ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Winter 2010
Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl: 240 Minuten / 60 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 20 A4-Seiten selbst verfasste Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. **a)** **(3.5 Punkte)** Lösen Sie $z^3 = -27i$. Stellen Sie die Lösungen in der Form $x + iy$ dar.

b) **(2.5 Punkte)** Skizzieren Sie die Teilmenge M der komplexen Zahlenebene:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1 \leq |z - i| \right\}$$

2. **a)** **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$.

b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \sinh(1 + \ln x)$ zum Punkt $x_0 = 1$.

3. **(6 Punkte)** Ein Kessel besteht aus einer Halbkugel mit Radius r und bündig aufgesetztem Zylinder der Höhe h. Nach oben ist der Kessel durch einen ebenen Deckel abgeschlossen. Wie muss der Radius r bei gegebenem Volumen $V = 9\pi$ gewählt werden, so dass die Gesamtoberfläche des Kessels minimal wird? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Minimum handelt!

Bitte wenden!

4. (2.5 + 1.5+ 2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

5. (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + \tan(x)\,y(x) = x\,\cos^2(x), \qquad y(0) = 2.$$

6. **a) (1 Punkte)** Skizzieren Sie die Ebene $x+y+z=1$ und den Zylinder $y^2+z^2=4$ zusammen mit ihrer Schnittmenge.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie auf der Schnittmenge die globalen Maxima und Minima der Funktion $f(x,y,z) = x+2y$.

7. **a) (4 Punkte)** Bestimmen Sie diejenigen Punkte des Ellipsoids

$$x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 = 1, \tag{$*$}$$

wo seine Tangentialebene parallel ist zur Ebene $3x-y+3z=1$.

b) (2 Punkte) Fassen Sie die Lösungen der Gleichung ($*$), für welche $z>0$ ist, als Graph einer Funktion $f(x,y)$ auf! Welches ist die Richtung des steilsten Abstiegs im Punkt $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$?

8. (6 Punkte) Eine Dichtefunktion sei gegeben durch

$$\varrho(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Achtelkugel $x^2+y^2+z^2 \le 1$ im ersten Oktanten.

9. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F(x,y,z) = (x^3,y^3,z^3)$ aus dem Körper

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1 \text{ und } 0 \le z \le 2\right\}$$

nach aussen.

10. (6 Punkte) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

im Gebiet $\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, t \ge 0\right\}$ unter den Rand-/Anfangsbedingungen:

$$u(0,t) = 0 \qquad \tfrac{\partial}{\partial x}u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = \sin(\tfrac{\pi}{2}\,x) - 3\sin(\tfrac{5\pi}{2}\,x)$$