Musterlösung Prüfung

1. (a) Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten p und q, so dass $z_1 = 2 - 3i$ eine Lösung der Gleichung

$$z^3 - 3z^2 + pz + q = 0$$

ist. Bestimmen Sie ebenfalls die weiteren Lösungen z_2 und z_3 dieser Gleichung.

(b) Bestimmen Sie die beiden komplexen Zahlen $z \neq 0$, welche die folgenden **zwei** Bedingungen erfüllen, und zeichnen Sie sie in die komplexe Zahlenebene ein:

i. $\arg(z^3) = \arg\left(\dfrac{z(\sqrt{3}+i)}{i}\right)$.

ii. $\left|\dfrac{ze^{\frac{i\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\dfrac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right|$.

Lösung:

Teil a): Wenn z_1 eine Lösung ist, dann auch die komplex Konjugierte

$$z_2 = \overline{z_1} = 2 + 3i.$$

Durch Polynomdivision durch

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i) = z^2 - 4z + 13$$

spalten wir diese beiden Löesungen von der Gleichung ab:

$$\begin{aligned}
\big(z^3 - 3z^2 + pz + q\big) : \big(z^2 - 4z + 13\big) &= z + 1 + \frac{pz - 9z + q - 13}{z^2 - 4z + 13} \\
z^2 + pz - 13z + q \qquad & \\
pz - 9z + q - 13 \qquad &
\end{aligned}$$

und lesen ab

$$\begin{aligned}
z_3 &= -1 \\
p &= 9 \\
q &= 13.
\end{aligned}$$

Alternative: Wenn z_1 eine Lösung ist, dann auch die komplex Konjugierte

$$z_2 = \overline{z_1} = 2 + 3i.$$

Nun machen wir den unbestimmten Ansatz

$$\begin{aligned}
& (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z^2 - 4z + 13)(z - z_3) = z^3 - 3z^2 + pz + q \\
\Leftrightarrow \quad & z^3 + (-z_3 - 4)z^2 + (4z_3 + 13)z - 13z_3 = z^3 - 3z^2 + pz + q
\end{aligned}$$

und bekommen durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
z_3 + 4 = 3 \quad &\Rightarrow \quad z_3 = -1 \\
4z_3 + 13 = p \quad &\Rightarrow \quad p = 9 \\
-13z_3 = q \quad &\Rightarrow \quad q = 13.
\end{aligned}$$

Teil b): Wir betrachten zuerst das Argument:

$$\begin{aligned}
& \arg(z^3) = \arg\left(\frac{z(\sqrt{3}+i)}{i}\right) \quad \mod(2\pi) \\
\Leftrightarrow \quad & 3\arg(z) = \arg(z) + \arg(\sqrt{3}+i) - \arg(i) \quad \mod(2\pi) \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arg(z) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} \quad \mod(2\pi) \\
\Leftrightarrow \quad & \arg(z) = -\frac{\pi}{6} \quad \mod(\pi),
\end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned}
\arg(z) &= -\frac{\pi}{6} \\
\arg(z) &= \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

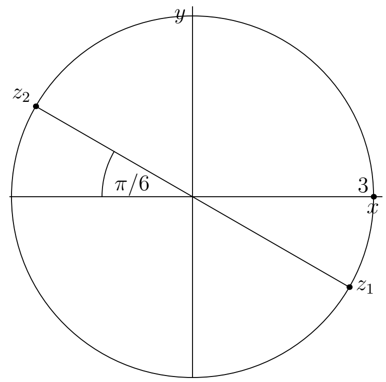
Als nächstes der Betrag:

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{ze^{\frac{i\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right| \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{|z|\left|e^{\frac{i\pi}{6}}\right|}{|1+i|} = \frac{|z|^2}{\left|\sqrt{2}-4i\right|} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \frac{|z|^2}{\sqrt{18}} \\
\Leftrightarrow \quad & |z| = 3.
\end{aligned}$$

Also gibt es die zwei Lösungen

$$z = 3e^{-\frac{\pi}{6}i}$$
$$z = 3e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

im Koordinatensystem eingezeichnet:



2. Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion f streng monoton steigend ist und bestimmen Sie ihren Wertebereich.
   (c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.
   (d) Erstellen Sie eine Skizze der Graphen von f und f^{-1} im gleichen Koordinatensystem. Geben Sie die Asymptoten von f an und zeichnen Sie diese ein.

Lösung:

Teil a): Der Wert $f(x)$ ist für reelle x genau dann reell, wenn

$$\cosh(x) \neq 0,$$

was für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Also ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$.

Teil b): Wir leiten ab:

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = \frac{1}{\cosh(x)^2} > 0,$$

also ist f streng monoton steigend.

Für den Wertebereich beobachten wir, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1,$$

also werden wegen der Stetigkeit und der strengen Monotonie von f alle Werte im Intervall $(-1,1)$ angenommen.

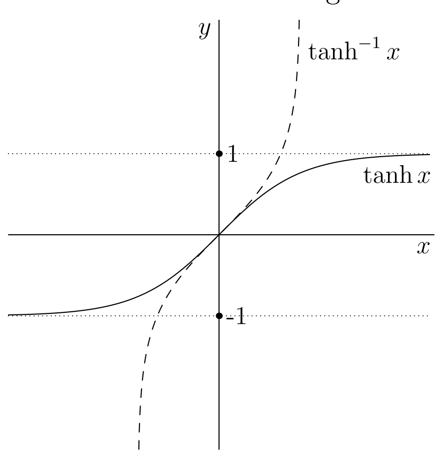
Teil c): Wir rechnen für $-1 < y < 1$

$$\begin{aligned}
& & \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} &= y \\
&\Leftrightarrow & e^{2x}(1-y) &= y+1 \\
&\Leftrightarrow & e^{2x} &= \frac{1+y}{1-y} \\
&\Leftrightarrow & 2x &= \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right).
\end{aligned}$$

Teil d): Die Asymptoten sind die Geraden

$$y = 1 \quad \text{und} \quad y = -1.$$

Somit sieht die Skizze folgendermassen aus:



3. Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$

Lösung:

Teil a): Wir verwenden die Substitution

$$y = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

und bekommen

$$\int \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2y^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2y} + c = \frac{-1}{2(x^2-2x+3)} + c.$$

Teil b): Zuerst machen wir eine Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(x^3 + \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\right) : \left(x^2 - x - 6\right) = x + 1 + \dfrac{7x+8}{x^2-x-6}, \\ \qquad\quad x^2 + 6x + 2 \\ \qquad\qquad\quad 7x + 8 \end{array}$$

und machen eine Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{7x+8}{x^2-x-6} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A + 2B}{x^2-x-6} \\ \Rightarrow \qquad A + B &= 7 \\ -3A + 2B &= 8 \\ \Rightarrow \qquad 5B &= 29 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{29}{5} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Nun integrieren wir separat

$$\begin{aligned} \int x + 1\,dx &= \frac{x^2}{2} + x + c \\ \frac{6}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx &= \frac{6}{5}\ln|x+2| + c \\ \frac{29}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx &= \frac{29}{5}\ln|x-3| + c \end{aligned}$$

und setzen zusammen

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{5}(6\ln|x-3| + 29\ln|x+2|) + c.$$

Teil c): Mit einem kleinen Trick integrieren wir partiell

$$\begin{aligned}
\int \ln(x^2+1)\,dx &= \int 1\cdot\ln(x^2+1)\,dx \\
&= x\ln(x^2+1) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
&= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}\,dx \\
&= x\ln(x^2+1) - \int 2\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx \\
&= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x) + c.
\end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die Funktion, für die gilt: An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Graphen der Funktion proportional zur dritten Wurzel des Funktionswerts an dieser Stelle. Zudem soll der Graph dieser Funktion durch die Punkte $(0,8)$ und $(1,27)$ gehen.

   Lösung: Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
y'(x) &= a\sqrt[3]{y(x)} \\
y(0) &= 8 \\
y(1) &= 27.
\end{aligned}$$

   Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= a\sqrt[3]{y} \\
\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} &= a\,dx \\
\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy &= \int a\,dx \\
\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} &= ax + c \\
y &= (bx+d)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

und setzen ein

$$\begin{aligned} x=0 \quad &\Rightarrow \quad & d^{\frac{3}{2}}=8 \quad &\Rightarrow \quad d=4 \\ x=1 \quad &\Rightarrow \quad & (b+4)^{\frac{3}{2}}=27 \quad &\Rightarrow \quad b=5. \end{aligned}$$

Die Funktion ist also

$$y(x)=(5x+4)^{\frac{3}{2}}.$$

5. **Beachten Sie:** In den folgenden Multiple Choice Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig. Bitte kreuzen Sie die Antworten auf dem Aufgabenblatt an. Falsche Antworten geben einen Punktabzug.

(a) Der Koeffizient von $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$ in der Taylorreihe um $x_0=\frac{\pi}{4}$ der Funktion $f(x)=\cos x$ ist

○ $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

○ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

○ $\frac{1}{12}$.

√ ○ $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

○ $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4-2\sqrt[3]{x^2-1}}{5x^2-9\sqrt{x^3-7x+19}}=$

○ 0.

○ $\frac{1}{45}$.

√ ○ $-\frac{1}{12}$.

○ $\frac{1}{5}$.

○ Dieser Grenzwert existiert nicht.

(c) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$ ist

- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{e}$.
- ◯ 1.
- √ ◯ e.
- ◯ ∞.

(d) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} (x+1)^n$ konvergiert

- ◯ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ für alle $x \in [-2, 2)$.
- ◯ für alle $x \in (-2, 2]$.
- ◯ für alle $x \in [-3, 1)$.
- √ ◯ für alle $x \in (-3, 1]$.

(e) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$ in ihrem Konvergenzbereich dar?

- ◯ $x \cdot e^x$.
- ◯ e^{x^2}.
- √ ◯ $x \cdot e^{x^2}$.
- ◯ $x \cdot (1-x^2)^{-1}$.
- ◯ $-\frac{\ln(1-x^2)}{x}$.

6. Die Ebene $x + y + 2z = 2$ schneidet das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ in einer Ellipse. Finden Sie die Punkte auf dieser Ellipse, welche den grössten und den kleinsten Abstand zum Ursprung haben.

Lösung: Wir benutzen Lagrangemultiplikatoren. Zu minimieren ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g(x) &= x + y + 2z - 2 = 0 \\ h(x) &= x^2 + y^2 - z = 0. \end{aligned}$$

Wir machen den Ansatz

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) + \mu \nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

und bekommen daraus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(1+\mu)x + \lambda = 0 \quad &\overset{\mu \neq -1}{\Rightarrow} \quad x = -\frac{\lambda}{2(1+\mu)} \\ 2(1+\mu)y + \lambda = 0 \quad &\overset{\mu \neq -1}{\Rightarrow} \quad y = -\frac{\lambda}{2(1+\mu)} \\ 2z + 2\lambda - \mu = 0. & \end{aligned}$$

Falls $\mu = -1$, folgt $\lambda = 0$ und die letzte Gleichung wird zu

$$2z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z < 0,$$

was der Bedingung $h(x) = 0$ widerspricht. Also folgt wegen $\mu \neq -1$

$$x = y.$$

Nun werden die Nebenbedingungen zu

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 2 = 2x + 2z - 2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - z = 2x^2 - z &= 0 \\ \Rightarrow \qquad 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2} \\ & \qquad\qquad \Rightarrow \quad z = 2 \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f(-1,-1,2) = 6$$
$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

ist der gesuchte ursprungsnächste Punkt $(1/2, 1/2, 1/2)$ und der gesuchte ursprungsfernste Punkt $(-1,-1,2)$.

7. Betrachten Sie die Fläche S, die durch $z = x(1-x)y(1-y)$ mit $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ gegeben ist. Sei $K(x, y, z) = (0, 0, x)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_S K \cdot n \,\mathrm{do},$$

wobei n der nach oben zeigende Normalenvektor der Länge 1 von S ist.

Lösung mit Gauss: Da der Rand von S das leere Einheitsquadrat in der xy-Ebene ist, schliessen S und das volle Einheitsquadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ einen Körper V ein.

Der nach aussen zeigende Normalenvektor auf Q ist $(0, 0, -1)$. Dann gilt mit dem Satz von Gauss

$$\begin{aligned}\int_S K \cdot n \, do &= \int_V \operatorname{div} K \, dV - \int_Q K \cdot n \, do \\ &= \int_V 0 \, dV - \int_Q K \cdot n \, do \\ &= 0 - \int_0^1 \int_0^1 -x \, dx \, dy = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lösung mit Stokes: Wir beobachten, dass für

$$L(x, y, z) = (0, x^2/2, 0)$$

gilt

$$K(x, y, z,) = \operatorname{rot} L(x, y, z).$$

Den Rand von S parametrisieren wir für $t \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, 0, 0) \\ \gamma_2(t) &= (1, t, 0) \\ \gamma_3(t) &= (1-t, 1, 0) \\ \gamma_4(t) &= (0, 1-t, 0).\end{aligned}$$

Somit ist das Integral mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int_S K \cdot n \, do &= \int_{\partial S} L \, dr \\
&= \int_0^1 L(\gamma_1(t)) \cdot \dot\gamma_1(t) + L(\gamma_2(t)) \cdot \dot\gamma_2(t) + L(\gamma_3(t)) \cdot \dot\gamma_3(t) + L(\gamma_4(t)) \cdot \gamma_4(t) \, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1-t)^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Direkte Lösung: Der nach oben zeigende Normalenvektor der durch

$$\Phi(x, y) = (x, y, x(1-x)y(1-y)) = (x, y, xy - x^2y - xy^2 + x^2y^2)$$

parametrisierten Fläche ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
n = \Phi_x \times \Phi_y &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y - 2xy - y^2 + 2xy^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x - x^2 - 2xy + 2xy^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y + 2xy + y^2 - 2xy^2 \\ -x + x^2 + 2xy - 2xy^2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also ist das Integral gleich

$$\int_S K \cdot n \, do = \int_0^1 \int_0^1 K(\Phi(x, y)) \cdot n \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy = \frac{1}{2}.$$

8. Berechnen Sie die Fläche des Gebiets, welches vom x-Achsenabschnitt mit $-\pi \le x \le 0$ und der Kurve

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\right) = 0, \qquad y > 0,$$

eingeschlossen ist.

Lösung:

Wir sehen, dass der Wurzelausdruck umgeformt

$$\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist und daher wird die Kurve in Polarkoordinaten wegen $y > 0$ beschrieben durch

$$r = \varphi$$

und mit der Leibnizschen Sektorformel bekommen wir für den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi^2 \, d\varphi = \frac{\pi^3}{6}.$$

9. Bestimmen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,y) = X(x)Y(y)$ die Eigenwerte λ_{kl} und Eigenfunktionen u_{kl} des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} 2u_{xxy} + u_{yy} + \lambda u &= 0 && \text{in } G \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \{0, 2\pi\} \times [0, \pi] \\ u &= 0 && \text{auf } [0, 2\pi] \times \{0, \pi\} \end{aligned}$$

auf dem Gebiet $G = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Lösung: Mit dem Separationsansatz wird die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} & 2X''(x)Y'(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & X(x)(Y''(y) + \lambda Y(y)) = -2X''(x)Y'(y) \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y) + \lambda Y(y)}{2Y'(y)} \overset{!}{=} \omega, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt beide Seiten konstant setzen konnten, da sie von verschiedenen unabhängigen Variablen abhängen. Damit bekommen wir die zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X''(x) + \omega X(x) &= 0 \\ Y''(y) - 2\omega Y(y) + \lambda Y(y) &= 0. \end{aligned}$$

Mit Methoden der Analysis I bestimmen wir die allgemeinen Lösungen für X und Y:

$$\begin{aligned}
X(x) &= Ae^{\sqrt{-\omega}x} + Be^{-\sqrt{-\omega}x} \\
Y(y) &= e^{\omega y}\left(Ce^{\sqrt{\omega^2-\lambda}y} + De^{-\sqrt{\omega^2-\lambda}y}\right).
\end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(A\sqrt{-\omega} - B\sqrt{-\omega}\right)Y(y) = 0 &&\Rightarrow \quad A = B. \\
\frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A\left(e^{\sqrt{-\omega}2\pi} + e^{-\sqrt{-\omega}2\pi}\right)Y(y) = 0 &&\Rightarrow \quad \omega = \frac{k^2}{4} \\
u(x,0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad X(x)\left(C + D\right) = 0 &&\Rightarrow \quad C = -D \\
u(x,\pi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad X(x)Ce^{\omega\pi}\left(e^{\sqrt{\omega^2-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\omega^2-\lambda}\pi}\right) = 0 &&\Rightarrow \quad \omega^2 - \lambda = -l^2
\end{aligned}$$

für $k, l \in \mathbb{Z}$. Damit bekommen wir die Eigenwerte

$$\lambda_{k,l} = \frac{k^4}{16} + l^2$$

und die dazugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{k,l} = e^{\frac{k^2}{4}y}\sin\left(\frac{k}{2}x\right)\sin\left(ly\right).$$

10. **Beachten Sie:** In den folgenden Multiple Choice Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig. Bitte kreuzen Sie die Antworten auf dem Aufgabenblatt an. Falsche Antworten geben einen Punktabzug.

(a) Ein Gebiet G in der Ebene habe die Fläche $|G| = 3$. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung gegeben durch $T(x, y) = (x - 2y, 3x + 4y)$. Was ist die Fläche des Gebiets $T(G)$?

○ $|T(G)| = 0.3.$

○ $|T(G)| = 1/3.$

○ $|T(G)| = 10.$

○ $|T(G)| = 27.$

√ ○ $|T(G)| = 30.$

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe den Gradienten $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 4y \\ 8z \end{pmatrix}.$

Was folgt für f?

√ ○ $\Delta f(x, y, z) = 6x + 12.$

○ $\Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

○ $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 4z^2.$

○ $\Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$

○ $\Delta f(x, y, z) = 3x^2 + 4y + 8z.$

(c) Sei G der Kreisring $\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Ein Vektorfeld $K(x,y)$ auf G erfülle $\operatorname{rot} K = 0$.

- ◯ Es gibt immer eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, so dass $\nabla f = K$.
- ◯ Es gibt nie eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = K$.
- √ ◯ Die gegebenen Informationen reichen nicht aus, um zu entscheiden, ob es eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\nabla f = K$.

(d) Der Rotationskörper, den man erhält, wenn man die Parabel $y = x^2 + 1$ mit $-1 \leq x \leq 1$ um die x-Achse rotiert, hat folgendes Volumen:

- ◯ $\frac{51\pi}{16}$.
- ◯ 3π.
- ◯ $\frac{52\pi}{15}$.
- ◯ 4π.
- √ ◯ $\frac{56\pi}{15}$.

(e) Welches ist die präziseste Beschreibung der durch

$$\Phi(x,\phi) = (4x^2, 3\sin\phi, 2\cos\phi), \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

parametrisierten Fläche?

- √ ◯ Mantel eines geraden Kreiszylinders.
- ◯ Mantel eines echt schiefen Kreiszylinders.
- ◯ Mantel eines geraden elliptischen Zylinders.
- ◯ Parabolisches Ellipsoid.
- ◯ Elliptisches Paraboloid.