D-BAUG
Dr. Meike Akveld

Analysis I/II

Winter 2016

Musterlösung

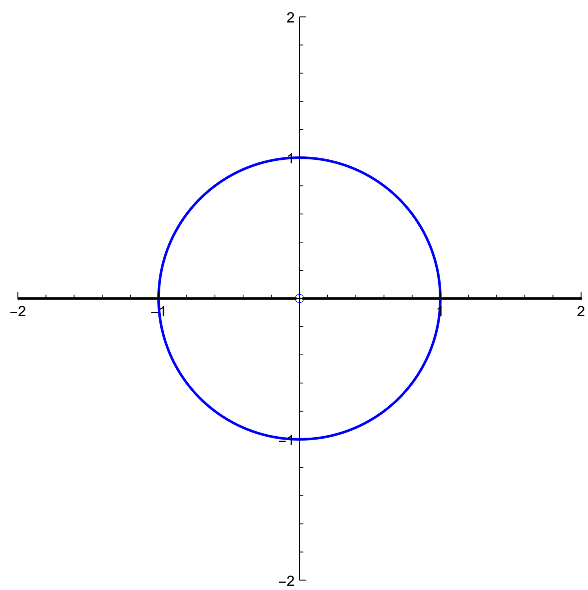
1. a) [**4 Punkte**] Bestimmen und skizzieren Sie die Menge M in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, welche gegeben ist durch

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine komplexe Zahl ist genau dann reell, wenn sie mit ihrem konjugiert komplexen übereinstimmt. Folglich gilt

$$\begin{array}{llll} & z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ \Leftrightarrow & z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} & \Leftrightarrow & z - \bar{z} = \dfrac{z - \bar{z}}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow & z = \bar{z} \text{ oder } 1 = \dfrac{1}{|z|^2} & \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \text{ oder } |z| = 1 \end{array}$$

und wir erhalten $M = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$.



Bitte wenden!

b) [**6 Punkte**] Gegeben seien zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass die Punkte $0, z, w$ ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel in 0 bilden.

(i) Bestimmen Sie das Argument und den Betrag von

$$\frac{z^2}{w^2}.$$

Da die beiden Punkte z, w auf einem gleichschenkligen Dreieck liegen, gilt $|z| = |w| = r$. Der Winkel bei 0 entspricht dem Unterschied der beiden Argumente, also haben wir $z = re^{\varphi i}, w = re^{\varphi + \frac{\pi}{2} i}$. Es folgt

$$\frac{z^2}{w^2} = \frac{r^2 e^{2\varphi i}}{r^2 e^{2\varphi i + \pi i}} = e^{-\pi i} = -1$$

und somit $\left|\frac{z^2}{w^2}\right| = 1$ und $\operatorname{Arg}\left(\frac{z^2}{w^2}\right) = \pi$.

(ii) Folgern Sie daraus, dass

$$z^2 + w^2 = 0$$

gilt.
Aus $\frac{z^2}{w^2} = -1$ folgt direkt $z^2 = -w^2$, bzw. $z^2 + w^2 = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Bestimmen Sie folgende Integrale und Grenzwerte.

a) [**4 Punkte**]

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x,$$

Wir machen eine Partialbruchzerlegung. Es gilt

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2).$$

Der Ansatz

$$\frac{x^2+2}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

liefert $x^2+2=(x^2-4)A+(x^2+x-2)B+(x^2-3+2)C$ und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} A+B+C&=1,\\ B-3C&=0,\\ -4A-2B+2C&=2. \end{aligned}$$

Folglich gilt $(A,B,C)=(-1,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ und somit

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= -\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\ln(|x-1|)+\frac{3}{2}\ln(|x-2|)+\frac{1}{2}\ln(|x+2|)+C_0.\end{aligned}$$

b) [**3 Punkte**]

$$\int_1^e \frac{1}{y+y\ln(y)}\,\mathrm{d}y,$$

Wir substituieren $u=\ln y$ mit $\mathrm{d}u=\frac{1}{y}\mathrm{d}y$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{y+y\ln(y)}\,\mathrm{d}y &= \int_1^e \frac{1}{y(1+\ln(y))}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = [\ln(1+u)]_0^1=\ln(2).\end{aligned}$$

c) [**3 Punkte**]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2(x)}{\cos(x)-1}.$$

Wir wenden zweimal Bernoulli-de l'Hôpital an:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\sinh^2(x)}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x)-1}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2\sinh(x)\cosh(x)}^{\to 0}}{\underbrace{-\sin(x)}_{\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cosh^2(x)+2\sinh^2(x)}{-\cos(x)}=-2.$$

Bitte wenden!

3. Betrachten Sie die folgende Funktion

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

a) [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$.

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

b) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Ableitung von $y = \tanh(x)$ und zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir haben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0.$$

c) [**6 Punkte**] Begründen Sie, welshalb eine Umkehrfunktion $\operatorname{artanh}(x)$ existiert, bestimmen Sie diese explizit und geben Sie den Definitions- und Wertebereich an.

Aus der Monotonie folgt, dass $\tanh(x)$ injektiv ist. Zudem gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

und folglich wissen wir (Zwischenwertsatz), dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv ist. Es existiert also eine Umkehrabblidung $\operatorname{artanh}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Wir bestimmen noch die explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \\
ye^{2x} + y &= e^{2x} - 1, \\
1 + y &= (1 - y)e^{2x}, \\
e^{2x} &= \frac{1 + y}{1 - y}, \\
x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) = \operatorname{artanh}(y).
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. [**10 Punkte**] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtige Kreuz gibt einen Punkt, jedes falsche −1 Punkt. Es gibt 0 Punkte, falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

a) Die Masse eines unendlichen Zylinders mit Radius 1 und Dichte ϱ ist gegeben durch

$$\int_0^{\frac{1}{\sin\vartheta}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varrho(r,\varphi,\vartheta) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r.$$

WAHR	FALSCH
☐	☒

---

b) Sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $|\mathbf{F}(x,y,z)| < 1$ für alle $(x,y,z) \in \partial D$ so gilt

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \,\mathrm{d}V < \text{Flächeninhalt}\,(\partial D)$$

WAHR	FALSCH
☒	☐

---

c) Die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\mathbf{F}\colon (x,y,z) \mapsto (x + 2z^3, y^2 - 3z, 6xz^2 + y)$$

entlang des Einheitskreises γ in der y-z-Ebene im Gegenuhrzeigersinn verrichtet, ist gleich 4π.

WAHR	FALSCH
☒	☐

Bitte wenden!

d) Für das Vektorfeld

$$\mathbf{F}\colon (x, y, z) \mapsto (x^\alpha yz, xy^\beta z, -2xyz^2)$$

gilt

$$\iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = 0, \text{ für alle geschlossenen Flächen } S,$$

genau dann, wenn $\alpha = \beta = 2$.

WAHR ☒ FALSCH ☐

---

e) Die Niveauflächen von

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

sind Ellipsoide.

WAHR ☒ FALSCH ☐

---

f) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

(i) $x(t) = 2e^{-2t} + e^{-t}$ ist eine Lösung mit Anfangsbedingung $x(0) = 3$ und $\lim_{t\to\infty} x(t) < \infty$.

WAHR ☐ FALSCH ☒

(ii) $x(t) = 4e^{-2t} - e^{t}$ ist eine Lösung mit Anfangsbedingung $x(0) = -5$.

WAHR ☐ FALSCH ☒

---

g) Wenn $y_1(x), y_2(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

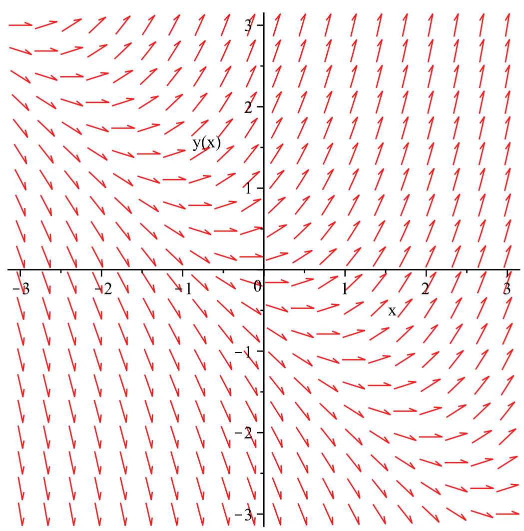
$$y'' + ay' + by = e^x$$

mit konstanten Koeffizienten a und b sind, so ist auch $y_1(x) + y_2(x)$ eine Lösung.

WAHR ☐ FALSCH ☒

---

h) Gegeben sei das folgende Richtungsfeld.



(i) Das Richtungsfeld passt zur Differentialgleichung $y' = y + x$.

WAHR ☒ FALSCH ☐

(ii) Das Richtungsfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+1}} \end{pmatrix}.$$

WAHR ☐ FALSCH ☒

Bitte wenden!

5. [10 Punkte] Berechnen Sie die Masse der Region, die durch

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \geq x, \quad z \geq 0$$

definiert ist, mit der Dichtefunktion $\varrho(x, y, z) = \sqrt{2}(y - x)$.

In Kugelkoordinaten ist die Masse gegeben durch

$$\begin{aligned}
M &= \int_2^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} r \sin\vartheta (\sin\varphi - \cos\varphi) r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2} \int_2^4 r^3 \, \mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin\varphi - \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\
&= \sqrt{2} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_2^4 \cdot [-\cos\varphi - \sin\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\vartheta)) \, \mathrm{d}\vartheta \\
&= \sqrt{2} \cdot (64 - 4) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) \cdot \tfrac{1}{2} \left[\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi.
\end{aligned}$$

---

6. [**10 Punkte**] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xy^2$$

auf dem Gebiet

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1 \right\}.$$

Wir bestimmen zuerst die kritischen Punkte im Innern von G. Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = 0$$

genau dann, wenn $y = 0$. In diesen Fällen haben wir $f(x,0) = 0$.

Um die Extremalstellen auf dem Rand von G zu bestimmen, verwenden wir die Methode von Lagrange mit der Nebenbedingung $g(x,y) = 9x^2 + 25y^2 = 225$. In den kritischen Punkten muss $\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y)$ gelten, also

$$\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18x \\ 50y \end{pmatrix}$$

Falls $y \neq 0$ folgt aus der zweiten Gleichung $\lambda = \frac{x}{25}$ und mit der ersten Gleichung $y^2 = \frac{18}{25}x^2$. Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt dies $27x^2 = 225$, also $x = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$. Wir erhalten also die kritischen Punkte $(\pm\frac{5}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{6})$. Für diese gilt

$$f\left(\tfrac{5}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{6}\right) = 10\sqrt{3},$$
$$f\left(-\tfrac{5}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{6}\right) = -10\sqrt{3}.$$

Folglich nimmt f jeweils in $(\frac{5}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{6})$ das Maximum $10\sqrt{3}$ und in $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{6})$ das Minimum $-10\sqrt{3}$ an.

Bitte wenden!

7. [**10 Punkte**] Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit der y-Achse als Symmetrieachse und mit dem Scheitelpunkt $(0, 1)$, die durch den Punkt (a, a) geht. Sei γ_a der Weg von $(0, 1)$ nach (a, a) entlang P_a. Man bestimme $a > 0$ so, dass die Arbeit W_a des Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y-1}{x}, \frac{-1}{x}\right)$$

entlang γ_a minimal wird.

Eine Parabel mit Scheitelpunkt $(0, 1)$ ist gegeben durch die Gleichung

$$y = c_a x^2 + 1.$$

Für P_a gilt zudem $a = c_a \cdot a^2 + 1$, also $c_a = \frac{a-1}{a^2}$. Somit ist die Parabel P_a gegeben durch

$$P_a : y = c_a \cdot x^2 + 1, \text{ mit } c_a = \tfrac{a-1}{a^2}.$$

Der Weg γ_a ist folglich

$$\gamma_a \colon [0, a] \to \mathbb{R}^2, t \to \begin{pmatrix} t \\ c_a \cdot t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\dot{\gamma}_a(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c_a \cdot t \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit W_a entlang γ_a ist

$$\begin{aligned} W_a &= \int_{\gamma_a} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^a \begin{pmatrix} \frac{c_a \cdot t^2}{t} \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2c_a \cdot t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^a c_a \cdot (t-2)\mathrm{d}t = c_a \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^a \\ &= \frac{a-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - 2a\right) = \frac{a}{2} - \frac{5}{2} + \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Für ein Minimum von W_a muss $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} W_a = 0$ gelten, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} W_a = \frac{1}{2} - \frac{2}{a^2} = 0,$$

d.h. $a = 2$. Da $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2} W_a = \frac{4}{a^3} > 0$, folgern wir, dass die Arbeit W_a entlang γ_a für $a = 2$ minimal ist.

Siehe nächstes Blatt!

8. **[10 Punkte]** Es sei f eine streng monoton wachsende, differenzierbare Funktion mit Werten in den positiven reellen Zahlen (> 0). Die Steigung der Funktion sei umgekehrt proportional zum Funktionswert. Im Ursprung stimmen Funktionswert und Steigung überein. Bestimmen Sie das grösstmögliche Intervall $I \subset \mathbb{R}$ auf welchem f definiert ist.

Wir haben $f'(x) > 0$ und $f(x) > 0$. Zudem gilt

$$f'(x) = \frac{\lambda}{f(x)},$$

für ein $\lambda > 0$, und $f(0) = f'(0)$.

Diese Differentialgleichung können wir durch Separation lösen:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\lambda}{f}, \\ \int f \,\mathrm{d}f &= \int \lambda \,\mathrm{d}x, \\ \frac{f^2}{2} &= \lambda x + C, \\ f(x) &= \sqrt{2(\lambda x + C)}. \end{aligned}$$

Wir haben

$$f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2(\lambda x + C)}}$$

und folglich liefert die Nebenbedingung

$$f(0) = \sqrt{2C} = \frac{\lambda}{\sqrt{2C}} = f'(0),$$

also $\lambda = 2C$ und somit $f(x) = \sqrt{\lambda(2x+1)}$. Diese Funktion ist definiert für $\lambda(2x+1) \geq 0$ und positiv für $\lambda(2x+1) > 0$, bzw. $x \in I = (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Bitte wenden!

9. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x).$$

a) [**5 Punkte**] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Fall $a_2(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 4$, $a_0(x) \equiv 4$ und $r(x) = \sin(2x)$.

Die Differentialgleichung lautet in diesem Fall

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \sin(2x).$$

Für die homogene Lösung verwenden wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -2$. Die homogene Lösung lautet folglich $y_h(x) = (Ax + B)e^{-2x}$.

Um eine partikuläre Lösung zu finden, nehmen wir den Ansatz $y(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x)$. Eingesetzt erhalten wir

$$-4C\cos(2x) - 4D\sin(2x) - 8C\sin(2x) + 8D\cos(2x) + 4C\cos(2x) + 4D\sin(2x) = \sin(2x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 8D &= 0, \\ -8C &= 1. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine partielle Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{8}\cos(2x)$.

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{-2x} - \frac{1}{8}\cos(2x).$$

b) [**5 Punkte**] Lösen Sie das Anfangswertproblem für den Fall $a_2(x) \equiv 0$, $a_1(x) \equiv 1$, $a_0(x) = \tan x$, $r(x) = \cos^2 x$ und die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

In diesem Fall lautet die Differentialgleichung

$$y'(x) + \tan(x)y(x) = \cos^2 x.$$

Durch Separation lösen wir die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} y'(x) + \tan(x)y(x) &= 0, \\ \frac{y'}{y} &= -\tan(x), \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= -\int \tan(x)\,\mathrm{d}x, \\ \ln(y) &= \ln(\cos x) + A, \\ y(x) &= B\cos x. \end{aligned}$$

Als nächstes führen wir eine Variation der Konstanten durch. Wir setzen $y(x) = B(x)\cos x$ mit $y'(x) = B'(x)\cos x - B(x)\sin x$. Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir $B'(x)\cos x = \cos^2 x$, also $B'(x) = \cos x$ und somit $B(x) = \sin x + C$. Die allgemeine Löesung der Differentialgleichung lautet folglich

$$y(x) = (\sin x + C)\cos x.$$

Mit der Anfangsbedingung erhalten wir $y(0) = C = \frac{\pi}{2}$, also

$$y(x) = (\sin x + \tfrac{\pi}{2})\cos x.$$