

Dies ist ein Teil meines Skriptes für  
Bau-Ingenieure. Es kann aber auch  
für Sie nützlich sein.

## 1.2 Begriffe aus der Mengenlehre



Man hat versucht, dreijährigen Kindern die Mengenlehre beizubringen und bei einigen Kindern hat das nicht so gut funktioniert. Hoffentlich geht es mit uns besser.

Jeder hat eine naive Idee, was mit dem Wort Menge gemeint ist. Wir wollen unsere Notation und Konzepte fixieren und vertiefen. Hier ist die Definition einer Menge, welche Georg Cantor in 1900 gegeben hat:

**Definition 10** (Cantor). Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Später hat Russel gezeigt, dass diese Definition Widersprüche enthält. Am Ende dieses Teils werde ich kurz etwas dazu sagen. Auf jedem Fall ist diese Definition für uns hinreichend genau, weil die Mengen, mit denen wir uns beschäftigen werden, harmlos sind und keine Widersprüche enthalten.

Mengen sind überall - die Menge der Studenten dieses Kurses, die Menge der Erstsemestler an der ETH, und so weiter. Aber wir müssen uns darauf einigen, wie man Mengen schreiben soll.

Was meint Cantor mit dem Begriff »das Ganze«? Salopp gesagt: Bei einer Menge können wir an einen Beutel denken, der bestimmte Dinge enthält. Zwei Beutel, die die gleichen Dinge enthalten, wollen wir als gleich betrachten. Und die Objekte, die in in diesem Beutel drin oder nicht drin sind, nennen wir Elemente. Wir verwenden die folgende Notation: Normalerweise bezeichnen wir Mengen mit Grossbuchstaben  $A, B, \dots$  und manchmal mit gewissen Dekorationen:  $\mathbb{A}, \mathcal{P}, \mathfrak{L}$  usw. Elemente der Mengen bezeichnet man normalerweise mit kleinen Buchstaben:  $a, b, \dots, x, y, \dots$ . Um Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit auszudrücken, verwenden wir das Zeichen  $\in$ . Zum Beispiel bedeutet,

$$x \in M$$

(gesprochen » $x$  ist Element von  $M$ « oder » $x$  ist in  $M$ «), dass das Element  $x$  zur Menge  $M$  gehört. Analog bedeutet  $x \notin M$ , dass  $x$  kein Element von  $M$  ist.

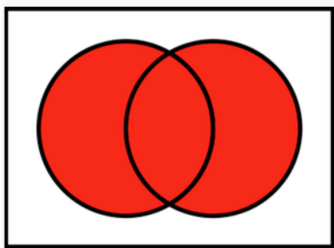
Jetzt können wir auch Teilmengen definieren: Eine Menge  $A$  heisst Teilmenge einer Menge  $B$ , wenn alle Elemente von  $A$  auch Elemente von  $B$  sind. Man schreibt dafür  $A \subset B$  oder auch  $B \supset A$ .

### 1.2.1 Operationen zwischen Mengen

Wir besprechen drei grundlegende Operationen zwischen Mengen. Jede Operation hat ein entsprechendes sogenanntes Venn-Diagramm, welches die Operation veranschaulicht.

#### 1. Die Vereinigung zweier Mengen

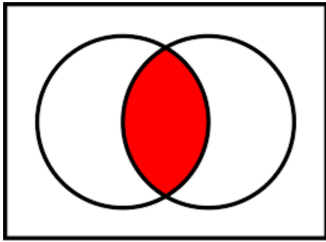
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Die Vereinigung, gesprochen » $A$  vereinigt mit  $B$ « enthält alle Elemente, die in  $A$  oder  $B$  enthalten sind.

#### 2. Der Durchschnitt zweier Mengen

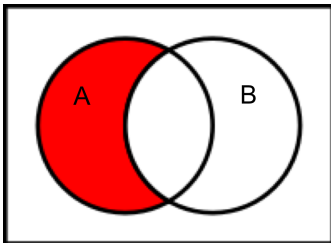
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Der Durchschnitt „ $A$  geschnitten mit  $B$ “ enthält alle Elemente, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten sind.

### 3. Die Differenz

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Die Differenz „ $A$  ohne  $B$ “ enthält alle Elemente von  $A$ , die kein Element von  $B$  sind.

*Bemerkung 11.* Es gelten  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = B \cup A$  aber üblicherweise  $A \setminus B \neq B \setminus A$ .

Per Definition haben wir

$$A \subset B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

und genau so beweisen wir  $A \subset B$ : Man nimmt ein Element  $x$  von  $A$  und zeigt, dass  $x$  auch zu  $B$  gehört.

Wenn  $A$  keine Teilmenge von  $B$  ist, das heißt, wenn es ein Element  $a \in A$  gibt, sodass  $a \notin B$ , notieren wir das als  $A \not\subset B$ .

*Bemerkung 12.* Die Symbole  $\subset$ ,  $\subseteq$  haben dieselbe Bedeutung! Das ist nicht wie die Ungleichheitszeichen  $<$  und  $\leq$ . Beispielsweise ist die Aussage  $A \subset A$  wahr. Wenn wir ausdrücken möchten, dass  $A$  eine Teilmenge von  $B$  ist und dass sie nicht gleich  $B$  ist, dann schreiben wir  $A \subsetneq B$ . Das ist natürlich ganz anders als  $A \not\subset B$ .

Wir wollen auch eine Menge beschreiben, die überhaupt keine Elemente enthält. Diese Menge nennt man *die leere Menge* und man bezeichnet sie mit  $\emptyset$  (manchmal auch mit  $\{\}$ ). Somit ist auch  $A \setminus A = \emptyset$  eine Menge, die leere Menge.

Ich gehe davon aus, dass Sie mit diesen Begriffen schon vertraut sind. Wenn nicht, können Sie die Aufgaben in Dürschnabel [2] §1.1] lösen.

### 1.2.2 Eine kleine Vertiefung:

Wie versprochen, erzähle ich jetzt kurz, warum die naive Definition von Cantor Widersprüche enthält. Dazu erzähle ich eine kleine Geschichte:

*In einem kleinen Dorf namens Barbiiierien, gibt es einen Barbier namens Bart. Bart hat eine sehr besondere Arbeit. **Bart rasiert alle Menschen, die sich nicht selbst rasieren, und nur die.** (Also diejenigen, die zu faul sind, sich selbst zu rasieren, und niemand anders). Anders gesagt, er rasiert ALLE Menschen von Barbiiierien, nur nicht die, die sich selbst rasieren. Und dann stellt sich die Frage: »**Rasiert Bart sich selbst oder nicht?**«.*

Es gibt natürlich nur zwei Optionen: Entweder rasiert er sich selbst, oder er rasiert sich nicht selbst. Wir müssen einfach überprüfen, welche dieser Optionen Sinn macht.

Option 1: Wenn Bart sich selbst rasiert, dann kann er sich selbst nicht rasieren, weil Bart nur diejenigen rasiert, die sich selbst nicht rasieren!

**Er rasiert sich selbst  $\implies$  er rasiert sich selbst nicht**

Also haben wir einen Widerspruch.

Versuchen wir mal die andere Option:

Option 2: Selbst wenn Bart sich selbst NICHT rasiert, dann müsste er sich doch eigentlich trotzdem selbst rasieren, weil er alle Menschen rasiert, die sich nicht selbst rasieren!

**Er rasiert sich selbst nicht  $\implies$  er rasiert sich selbst.** Nochmals einen Widerspruch...

Das ist doch der reinste Wahnsinn. Aber machen Sie sich keine Sorgen. Erstens haben sich vertrauenswürdige Mathematiker damit beschäftigt, Cantors Definition so zu verändern, dass solche Paradoxa nicht entstehen können. Zweitens sind die Mengen, mit denen wir uns beschäftigen werden, harmlos und enthalten keine Widersprüche. Für ein bisschen mehr Details, lesen Sie in Arens [1, Seite 29]

## 1.3 Zahlenmengen

### Leopold Kronecker 1823-1891



Die natürlichen Zahlen hat uns  
der liebe Gott gegeben, alles  
andere ist Menschenwerk.

In diesem Abschnitt besprechen wir die Erweiterung des Zahlenbereichs von den natürlichen Zahlen bis zu den reellen Zahlen und im nächsten Abschnitt fangen wir schon mit den komplexen Zahlen an. Es war dennoch ein Weg von mehreren tausend Jahren von den natürlichen Zahlen bis zur Entdeckung der komplexen Zahlen. Grob gesagt waren die einzelnen Entwicklungsschritte

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup \{0\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

wobei

- $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N} \cup \{0\}$  die natürlichen Zahlen mit der Null
- $\mathbb{Z}$  die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$  die rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$  die komplexen Zahlen

sind. In diesem Kapitel werden wir bis zur Entdeckung (Erfindung?) der reellen Zahlen reisen.

### 1.3.1 Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen haben wir als Kinder kennengelernt. Als natürliche Zahlen bezeichnet man die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Man könnte glauben, dass diese Zahlen schon immer da waren, wie Kronecker gesagt hat<sup>4</sup>.

Hingegen war, was sich heute gedanklich kaum mehr nachvollziehen lässt, schon die Einführung der Null ein gewaltiger intellektueller Sprung. Aber darüber wollen wir jetzt nicht sprechen. Wer mehr über die Geschichte erfahren will, dem empfehlen wir den Podcast »in our time« von BBC. [\(LINK\)](#)

Inzwischen allerdings ist es durchaus üblich, die Null den natürlichen Zahlen zuzurechnen und wir werden (wie im Buch von Dürrschnabel [\[2\]](#))  $\mathbb{N}$  für die Menge  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  schreiben.

#### 1.3.1.1 Die vollständige Induktion

**Zwei einführende Beispiele** Für Aussagen über die natürlichen Zahlen gibt es eine tolle Beweismethode, die die vollständige Induktion heisst. Wir erwähnen zuerst zwei Probleme, die sich mit Induktion schön lösen lassen. Im Unterricht werden wir das folgende Problem besprechen.

**Problem 13.** Denken Sie an ein grosses Schachbrett, das  $16 \times 16$  Quadrate hat (übliches Schachbrett hat  $8 \times 8$  Quadrate). Nun hat jemand irgendein Quadrat entfernt und fragt uns, ob wir dieses Brett mit diesen sogenannten Trominos



bedecken können. Genauer gesagt haben wir also zwei Fragen:

1. Ist so ein Fliesenlegen möglich?
2. Wenn es möglich ist, wie können wir ein konkretes Fliesenlegen finden?

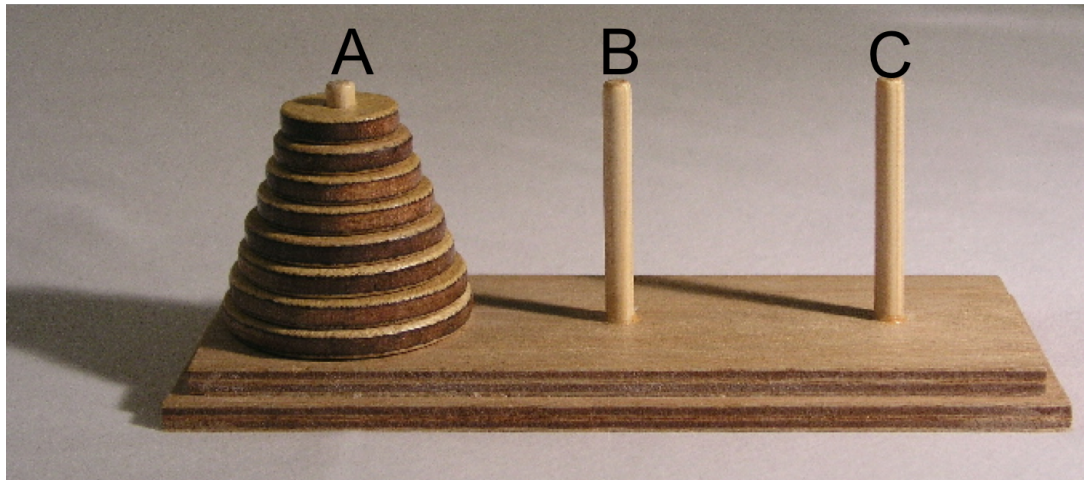
**Lösung.** Die Folien dazu finden Sie nach der Vorlesung im diesem [LINK](#).

Hier eine zweite Herausforderung

**Problem 14** (Türme von Hanoi). Das ist ein berühmtes Knobel- und Geduldsspiel.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Er hat es eigentlich mit den ganzen Zahlen gesagt, aber wir haben es leicht bearbeitet...

<sup>5</sup>Das folgende Bild ist CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=228623>



Das Spiel besteht aus drei gleich großen Stäben A, B und C, auf die mehrere gelochte Scheiben gelegt werden, welche alle verschieden gross sind. Zu Beginn liegen alle Scheiben auf Stab A, der Größe nach geordnet, mit der grössten Scheibe unten und der kleinsten oben. Ziel des Spiels ist es, den kompletten Scheiben-Stapel von A nach C zu versetzen. Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stabs auf einen der beiden anderen Stäbe gelegt werden, vorausgesetzt, dort liegt nicht schon eine kleinere Scheibe. Folglich sind zu jedem Zeitpunkt des Spiels die Scheiben auf jedem Feld der Grösse nach geordnet. Zwei Fragen:

1. Können Sie es schaffen? Sie können es in diesem App versuchen: [LINK](#).
2. Der Legende nach müssen indische Mönche im grossen Tempel zu Benares, im Mittelpunkt der Welt, einen Turm aus 64 goldenen Scheiben versetzen. Sie verschieben eine Scheibe jede Sekunde, und sie machen niemals Fehler. Wenn ihnen das gelungen ist, wird das Ende der Welt kommen. Wenn die Mönche jetzt anfangen, wann sollten wir dieses Ende erwarten?

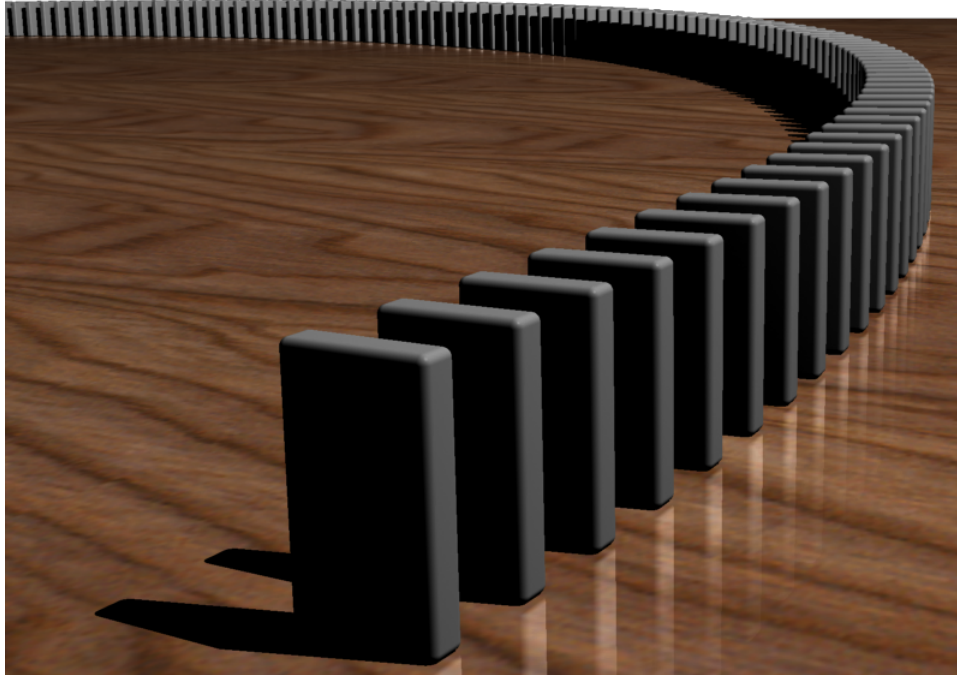
Wenn es Ihnen gelungen ist, die Türme mit 7 Scheiben zu lösen, sind Sie entweder verrückt oder haben Sie die Idee der vollständigen Induktion verstanden.

**Erklärung des Prinzips** Wie wir am Ende des Trominos Beispiels erklärt haben, ist der Herz eines Beweises mit vollständiger Induktion, eine Brücke zwischen Aussagen zu bauen. Wenn man dann alle Brücken gebaut und auch den Anfang gezeigt hat, kann man bis zu einer beliebige Aussage ankommen. Das ist wie eine »Beweis-Welle«.

Eine andere häufig zitierte Analogie zu dieser Vorgehensweise sind Dominos<sup>6</sup>:

---

<sup>6</sup>Bild von CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1017771>



Will man erreichen, dass dabei alle Steine umfallen, dann genügen dazu zwei Dinge:

1. Jeder Stein muss beim Fallen auch den nächsten umwerfen: Bei uns, aus der Gültigkeit der Aussage  $A(n)$  folgt immer auch die Aussage  $A(n+1)$ . Das ist der *Induktionsschritt*.
2. Der erste Stein muss von Hand umgestossen werden – explizite Überprüfung der Aussage  $A(1)$ . Das ist der Induktionsanfang.

Lassen Sie uns nun dieser Domino-Idee einen formalen Rahmen geben. Wir möchten eine Aussage der Form

$$\forall n \quad A(n)$$

beweisen. Der Beweis mittels vollständiger Induktion (manchmal sagt man *induktiver Beweis*) solcher Aussagen verläuft in folgenden Schritten:

1. Der Induktionsanfang  $A(1)$  muss eine wahre Aussage sein.
2. Induktionsschritt,  $A(n) \implies A(n+1)$ . Hier zeigen wir, dass aus der Gültigkeit von  $A(n)$  die Gültigkeit von  $A(n+1)$  folgt.

*Bemerkung 15.* Der Induktionsschritt bereitet dem Studenten am Anfang Schwierigkeiten. Man kann diesen Schritt meist in drei Teile aufspalten

- Induktionsannahme  $A(n)$ : Wir setzen  $A(n)$  für ein **allgemeines**  $n$  als wahr voraus.
- Zeigen wollen wir die Induktionsbehauptung  $A(n+1)$ , die man sich ruhig explizit hinschreiben sollte.



- Entscheidend ist nun der Beweis der Behauptung. Durch geschickte Umformungen/Abschätzungen/Ideen (die von der Aussage abhängen) muss man zeigen, dass die Induktionsbehauptung aus der Induktionsannahme folgt.

Wir fassen dieses Prinzip in einem Satz zusammen:

**Satz 16** (vollständige Induktion). *Um eine Aussage der Form*

$$\forall n \quad A(n)$$

*zu zeigen, reicht es, die folgenden Aussagen zu beweisen:*

1.  $A(1)$
2. für jedes  $n \geq 1$ ,  $A(n) \implies A(n+1)$ .

Wir empfehlen den Lesern nochmal die zwei einführende Beispiele zu lesen und festzuhalten, was der Induktionsanfang und der Induktionsschritt waren. Nun besprechen wir zwei Typen von »gewöhnlichen« Beispielen.

**Beispiel 17** (Identitäten). Zeigen Sie mit der vollständigen Induktion die folgenden Identitäten:

1.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

2.

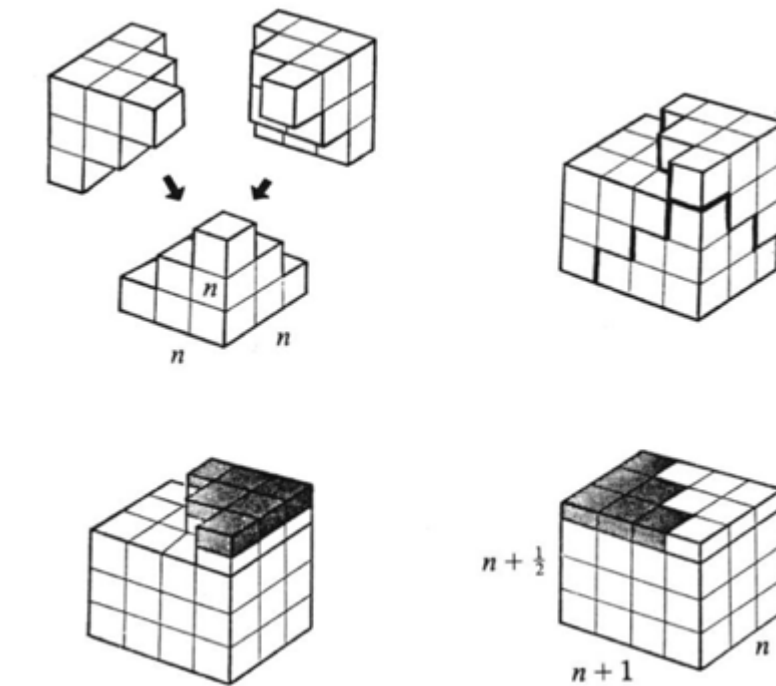
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Dann finden Sie direkte Erklärungen mit den folgenden Bildern/Applets:

1. Applet: [LINK](#)
2. Dieses Applet: [LINK](#) oder dieses animierte GIF: [LINK](#)
3. Dieses Bild:



**Lösung.** Wir zeigen die Lösung der ersten Identität; die andere beweisen Sie entweder in der Übungsstunde oder in der Serie.

Bevor man mit dem Beweis beginnt, wird empfohlen, sich zwei Minuten zu nehmen und zu erkennen, dass es in der Tat um eine Aussage der Form  $\forall n \quad A(n)$  geht. Hier lautet  $A(n)$  einfach die Identität

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Das heisst  $A(1)$  ist

$$1 = 1^2$$

und  $A(2)$  ist

$$1 + 3 = 2^2$$

und so weiter. Bemerken Sie, dass die einzelnen Aussagen nicht wahnsinnig interessant sind. Aber die schöne Aussage ist die allgemeine Identität, die aus einem verborgenen Muster folgt. Mit vollständiger Induktion können wir lediglich nachweisen, dass die Identität gilt, und manchmal entdecken wir nichts von dem »regierenden« Muster. Wir müssen jetzt mit dem Plaudern aufhören und zum Beweis gehen.

Induktionsanfang: Das haben wir schon überprüft: Die Aussage  $A(1)$  lautet einfach

$$1 = 1^2$$

und die ist in der Tat eine wahre Aussage.

Induktionsschritt: Wir fahren wie in Bemerkung 15 fort: Die Induktionsannahme ist  $A(n)$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2. \quad (1.3.1)$$

Die Induktionsbehauptung ist  $A(n+1)$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$$

bzw.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad (1.3.2)$$

und wir müssen zeigen, dass (1.3.2) aus (1.3.1) folgt. Das können wir leicht machen: Wir betrachten die linke Seite von (1.3.2) und spielen damit, bis wir die Induktionsannahme verwenden können:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) + (2n + 1) = \spadesuit$$

Der Ausdruck in den ersten Klammern ist genau die linke Seite der Induktionsannahme! Daher gilt

$$\spadesuit = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

und das ist genau die rechte Seite von (1.3.2).

*Bemerkung 18.* Die anderen Beweise der obigen Formeln zeigen, dass ein Induktionsbeweis manchmal nur eine Möglichkeit von anderen Möglichkeiten ist. So sollten Sie an die vollständige Induktion denken: Das ist nur eine (und manchmal nicht die schönste) Methode, um Aussagen der Form  $\forall n \quad A(n)$  zu beweisen.

**Beispiel 19** (Teilbarkeit). Mittels Induktion zeigen Sie die folgende Aussagen:

1.  $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$  ist für jedes  $n \geq 1$  durch 9 teilbar.
2.  $5^n - 1$  ist für jedes  $n \geq 1$  durch 4 teilbar.
3.  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  ist für jedes  $n \geq 1$  durch 133 teilbar (diese Aussage ist ein bisschen schwieriger zu beweisen).

**Lösung.** Wir lösen (1) hier, (2) und (3) werden Sie jeweils in der Übungsstunde und in der Serie lösen.

Dieses Mal schreiben wir einen kürzeren Beweis. Induktionsanfang: Für  $n = 1$  lautet die Aussage, dass

$$10^2 + 3 \cdot 10 + 5 = 135$$

und

$$135 : 9 = 15.$$

Nun machen wir den Induktionsschritt. Formen wir die Induktionsbehauptung um, um die Induktionsannahme (IA) zu verwenden:

$$\begin{aligned}
 10^{(n+1)+1} + 3 \cdot 10^{(n+1)} + 5 &= 10 \cdot 10^{n+1} + 30 \cdot 10^n + 5 = \\
 &= 10 \cdot \underbrace{(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n)}_{\text{fast die Induktionsannahme aber nicht ganz}} + 5 = \\
 &= 10 \cdot \underbrace{(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5)}_{\text{genau die Induktionsannahme!}} - 50 + 5 = \\
 &= 10 \cdot \underbrace{(10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5)}_{\text{Laut IA durch 9 teilbar}} - \underbrace{45}_{\text{durch 9 teilbar}}.
 \end{aligned}$$

Nur mit Verwendung der Induktionsannahme haben wir gezeigt, dass die Induktionsbehauptung gilt. In anderen Worten haben wir den Induktionsschritt gezeigt.

*Bemerkung 20.* In Ihrem Informatik-Kurs werden Sie die vollständige Induktion verwenden, um die Gültigkeit einer Formel, die aus einer rekursiven Definition kommt, zu beweisen.

### 1.3.2 Die ganzen Zahlen

Ich denke, dass Witze über die Mathematik und Mathematiker die schlechteste Art von Witzen sind. Aber trotzdem füge ich einen hinzu:

*Ein Theologe, ein Physiker und ein Mathematiker stehen vor der Tür eines leeren Zimmers. Gemeinsam beobachten sie, wie drei Personen das Zimmer betreten und fünf es wenig später wieder verlassen. „Ein Wunder!“ ruft der Theologe. „Muss ein Messfehler sein“, grummelt der Physiker. Der Mathematiker hingegen konstatiert trocken: „Jetzt müssen noch zwei hineingehen, damit das Zimmer wieder leer ist.“*

Diesen habe ich in Arens [1, Seite 32] gefunden. Das Ziel dieses Witzes war, zu zeigen wie seltsam die ganzen Zahlen eigentlich sind. Wir möchten diese Erweiterung in Hinblick zu Lösungen der Gleichungen betrachten. Wenn wir natürliche Zahlen subtrahieren möchten, oder anderes gesagt,

wenn wir die Gleichung

$$x + 5 = 3$$

lösen möchten, müssen wir unseren Zahlenbereich erweitern und betrachten die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

### 1.3.3 Die rationalen Zahlen

Leider können wir die Gleichung

$$2x + 3 = 0$$