

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Einführung

Grundbegriffe bei Zufallsexperimenten

Grundraum Ω	Menge <i>aller</i> möglichen Ausgänge
Elementarereignis $\omega \in \Omega$	Einzelner Ausgang
Ereignis $A \subseteq \Omega$	Sammlung von Elementarereignissen

Tricks mit Mengen

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ (disjunkte Vereinigung)}$$

Axiome

$$(A1) 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$(A2) \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$(A3) \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \text{ falls } A, B \text{ disjunkt}$$

(bzw. auch allgemeiner für abzählbar viele disjunkte A_j 's)

Rechenregeln

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$B \subseteq A: \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

$$B \subseteq A: \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle

Allgemein

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ (endlich oder abzählbar)}$$

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} \mathbb{P}(\omega_k),$$

$$\text{Bsp: } A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_7\} : \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_7)$$

Modell von Laplace

Alle Elementarereignisse sind *gleich* wahrscheinlich

$$\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{|\Omega|}, |\Omega| < \infty$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ (Anzahl günstige Fälle durch Anzahl mögliche Fälle)}$$

Unabhängigkeit

Definition

$$A, B \text{ unabhängig} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Via bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A) \text{ bzw. } \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A , wenn wir *wissen*, dass B eingetreten ist?

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{“Wahrscheinlichkeit von } A \text{ gegeben } B\text{”}$$

Einige Rechenregeln

$\mathbb{P}(\cdot | B)$ mit B *fix* erfüllt alle Regeln für eine Wahrscheinlichkeit

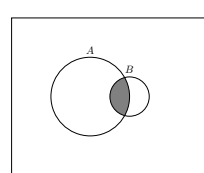
$$\text{Bsp: } \mathbb{P}(A^c | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Tücken

Allgemein: Intuition bei bedingten Wahrscheinlichkeiten schwierig

Hilfsbild:



$$\text{i.A.: } \mathbb{P}(A | B) \neq \mathbb{P}(B | A)$$

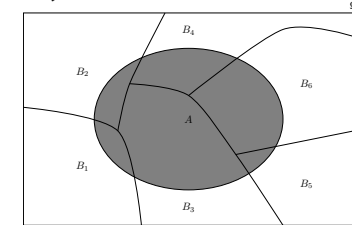
$$\text{i.A.: } \mathbb{P}(A | B) \neq 1 - \mathbb{P}(A | B^c)$$

Wichtige Sätze

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Idee: Wahrscheinlichkeit aufteilen

Voraussetzung: B_j Partition von Ω , $j = 1, \dots, k$



$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A | B_j) \mathbb{P}(B_j)$$

Satz von Bayes

Idee: Bedingte Wahrscheinlichkeit umkehren

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

In der Situation des Satzes der totalen W'keit:

$$\mathbb{P}(B_i | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_i) \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{l=1}^k \mathbb{P}(A | B_l) \mathbb{P}(B_l)}$$