$

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

b) Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $|\mathbf{F}(x, y, z)| < 1$ für alle $(x, y, z) \in \partial D$ so gilt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \,\mathrm{d}V < \text{Flächeninhalt}\,(\partial D)$$

WAHR ☐ FALSCH ☐

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\mathbf{F}\colon (x,y,z) \mapsto (x+2z^3, y^2-3z, 6xz^2+y)$$

entlang des Einheitskreises γ in der y-z-Ebene im Gegenuhrzeigersinn verrichtet, ist gleich 4π.

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

d) Für das Vektorfeld

$$\mathbf{F}\colon (x,y,z) \mapsto (x^\alpha yz, xy^\beta z, -2xyz^2)$$

gilt

$$\iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = 0,\ \text{für alle geschlossenen Flächen } S,$$

genau dann, wenn $\alpha = \beta = 2$.

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

e) Die Niveauflächen von

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

sind Ellipsoide.

WAHR ☐ FALSCH ☐

Bitte wenden!

f) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

(i) $x(t) = 2e^{-2t} + e^{-t}$ ist eine Lösung mit Anfangsbedingung $x(0) = 3$ und $\lim_{t\to\infty} x(t) < \infty$.

WAHR ☐ FALSCH ☐

(ii) $x(t) = 4e^{-2t} - e^{t}$ ist eine Lösung mit Anfangsbedingung $x(0) = -5$.

WAHR ☐ FALSCH ☐

---

g) Wenn $y_1(x), y_2(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

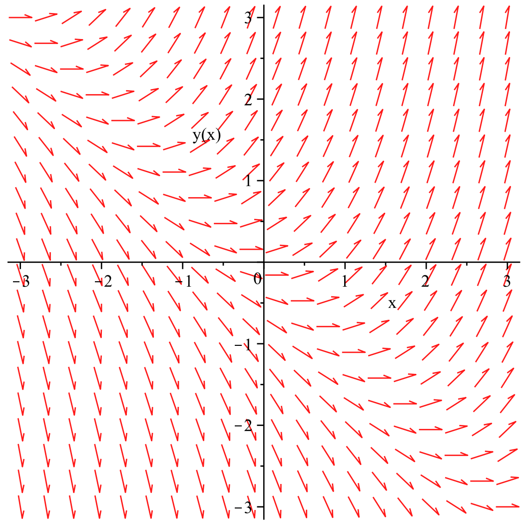
$$y'' + ay' + by = e^x$$

mit konstanten Koeffizienten a und b sind, so ist auch $y_1(x) + y_2(x)$ eine Lösung.

WAHR ☐ FALSCH ☐

Siehe nächstes Blatt!

h) Gegeben sei das folgende Richtungsfeld.



(i) Das Richtungsfeld passt zur Differentialgleichung $y' = y + x$.

WAHR ☐ FALSCH ☐

(ii) Das Richtungsfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \end{pmatrix}.$$

WAHR ☐ FALSCH ☐

Bitte wenden!

5. **[10 Punkte]** Berechnen Sie die Masse der Region, die durch

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \geq x, \quad z \geq 0$$

definiert ist, mit der Dichtefunktion $\varrho(x, y, z) = \sqrt{2}(y - x)$.

---

6. **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = xy^2$$

auf dem Gebiet

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1 \right\}.$$

---

7. **[10 Punkte]** Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit der y-Achse als Symmetrieachse und mit dem Scheitelpunkt $(0, 1)$, die durch den Punkt (a, a) geht. Sei γ_a der Weg von $(0, 1)$ nach (a, a) entlang P_a. Man bestimme $a > 0$ so, dass die Arbeit W_a des Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y - 1}{x}, \frac{-1}{x} \right)$$

entlang γ_a minimal wird.

---

8. **[10 Punkte]** Es sei f eine streng monoton wachsende, differenzierbare Funktion mit Werten in den positiven reellen Zahlen (> 0). Die Steigung der Funktion sei umgekehrt proportional zum Funktionswert. Im Ursprung stimmen Funktionswert und Steigung überein. Bestimmen Sie das grösstmögliche Intervall $I \subset \mathbb{R}$ auf welchem f definiert ist.

---

9. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x).$$

a) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Fall $a_2(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 4$, $a_0(x) \equiv 4$ und $r(x) = \sin(2x)$.

b) **[5 Punkte]** Lösen Sie das Anfangswertproblem für den Fall $a_2(x) \equiv 0$, $a_1(x) \equiv 1$, $a_0(x) = \tan x$, $r(x) = \cos^2 x$ und die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{2}$.