D-BAUG | Analysis I/II | Winter 2014
Meike Akveld | | Theo Bühler

Prüfung

1. (a) Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q, so dass $z_1 = 2 - 3i$ eine Lösung der Gleichung

$$z^3 - 3z^2 + pz + q = 0$$

ist. Bestimmen Sie ebenfalls die weiteren Lösungen z_2 und z_3 dieser Gleichung.

(b) Bestimmen Sie die beiden komplexen Zahlen $z \neq 0$, welche die folgenden **zwei** Bedingungen erfüllen, und zeichnen Sie sie in die komplexe Zahlenebene ein:

i. $\arg(z^3) = \arg\left(\frac{z(\sqrt{3}+i)}{i}\right)$.

ii. $\left|\frac{ze^{\frac{i\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right|$.

2. Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton steigend ist und bestimmen Sie ihren Wertebereich.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

(d) Erstellen Sie eine Skizze der Graphen von f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem. Geben Sie die Asymptoten von f an und zeichnen Sie diese ein.

3. Berechnen Sie:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x.$

   (c) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$

4. Bestimmen Sie die Funktion, für die gilt: An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Graphen der Funktion proportional zur dritten Wurzel des Funktionswerts an dieser Stelle. Zudem soll der Graph dieser Funktion durch die Punkte $(0,8)$ und $(1,27)$ gehen.

5. **Beachten Sie:** In den folgenden Multiple Choice Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig. Bitte kreuzen Sie die Antworten auf dem Aufgabenblatt an. Falsche Antworten geben einen Punktabzug.

   (a) Der Koeffizient von $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$ in der Taylorreihe um $x_0 = \frac{\pi}{4}$ der Funktion $f(x) = \cos x$ ist

   - ◯ $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
   - ◯ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - ◯ $\frac{1}{12}$.
   - ◯ $\frac{\sqrt{2}}{12}$.
   - ◯ $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

   (b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4 - 2\sqrt[3]{x^2 - 1}}{5x^2 - 9\sqrt{x^3 - 7x + 19}} =$

   - ◯ 0.
   - ◯ $\frac{1}{45}$.
   - ◯ $-\frac{1}{12}$.
   - ◯ $\frac{1}{5}$.
   - ◯ Dieser Grenzwert existiert nicht.

(c) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$ ist

- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{e}$.
- ◯ 1.
- ◯ e.
- ◯ ∞.

(d) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n}(x+1)^n$ konvergiert

- ◯ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ für alle $x \in [-2, 2)$.
- ◯ für alle $x \in (-2, 2]$.
- ◯ für alle $x \in [-3, 1)$.
- ◯ für alle $x \in (-3, 1]$.

(e) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$ in ihrem Konvergenzbereich dar?

- ◯ $x \cdot e^x$.
- ◯ e^{x^2}.
- ◯ $x \cdot e^{x^2}$.
- ◯ $x \cdot (1-x^2)^{-1}$.
- ◯ $-\frac{\ln(1-x^2)}{x}$.

6. Die Ebene $x + y + 2z = 2$ schneidet das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ in einer Ellipse. Finden Sie die Punkte auf dieser Ellipse, welche den grössten und den kleinsten Abstand zum Ursprung haben.

7. Betrachten Sie die Fläche S, die durch $z = x(1-x)y(1-y)$ mit $0 \le x \le 1$ und $0 \le y \le 1$ gegeben ist. Sei $K(x, y, z) = (0, 0, x)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_S K \cdot n \, \mathrm{d}o,$$

wobei n der nach oben zeigende Normalenvektor der Länge 1 von S ist.

8. Berechnen Sie die Fläche des Gebiets, welches vom x-Achsenabschnitt mit $-\pi \le x \le 0$ und der Kurve

$$\sqrt{x^2+y^2} - \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}}\right) = 0, \qquad y > 0,$$

eingeschlossen ist.

9. Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = X(x)Y(y)$ die Eigenwerte λ_{kl} und Eigenfunktionen u_{kl} des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} 2u_{xxy} + u_{yy} + \lambda u &= 0 && \text{in } G \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \{0, 2\pi\} \times [0, \pi] \\ u &= 0 && \text{auf } [0, 2\pi] \times \{0, \pi\} \end{aligned}$$

auf dem Gebiet $G = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

10. **Beachten Sie:** In den folgenden Multiple Choice Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig. Bitte kreuzen Sie die Antworten auf dem Aufgabenblatt an. Falsche Antworten geben einen Punktabzug.

(a) Ein Gebiet G in der Ebene habe die Fläche $|G| = 3$. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $T(x, y) = (x - 2y, 3x + 4y)$. Was ist die Fläche des Gebiets $T(G)$?

○ $|T(G)| = 0.3.$

○ $|T(G)| = 1/3.$

○ $|T(G)| = 10.$

○ $|T(G)| = 27.$

○ $|T(G)| = 30.$

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe den Gradienten $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 4y \\ 8z \end{pmatrix}.$

Was folgt für f?

○ $\Delta f(x, y, z) = 6x + 12.$

○ $\Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

○ $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 4z^2.$

○ $\Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

○ $\Delta f(x, y, z) = 3x^2 + 4y + 8z.$

(c) Sei G der Kreisring $\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Ein Vektorfeld $K(x,y)$ auf G erfülle $\operatorname{rot} K = 0$.

- ◯ Es gibt immer eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, so dass $\nabla f = K$.
- ◯ Es gibt nie eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = K$.
- ◯ Die gegebenen Informationen reichen nicht aus, um zu entscheiden, ob es eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\nabla f = K$.

(d) Der Rotationskörper, den man erhält, wenn man die Parabel $y = x^2 + 1$ mit $-1 \le x \le 1$ um die x-Achse rotiert, hat folgendes Volumen:

- ◯ $\frac{51\pi}{16}$.
- ◯ 3π.
- ◯ $\frac{52\pi}{15}$.
- ◯ 4π.
- ◯ $\frac{56\pi}{15}$.

(e) Welches ist die präziseste Beschreibung der durch

$$\Phi(x,\phi) = (4x^2, 3\sin\phi, 2\cos\phi), \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

parametrisierten Fläche?

- ◯ Mantel eines geraden Kreiszylinders.
- ◯ Mantel eines echt schiefen Kreiszylinders.
- ◯ Mantel eines geraden elliptischen Zylinders.
- ◯ Parabolisches Ellipsoid.
- ◯ Elliptisches Paraboloid.