ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Winter 2011
Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten, 60 Punkte
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten, 30 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für Semesterkurs Analysis II: 15 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. (a) **(3.5 Punkte)** Finden Sie $z \in \mathbb{C}$ so, dass $\mathrm{Im}(z^3) = -8$ und $\arg(z^4) = \arg(-z^2)$. Stellen Sie die Lösung in der Form $x + iy$ dar.

(b) **(2.5 Punkte)** Skizzieren Sie die Teilmenge M der komplexen Zahlenebene:

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 1,\ \mathrm{Im} z \le \frac{1}{2} \mathrm{Re} z \right\}.$$

2. (a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x}$.

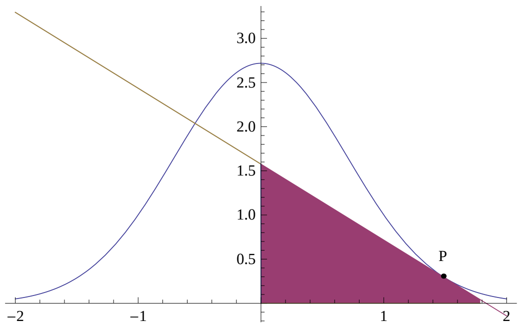
(b) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

3. **(2 + 2 + 2 Punkte)** Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\textbf{a)} \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)}\, dx \qquad \textbf{b)} \int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx \qquad \textbf{c)} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Bitte wenden!

4. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $y(x) = e^{-x^2+1}$. Für jeden Punkt P auf der Kurve gilt, dass die Tangente in P die Achsen des Koordinatensystems schneidet. Für welchen Punkt P ist die Fläche des Dreiecks zwischen der Tangente und den Achsen am kleinsten? Was ist die minimale Fläche?



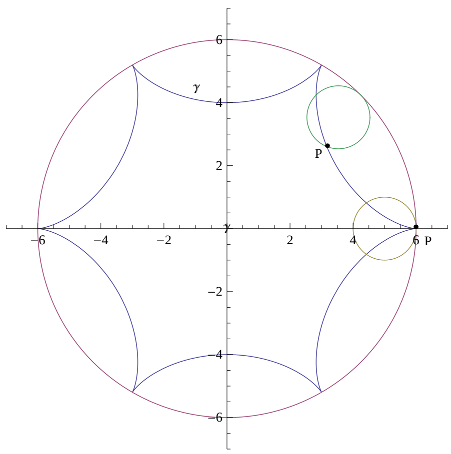
5. (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + \frac{1}{\cos^2 x}\, y(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad y(0) = 5$$

ohne Verwendung einer Lösungsformel.

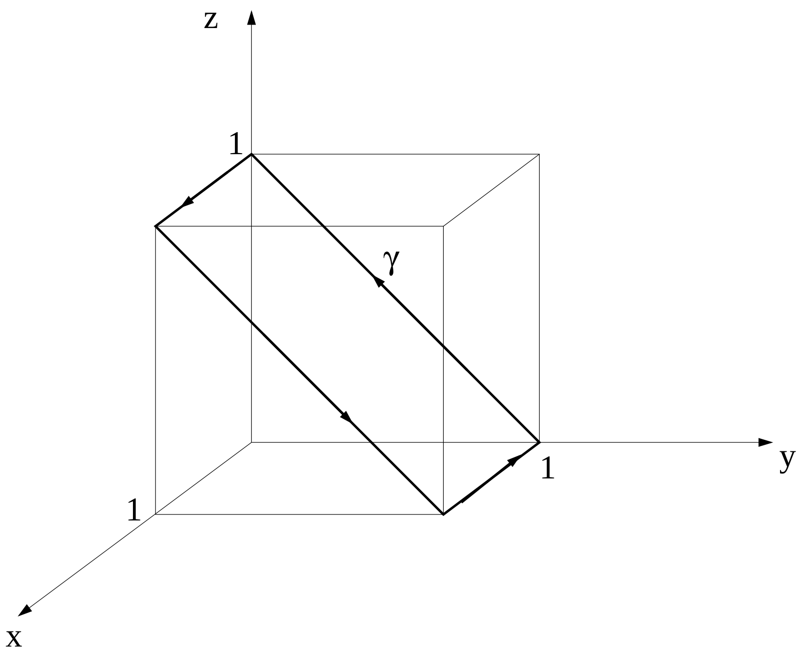
6. (6 Punkte) Ein Massenpunkt rutscht auf der Fläche $z = 55 - x^2 - 2y^2$ startend vom Punkt $(-1, -1, 52)$ abwärts. Wo erreicht die Falllinie des Massenpunkts die Höhe $z = 0$?

7. (6 Punkte) Ein Kreis mit Radius 1 rollt auf der innenseite des Kreises $x^2 + y^2 = 36$. Der Punkt P beschreibt eine Kurve γ, die in der Abbildung gezeichnet ist. Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Kurve γ begrenzt wird .



Siehe nächstes Blatt!

8. (6 Punkte) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\,\vec{r}$ entlang des eingezeichneten Wegs γ für das Vektorfeld $\vec{v} = (2xz + 3y, -x^2 + y, -z + e^y)$.



9. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y, z) = \big(x + e^{y-z}, y + e^{x-z}, \log\left(1 + x^2 + y^2\right) - z\big)$$

durch die Fläche

$$S = \Big\{(x, y, z) \,\Big|\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\Big\}.$$

10. (6 Punkte) Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf dem Viertelkreis $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$, mit folgenden Randbedingungen:

- $\frac{\partial u}{\partial r}(r, 0) = 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \frac{\pi}{2}) = 0$,
- $u(1, \phi) = \phi(\phi - \frac{\pi}{2})$.
  Sie dürfen die Tabelle der Grundintegrale aus Ihrer Zusammenfassung benutzen.