Lösung

Analysis I/II BAUG

Winter 2012

Dr. M. Akveld

---

1. **(a)** (i)

$$\frac{2+3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = \frac{2+3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} \cdot \frac{1+\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{2+3\mathbf{i}+2\mathbf{i}-3}{1^2-\mathbf{i}^2} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathbf{i}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\mathbf{i})^7 &= \left(2\cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\right)^7 = 128\cdot \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{7}{6}\pi} = 128\cdot\left(\cos\tfrac{7}{6}\pi + \mathbf{i}\sin\tfrac{7}{6}\pi\right)\\ &= 128\cdot\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{\mathbf{i}}{2}\right) = -64\cdot(\sqrt{3}+\mathbf{i})\end{aligned}$$

(b) Unter der Voraussetzung, dass $z \neq \mathbf{i}$, gilt

$$\begin{aligned}|f(z)| = 2 \Leftrightarrow & \left|\frac{z-2}{z-\mathbf{i}}\right| = 2\\ \Leftrightarrow & |z-2| = 2|z-\mathbf{i}|\\ \Leftrightarrow & |z-2|^2 = 4|z-\mathbf{i}|^2, \qquad z = x+\mathbf{i}y\\ \Leftrightarrow & |x+\mathbf{i}y-2|^2 = 4|x+\mathbf{i}y-\mathbf{i}|^2\\ \Leftrightarrow & (x-2)^2+y^2 = 4\left[x^2+(y-1)^2\right]\\ \Leftrightarrow & x^2-4x+4+y^2 = 4x^2+4y^2-8y+4\\ \Leftrightarrow & 3x^2+4x+3y^2-8y = 0\\ \Leftrightarrow & x^2+\tfrac{4}{3}x+y^2-\tfrac{8}{3}y = 0\\ \Leftrightarrow & (x+\tfrac{2}{3})^2+(y-\tfrac{4}{3})^2 = \tfrac{4}{9}+\tfrac{16}{9} = \tfrac{20}{9} = (\tfrac{2\sqrt{5}}{3})^2.\end{aligned}$$

D.h., die gesuchte Menge aller z mit $|f(z)| = 2$ ist ein Kreis mit Radius $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ um den Mittelpunkt $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, siehe Abbildung 1.

2. **(a)** Um den Konvergenzradius zu bestimmen, verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+2)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2.$$

(b) Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius absolut konvergiert, können wir f gliedweise integrieren, um an eine Stammfunktion zu gelangen. Das ergibt

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{n+1}{2^n}x^n\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n}+C \overset{n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^k}x^k+C.\end{aligned}$$

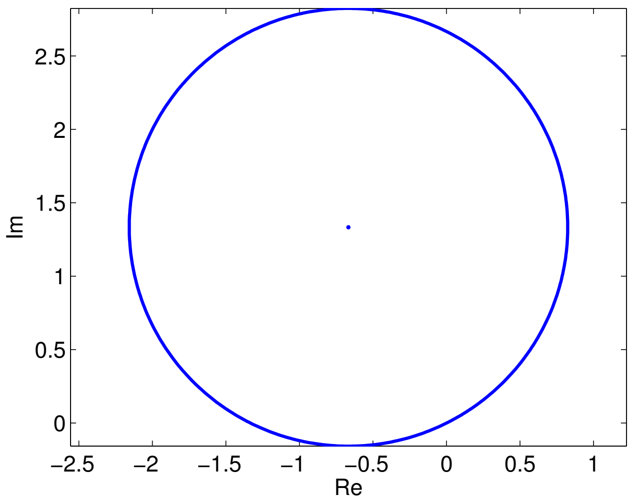

Figure 1: Menge aller z mit $|f(z)| = 2$.

Aus der Forderung $F(0) = 0$, erhalten wir $C = 0$. Es gilt also $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe, können wir $F(x)$ als elementare Funktion schreiben:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x}.$$

(c) Da F eine Stammfunktion von f darstellt, gilt

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2x}{2-x} = \frac{2(2-x) + 2x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$

3. **(a)** Für $Q = (x, y)$ gilt

$$d_g(Q) = |y - 1|, \qquad d_P(Q) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & d_g(Q) = d_P(Q) \\ \Leftrightarrow \quad & |y-1| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = -\tfrac{1}{4} x^2. \end{aligned}$$

D.h., die gesuchte Menge lautet

$$\left\{ (x, -\tfrac{1}{4}x^2) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

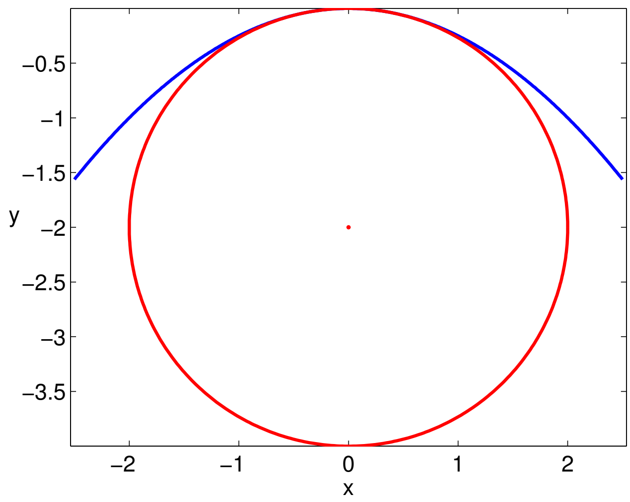

Figure 2: Die gesuchte Kurve mit Krümmungskreis bei $x = 0$.

(b) Die Menge aus Teilaufgabe **(a)** ist der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$. Mit $f'(x) = -\frac{1}{2}x$ und $f''(x) = -\frac{1}{2}$ ergibt sich daher für die Krümmung

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{(1 + \frac{x^2}{4})^{3/2}} = -\frac{4}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}.$$

(c) Konkret für $x = 0$ erhalten wir die Krümmung $k(0) = -\frac{1}{2}$. Der Radius des Krümmungskreises an die Kurve bei $x = 0$ beträgt daher $r(0) = |k(0)^{-1}| = 2$. Der Tangentenvektor der Kurve bei $x = 0$ ist gegeben durch

$$\vec{t}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich der Normalenvektor $\vec{n}(0) = (0, 1)$. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt demzufolge bei

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit bekommen wir die Darstellung in Abbildung 2.

4. **(a)** Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I := \int \underbrace{3^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \,\mathrm{d}x &= [3^x \sin x] - (\ln 3) \cdot \int \underbrace{3^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \,\mathrm{d}x \\ &= [3^x \sin x] + (\ln 3) \cdot [3^x \cos x] - (\ln 3)^2 \cdot \underbrace{\int 3^x \cos x \,\mathrm{d}x}_{=I}. \end{aligned}$$

Auflösen nach I ergibt schliesslich

$$I = \frac{3^x \big(\sin x + (\ln 3) \cdot \cos x\big)}{1 + (\ln 3)^2} + C.$$

(b) Wir substituieren $\mathrm{e}^x =: u$. Dann gilt $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}u$ und die Grenzen $x = b$, $x = a$ werden zu $u = \mathrm{e}^b$, $u = \mathrm{e}^a$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_b^a \mathrm{e}^x \sqrt{a - b\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathrm{e}^b}^{\mathrm{e}^a} (a - bu)^{1/2}\,\mathrm{d}u = \Big[-\tfrac{2}{3b}(a - bu)^{3/2}\Big]_{\mathrm{e}^b}^{\mathrm{e}^a} \\ &= \tfrac{2}{3b}\big((a - b\mathrm{e}^b)^{3/2} - (a - b\mathrm{e}^a)^{3/2}\big).\end{aligned}$$

(c) Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung des Integranden durch. Dazu finden wir durch Raten, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist. Polynomdivision liefert dann

$$x^3 - 7x^2 + 18x - 12 = (x - 1)(x^2 - 6x + 12).$$

Das Restpolynom $x^2 - 6x + 12$ kann nicht weiter zerlegt werden, da seine Diskriminante negativ ist. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{x^2 + 6}{(x - 1)(x^2 - 6x + 12)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 6x + 12}.$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnennner

$$\begin{aligned}x^2 + 6 &= A(x^2 - 6x + 12) + (Bx + C)(x - 1) \\ &= (A + B)x^2 + (-6A - B + C)x + (12A - C)\end{aligned}$$

finden wir durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}1 &= A + B, & & A = 1, \\ 0 &= -6A - B + C, & \Rightarrow \quad & B = 0, \\ 6 &= 12A - C, & & C = 6.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 6}{x^3 - 7x^2 + 18x - 12}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x - 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{6}{x^2 - 6x + 12}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x - 1| + \int \frac{2}{\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite lösen wir mittels der Substitution $\frac{1}{3}(x - 3)^2 = u^2$. Dann gilt $\mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$ und

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sqrt{3}}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{3}\arctan u + C \\ &= 2\sqrt{3}\arctan\frac{x - 3}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\int \frac{x^2+6}{x^3-7x^2+18x-12}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + 2\sqrt{3}\arctan\frac{x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

5. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich bekanntlich schreiben als Summe

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + y_{\text{hom}}(x)$$

aus einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Das charakteristische Polynom des Problems lautet $\operatorname{ch}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda+2)$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist daher gegeben durch

$$y_{\text{hom}}(x) = A + B\mathrm{e}^{-2x}.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_{\text{part}}(x) = (\alpha x+\beta)\mathrm{e}^x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y'_{\text{part}}(x) &= \alpha\mathrm{e}^x + (\alpha x+\beta)\mathrm{e}^x = (\alpha x+\alpha+\beta)\mathrm{e}^x,\\ y''_{\text{part}}(x) &= \alpha\mathrm{e}^x + (\alpha x+\alpha+\beta)\mathrm{e}^x = (\alpha x+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$3x\mathrm{e}^x \overset{!}{=} y''_{\text{part}}(x) + 2y'_{\text{part}}(x) = (3\alpha x + 4\alpha + 3\beta)\mathrm{e}^x$$

und ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 3 &= 3\alpha, \\ 0 &= 4\alpha + 3\beta, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \beta &= -\tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = (x-\tfrac{4}{3})\mathrm{e}^x + A + B\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = (x-\tfrac{1}{3})\mathrm{e}^x - 2B\mathrm{e}^{-2x}.$$

Nun müssen wir noch die Konstanten A und B so bestimmen, dass die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt sind. D.h., es muss gelten

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3} &= y(0) = -\tfrac{4}{3} + A + B, \\ 0 &= y'(0) = -\tfrac{1}{3} - 2B, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} A &= \tfrac{17}{6}, \\ B &= -\tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt als Lösung des gstellten Anfangswertproblems

$$y(x) = (x-\tfrac{4}{3})\mathrm{e}^x + \tfrac{17}{6} - \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x}.$$

Alternative Lösung:

Zunächst reduzieren wir das gegebene Anfangswertproblem mit Hilfe der Substitution $y' =: z$ auf das Problem

$$z'(x) + 2z(x) = 3x\mathrm{e}^x, \qquad z(0) = 0 \tag{1}$$

erster Ordnung. Anschliessend lösen wir das zugehörige homogene Problem

$$z'(x) + 2z(x) = 0.$$

Dessen charakteristische Gleichung lautet $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ und somit erhalten wir die allgemeine Lösung $z(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$. Für die Lösung des inhomogenen Problems (1) machen wir daher den Ansatz $z(x) = C(x)\mathrm{e}^{-2x}$ (Variation der Konstanten). Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (1) liefert

$$\begin{aligned} 3x\mathrm{e}^x \overset{!}{=} z'(x) + 2z(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{-2x} = C'(x)\mathrm{e}^{-2x} \\ \Rightarrow \quad C'(x) = 3x\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $C(x)$ durch (partielle) Integration:

$$C(x) = \int \underbrace{3x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{3x}}_{v}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{3x} - \int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + \tilde{C}.$$

Aus der Anfangsbedingung $z(0) = 0$ folgt schliesslich

$$0 \overset{!}{=} z(0) = C(0) = -\tfrac{1}{3} + \tilde{C} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{C} = \tfrac{1}{3}$$

und damit $z(x) = x\mathrm{e}^x + \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^x)$. Wegen $z(x) = y'(x)$ erhalten wir daraus $y(x)$ durch (partielle) Integration

$$\begin{aligned} y(x) &= \int x\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'}\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x \\ &= x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x + \hat{C}. \end{aligned}$$

Die Konstante $\hat{C}$ bestimmen wir aus der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{4}{3}$:

$$\tfrac{4}{3} \overset{!}{=} y(0) = -\tfrac{3}{2} + \hat{C} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{C} = \tfrac{17}{6}.$$

Insgesamt erhalten wir also als Lösung des gegebenen Anfangswertproblems

$$y(x) = x\mathrm{e}^x - \tfrac{4}{3}\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{17}{6}.$$

6. In Abhängigkeit von a, b, c schneidet die Ebene vom ersten Oktanten das Volumen

$$V(a, b, c) = \tfrac{1}{6}abc$$

ab. Die Nebenbedingung, dass der Punkt $(2, 1, 2)$ in der Ebene liegen soll, formulieren wir als

$$g(a, b, c) = \tfrac{2}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{2}{c} - 1 = 0.$$

Die Lagrangefunktion des gegebenen Problems lautet also

$$L(a,b,c,\lambda) = \tfrac{1}{6}abc + \lambda\left(\tfrac{2}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{2}{c} - 1\right)$$

mit dem Lagrange-Multiplikator λ. Die notwendigen Minimalitätsbedingungen lauten somit

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial L}{\partial a} = \tfrac{1}{6}bc - \tfrac{2\lambda}{a^2},\\
0 &= \tfrac{\partial L}{\partial b} = \tfrac{1}{6}ac - \tfrac{\lambda}{b^2},\\
0 &= \tfrac{\partial L}{\partial c} = \tfrac{1}{6}ab - \tfrac{2\lambda}{c^2},\\
0 &= \tfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \tfrac{2}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{2}{c} - 1.
\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Bedingungen folgt

$$\tfrac{1}{6}abc = \tfrac{2\lambda}{a} = \tfrac{\lambda}{b} = \tfrac{2\lambda}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{2}{a} = \tfrac{1}{b} = \tfrac{2}{c}.$$

Zusammen mit der letzten Bedingung muss also gelten

$$\tfrac{2}{a} = \tfrac{1}{b} = \tfrac{2}{c} = \tfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad a = 6,\ b = 3,\ c = 6.$$

Die gesuchte Ebene besitzt demnach die Gleichung

$$\tfrac{x}{6} + \tfrac{y}{3} + \tfrac{z}{6} = 1.$$

7. Für die Funktion $y = y(x)$ muss gelten

$$\big(x + xy(x) + y(x)\big)\cos\big(xy(x)\big) = 2. \tag{2}$$

Wenn wir $x = 0$ einsetzen, ergibt das

$$2 = \big(0 + 0 + y(0)\big)\cos 0 = y(0).$$

Um die Steigung $y'(0)$ der Kurve im Punkt $P = \big(0, y(0)\big)$ zu erhalten, differenzieren wir die Gleichung (2) nach x. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x + xy(x) + y(x)\big)\cos\big(xy(x)\big) &= \big(1 + y(x) + xy'(x) + y'(x)\big)\cos\big(xy(x)\big)\\
&\quad - \big(x + xy(x) + y(x)\big)\sin\big(xy(x)\big)\big(y(x) + xy'(x)\big).
\end{aligned}$$

Konkret für $x = 0$ ergibt sich unter Berücksichtigung, dass $y(0) = 2$:

$$0 = 3 + y'(0) \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = -3.$$

8. Wir berechnen zunächst das Volumen des Körpers K. Anstelle der kartesischen Koordinaten x und y benutzen wir dafür die Polarkoordinaten r und φ. Zu gegebenem r und φ

(bzw. x und y) läuft dann die z-Koordinate zwischen 0 und $2 + x = 2 + r\cos\varphi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(K) &= \iiint_K 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2+r\cos\varphi} 1 \,\mathrm{d}z\, r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2 + r\cos\varphi)\, r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r + r^2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \left[2r\varphi + r^2\sin\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r = \int_0^2 4\pi r\,\mathrm{d}r = \left[2\pi r^2\right]_0^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

Nach der gleichen Vorgehensweise können wir nun auch $\operatorname{vol}(K)\cdot\overline{T}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\iiint_K T(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2+r\cos\varphi} 2r\cos\varphi\,\mathrm{d}z\, r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2 + r\cos\varphi)\cdot 2r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r^2\cos\varphi + 2r^3\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \left[4r^2\sin\varphi + r^3(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 2\pi r^3\,\mathrm{d}r = \left[\tfrac{1}{2}\pi r^4\right]_0^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) + C$. Insgesamt erhalten wir für die Durchschnittstemperatur

$$\overline{T} = \frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \iiint_K T(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{8\pi}{8\pi} = 1 \quad (^\circ\mathrm{C}).$$

9. Nach dem Satz von Stokes ist die Arbeit des Vektorfeldes entlang des Randes des Kartoffelchip gleich dem Integral der Rotation

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y - x \\ x \\ z + 1 \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes über den Kartoffelchip K. Wir berechnen also im Folgenden

$$I = \iint_K \operatorname{rot} F(x,y,z)\mathrm{d}\vec{A}.$$

Wegen $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{n}\mathrm{d}A$ benötigen wir noch den Normalenvektor des Kartoffelchips im Punkt (x,y,z). Hierbei müssen wir darauf achten, dass die Richtung des Normalenvektors auch der vorgegebenen Orientierung des Kartoffelchips entspricht. In unserem

Falle gilt

$$\vec{n}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir, indem wir von den kartesischen Koordinaten x, y zu den Polarkoordinaten r, φ übergehen:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_K \begin{pmatrix} y-x \\ x \\ xy+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}A = \iint_K (-y^2 + xy - x^2 + xy + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_K (1 - r^2 + r^2 \sin(2\varphi)) r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + r^3 \sin(2\varphi))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{r^2}{2} - \tfrac{r^4}{4} + \tfrac{r^4}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sin(2\varphi)\right)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[\tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{8}\cos(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}\pi.
\end{aligned}$$

10. Wir machen den Ansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das

$$\pi^2 X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi^2 \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned}
T'(t) &= -\frac{\lambda}{\pi^2} T(t), \\
X''(x) &= -\lambda X(x).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst die erste Gleichung. Ihre Lösung lautet

$$T(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\pi^2} t}.$$

Da wir konstante Faktoren zwischen $T(t)$ und $X(x)$ austauschen können, setzen wir ohne Einschränkung $c = 1$. Nun wenden wir uns der zweiten Gleichung zu. Ihre Lösung besitzt die Form

$$X(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten α und β. Aufgrund der Randbedingungen muss gelten

$$\begin{aligned}
&0 = X(0) = \beta, \\
&0 = X(3) = \alpha \sin(3\sqrt{\lambda}) \qquad \Rightarrow \qquad 3\sqrt{\lambda} = k\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tfrac{k^2}{9}\pi^2, \;\; k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems erhalten wir anschliessend als Superposition der Lösungen für jedes $\lambda_k = \frac{k^2}{9}\pi^2$, d.h.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{9}t} \sin(\tfrac{k}{3}\pi x).$$

Die Koeffizienten c_k müssen wir so bestimmen, dass die Anfangsbedingung $u(x,0) = \sin(2\pi x)$ erfüllt ist, d.h., wir erhalten $c_6 = 1$ und $c_k = 0$ für alle $k \neq 6$. Damit lautet die endgültige Lösung des gestellten Anfangsrandwertproblems

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-4t} \sin(2\pi x).$$