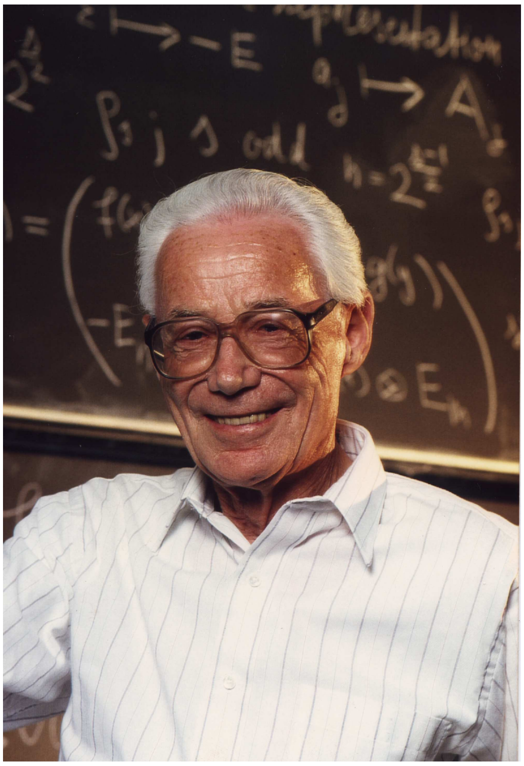
Beno Eckmann 1917-2008

M.-A. Knus, G. Mislin, U. Stammbach



1. Lebenslauf

Beno Eckmann wurde am 31. März 1917 in Bern als Sohn eines Chemikers und einer Ärztin geboren.[1] Er besuchte die Schulen in Bern – die hervorragenden Schulzeugnisse aus jener Zeit sind noch vorhanden – und erhielt 1935 die Matur humanistischer Richtung, also mit Griechisch und Latein. Entgegen dem Wunsch seines Vaters entschloss sich Beno Eckmann zum Studium der Mathematik, und zwar an der ETH in Zürich. In der kleinen damaligen Studentengruppe an der Abteilung für Mathematik und Physik der ETH hatte er von Anfang an guten Kontakt mit Heinz Hopf. Er diplomierte 1939. Nur zwei Jahre später, 1941, schloss er das Doktorat mit der Dissertation *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume* ab; Referent war Heinz Hopf und Korreferent Ferdinand Gonseth. Unmittelbar danach, 1942, habilitierte er sich an der ETH in Zürich.

[1] Sein Vater Aron und und seine Mutter Berthe stammten aus Osteuropa; sie waren beide vor dem Ersten Weltkrieg in die Schweiz gekommen, um an der Universität Bern zu studieren. In der Zeit vor dem Ersten Weltkrieg war die Universität Bern eine beliebter Studienort für osteuropäische und insbesondere russische Studierende.

Während der Zeit seines Studiums geschahen zwei für seinen persönlichen Lebenskreis wichtige Dinge: 1937 wurde er Schweizer Bürger – als solcher hatte er im Zweiten Weltkrieg viele Wochen Militärdienst zu leisten – und 1942 heiratete er Doris Wolf. Der Ehe entsprossen drei Kinder. In seinen späten Jahren wies er gerne darauf hin, dass er schon mehr als 60 Jahre mit Doris verheiratet sei. Seine Familie mit den Großkindern, Urgroßkindern und Ururgroßkindern war ihm immer eine große Freude.

Ab 1942 war Beno Eckmann als Dozent an der Universität Lausanne tätig, 1944 wurde er dort Professeur extraordinaire. Während dieser Zeit behielt er seine Privatdozententätigkeit an der ETH in Zürich bei. Im Jahre 1947 – also kurz nach Ende des Zweiten Weltkrieges, während dem fast alle wissenschaftlichen Kontakte mit dem Ausland unmöglich waren – folgte ein längerer Aufenthalt in den USA. Die Reise führte im Januar über Paris, wo er mehrere Vorträge hielt. Die Zeit von Februar bis Mitte April verbrachte er als Mitglied am Institute for Advanced Study in Princeton und von Mitte April bis Anfang Mai schloss sich eine ausgedehnte Vortragsreise an, während der er zahlreiche der wichtigen Universitäten im Mittleren Westen und an der Ostküste der USA besuchte. Von Juni bis September war er dann wieder am Institute for Advanced Study in Princeton. Beno Eckmann erhielt in jener Zeit und auch später aus den USA mehrere Angebote, die er aber alle ablehnte. Kurz nach seiner Rückkehr in die Schweiz erreichte ihn dann der Ruf zum ordentlichen Professor an der ETH in Zürich. Diese Stelle trat er im Herbst 1948 an.

Bereits aus der Beschreibung dieses ersten Amerika-Aufenthaltes wird deutlich, dass sich Beno Eckmann schon früh in seiner Laufbahn bemühte, ein weltweites Netzwerk von wissenschaftlichen Kontakten aufzubauen. Davon konnten in der Folge die ETH und vor allem auch seine vielen Schüler und Schülerinnen in hohem Maße profitieren. Wie intensiv sich diese Bemühungen gestalteten, geht aus der nachfolgenden kurzen Aufzählung von Gastaufenthalten hervor, die in den ersten Jahren seiner Professur an der ETH stattfanden.

Im Herbst 1950 schloss sich ein zweiter Amerikaaufenhalt an. In Cambridge (MA) fand in jenem Herbst der Internationale Kongress für Mathematiker statt. Die Teilnahme am Kongress, bei dem Eckmann als Sprecher eingeladen war, kombiniert er mit einem Gastaufenthalt an der University of Michigan und mit einer Vortragsreise. Ein Jahr später führte eine dritte Amerikareise an die University of Illinois at Urbana-Champaign und zu einer Vortragsreise quer durch den ganzen Kontinent, sie dauerte von August 1951 bis März 1952. Nur wenige Jahre später reiste er zum vierten Mal in die USA; von Juli bis August 1955 besuchte er diesmal vor allem die Universitäten an der Westküste, darunter für einen ausgedehnten Gastaufenthalt die University of California in Berkeley. Einladungen aus ganz Europa zu Vorträgen und längeren Vorlesungszyklen führten ihn 1956 und 1957 nach Deutschland, England, Belgien und Italien.

In späteren Jahren folgten viele weitere wissenschaftliche Reisen und Gastprofessuren, auf die wir nicht in detaillierter Weise eingehen können. Einzig die engen Kontakte mit dem Technion in Haifa und der Ben Gurion University in Beer-Sheva seien hier speziell noch erwähnt.

Beno Eckmann widmete sich während der Tätigkeit an der ETH in Zürich neben seiner Forschung in ganz besonderem Maße dem Unterricht, und zwar auf allen Stufen. Dazu gehörten in seinen ersten Jahren nach 1948 auch mathematischer Unterricht für Ingenieurstudierende im Fach Darstellende Geometrie. Später waren es dann vor allem Vorlesungen in Algebra und Topologie, die er betreute. Den einführenden Zyklus der Algebra-Vorlesungen hat er während mehrerer Jahrzehnte regelmäßig gelesen. Dazu kamen fortgeschrittene Vorlesungen wechselnden Inhalts, die ein weites Feld in den Gebieten Algebra, Topologie und Differentialgeometrie abdeckten. Die Vorlesungen rückten jeweils die wesentlichen Linien und die Zusammenhänge in den Mittelpunkt. Glasklar und bis ins Detail nachvollziehbar war die Darstellung des Stoffes. Und die fortgeschrittenen Vorlesungen führten die Zuhörer in aller Regel bis an die Grenzen der aktuellen Forschung.

Ganz besonders am Herzen lagen ihm auch die Seminare, in denen die Studierenden über fortgeschrittene Themen vorzutragen hatten. Wohl alle seine nachmaligen Doktoranden und Doktorandinnen erinnern sich an die Vorbereitungen zu diesen Vorträgen: Ungefähr eine Woche vor dem Termin hatten die Vortragenden im Büro von Beno Eckmann auf Grund des Vortragsmanuskriptes zu referieren. Da wurden Lücken angesprochen, es wurde auf Fehler hingewiesen, es gab Hinweise zu einem effektvollen Vortragsstil, und oft hörten dann die Vortragenden auch von Weiterungen des Stoffes und von Zusammenhängen, die in der Literatur nicht zu finden waren.

Es ist nicht verwunderlich, dass sich nach derartigen Erfahrungen viele der Studierenden entschlossen, eine Diplomarbeit und eine Dissertation bei Beno Eckmann zu beginnen. Unzählige Diplomarbeiten und rund 60 Dissertationen hat er während seiner Tätigkeit an der ETH betreut. Eine größere Anzahl seiner Doktoranden waren später als Professoren an Hochschulen des In- und Auslandes tätig. Ein eindrucksvoller "Doktorandenstammbaum", der aus Anlass des 80ten Geburtstages von Beno Eckmann von seinen Schülern in Barcelona zusammengestellt wurde, erstreckt sich über fünf Doktorandengenerationen und seine Äste enthalten Namen von Personen aus allen fünf Kontinenten.

Neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit stellte sich Beno Eckmann immer wieder für administrative und wissenschaftspolitische Arbeiten zur Verfügung: von 1954 bis 1956 war er Vorsteher der Abteilung für Mathematik und Physik an der ETH Zürich, von 1956 bis 1960 Sekretär der Internationalen Mathematischen Union, von 1961 bis 1962 Präsident der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft und von 1973 bis 1984 Mitglied des Forschungsrates des Schweizerischen Nationalfonds.

Auch um die Publikation mathematischer Texte hat sich Beno Eckmann verdient gemacht: Er war während vieler Jahre Mitherausgeber der berühmten *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* des Springer Verlags. Ferner war er Mitbegründer der *Lecture Notes in Mathematics*, welche zu einer Zeit, als es noch kein Internet gab, eine rasche Verbreitung von neuen Forschungsresultaten in zusammenfassender Form zum Ziele hatten.

Eckmanns größte Leistung nichtwissenschaftlicher Art ist aber zweifellos die 1964 erfolgte Gründung des Forschungsinstitutes für Mathematik an der ETH, dem Beno Eckmann bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1984 auch als Direktor vorstand. Das Institut diente in den ersten Jahren dazu, den für die Mathematik so wichtigen Gästeaustausch zu erleichtern und die internationale Zusammenarbeit der Mitglieder des Departementes zu fördern. Aus kleinen Anfängen hat sich das Institut im Laufe der Jahre zu einem weltweit bekannten Zentrum mathematischer Forschung entwickelt. Es konnte im Sommer 2004 mit einem glanzvollen, hervorragend besetzten Kolloquium sein 40jähriges Bestehen feiern.

Viele Ehrungen zeugen von der hohen nationalen und internationalen Wertschätzung Beno Eckmanns, darunter sind Ehrendoktorate der Universität Fribourg, der École Polytechnique Fédérale in Lausanne, sowie des Technion in Haifa und der Ben Gurion University in Beer-Sheva. Anlässlich des Internationalen Mathematiker-Kongresses 1994 in Zürich wurde er zu dessen Ehrenpräsidenten ernannt. Weitere Ehrungen erhielt er von der Université de Genève und der Albert Einstein-Gesellschaft in Bern.

Während andere sich nach der Emeritierung ganz dem Ruhestand widmen, blieb Beno Eckmann seiner Tätigkeit und der ETH treu. Eine ganze Reihe von Veröffentlichungen entstanden während dieser Zeit, darunter auch zahlreiche Forschungsarbeiten. Er betreute die Herausgabe der Gesammelten Werke von Heinz Hopf und veröffentlichte eine umfangreiche Sammlung von Übersichtsvorträgen, die er während seiner langen mathematischen Tätigkeit gehalten hatte. Bis Anfang 2008 war Beno Eckmann regelmäßig in seinem Büro an der ETH anzutreffen; hier diskutierte er gerne intensiv die vielen mathematischen Fragen, die ihn nach wie vor beschäftigten. Hier erzählte er auch den Gesprächspartnern von seinen vielen persönlichen Erinnerungen und Erfahrungen aus seiner langen mathematischen Tätigkeit oder unterhielt sich mit ihnen über seine intensive Beschäftigung mit Literatur, Theater und Musik. Ganz besonders genoss er hier den Kontakt mit den vielen Gästen "seines" Forschungsinstitutes.

Geistig nach wie vor außerordentlich rege, ließen seine körperliche Kräfte nach seinem 90. Geburtstag merklich nach. Seine letzten Monate verbrachte Beno Eckmann gut betreut zusammen mit seiner Frau Doris im Hugo Mendel-Heim in Zürich. Er starb am 25. November 2008.

2. Wissenschaftliche Arbeiten

Das umfangreiche mathematische Werk von Beno Eckmann besteht aus 120 Beiträgen in mathematischen Zeitschriften. Er hat ferner die Selecta Hermann Weyl herausgegeben, die Gesammelten Werke von Heinz Hopf [Ho01] und eine Sammlung von Essays [E07] aus seinem reichen mathematischen Leben, die sich an ein allgemeines mathematisches Publikum wenden. Daneben existiert eine längere Reihe von vervielfältigten Ausarbeitungen seiner Vorlesungen. Eine Auswahl seiner Arbeiten ist in den Selecta Beno Eckmann [E87] zusammengefasst, die zu seinem 70. Geburtstag erschienen sind.

Für das Folgende wollen wir aus der Gesamtheit einzelne Gruppen von Arbeiten herausgreifen und sie im Zusammenhang besprechen; es treten dabei Entwicklungslinien hervor, die Eckmann über Jahre in seinem Denken und Forschen verfolgt hat. Aus Platzgründen mussten weitere wichtige Arbeiten hier ganz ausgeschlossen bleiben, wie etwa diejenigen, die sich mit komplexen und fastkomplexen Strukturen beschäftigen. In unserer Darstellung sollen die speziellen Eigenheiten von Eckmanns Werk besonders hervortreten: Peter Hilton, mit dem Eckmann eine langjährige enge und fruchtbare Zusammenarbeit pflegte, sagte einmal, Eckmanns Werk zeichne sich durch *unification*, *clarification* und *penetration* aus (siehe [Hi78]). Beispielhaft zeigt sich dies in Eckmanns tiefer Überzeugung, dass Topologie und Algebra in einem echt symbiotischen Verhältnis zueinander stehen, und so ist in seinem Werk mehrfach festzustellen, wie neue Begriffsbildungen und Ideen parallel oder nacheinander in beiden Gebieten verfolgt werden. Eine solche Einstellung zur Mathematik als eine Gesamtheit ist heute nicht mehr unüblich, aber damals in der Mitte des 20. Jahrhunderts, als man "der Reinheit der Methode" einen besonderen Stellenwert einräumte, war das anders.

2.1 Das Resultat von Radon und Vektorfelder auf Sphären

Im Jahre 1938 hatte Beno Eckmann in einem von Heinz Hopf geleiteten Seminar über die Resultate von Adolf Hurwitz und Johann K.A. Radon über die Komposition quadratischer

Formen vorzutragen. Es ging dabei um die folgenden Frage:

Für welche ganze Zahlen n und p lassen sich n komplexe bzw. reelle Bilinearformen $z_1, z_2, ..., z_n$ so bestimmen, dass die Identität

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

besteht.

Hurwitz hatte den Spezialfall $p = n$ behandelt und Radon den allgemeinen Fall. In beiden Fällen wurden für die Beweise *ad hoc* Methoden verwendet. Eckmann, der sich – wie er später einmal bemerkte – mit diesen *ad hoc* Überlegungen nicht richtig anfreunden konnte, suchte einen anderen Zugang. Er erkannte den Zusammenhang mit der Gruppentheorie, und es gelang ihm, mit Hilfe von tiefliegenden Sätzen von Issai Schur über das Zusammenspiel von komplexen und reellen Darstellungen das allgemeine Resultat von Radon zu beweisen. Im reellen Fall lautet dieses wie folgt:

Genau dann existieren reelle Bilinearformen $z_1, z_2, ..., z_n$, wenn für $n = u \cdot 2^{4\alpha+\beta}$ mit $u > 0$ ungerade und $0 \leq \beta < 4$ gilt $p < 8\alpha + 2^\beta$.

Topologische Konsequenzen lagen unmittelbar auf der Hand: Eine Lösung des reellen Radon-Problems für das Zahlenpaar n und p liefert auf der Sphäre S^{n-1} gerade $p-1$ linear unabhängige Vektorfelder. Dabei sind diese Vektorfelder durch *lineare* Operationen der Koordinaten auf der Sphäre S^{n-1} gegeben. Die Frage, ob auf den Sphären weitere – in diesem Sinn nicht lineare – Systeme von stetigen, linear unabhängigen Vektorfeldern existieren, blieb lange offen, bis sie Frank Adams 1962 ([A62]) im negativen Sinn entschied.

Beno Eckmann hat bei verschiedenen Gelegenheiten (siehe z.B. [114]) den Wunsch und die Hoffnung geäußert, auf Grund von analytischen Methoden, vielleicht mittels Variationsrechnung, einsehen zu können, dass die Existenz von stetigen Vektorfeldern auf Sphären die Existenz von *linearen* impliziert. Der sehr anspruchsvolle Beweis von Adams wäre dann auf ein relativ elementares Problem der linearen Algebra und Darstellungstheorie der Gruppen reduziert. Doch diese Einsicht ist der Mathematik bis heute verwehrt geblieben.

Wir erwähnen noch explizit den Spezialfall $p = n$: hier besteht ein enger Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz von Divisionsalgebren über den reellen Zahlen. Wie bereits Hurwitz in der entsprechenden Arbeit feststellte, ergibt sich aus seinem Resultat, dass reelle Algebren, welche die Normproduktregel erfüllen, nur für die Dimensionen $1, 2, 4, 8$ existieren können; es sind dies die rellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktaven. Aus den Arbeiten von John Milnor [BoM58] und Michel Kervaire [K58] ergibt sich etwas allgemeiner, dass nur in diesen Dimensionen reelle Divisionsalgebren existieren können. Nur wenig später erschien die Arbeit von Frank Adams [A60] mit ihrem tiefliegenden Resultat zur Hopfinvariante. Aus diesem folgt die noch stärkere Aussage, dass es in $\mathbb{R}^n$ nur für $n = 1, 2, 4, 8$ eine nullteilerfreie *stetige* Multipliplikation mit einem zweiseitigen Einselement geben kann. Alle diese neueren Resultate benötigen für ihren Beweis trotz aller heute bekannten Vereinfachungen fortgeschrittene Methoden der algebraischen Topologie, wie die sogenannte Bott-Periodizität der unendlichen orthogonalen bzw. unitären Gruppe und die damit im Zusammenhang stehende K-Theorie. Auch in diesem Spezialfall $p = n$ ist also das oben angesprochene Phänomen relevant, dass die Existenz einer stetigen Operation jeweils auch die Existenz einer *(bi)lineare* Operation impliziert. Eckmann hat in [105] den engen Zusammenhang zwischen den Hurwitz-Radon-Matrizen, wie sie sich aus der Lösung des ursprünglichen Problems ergeben, und der Bott-Periodizität nachgewiesen und darauf aufmerksam gemacht, wie eine tiefere Einsicht in die Natur des oben beschriebenen Phänomens zu einem neuen Verständnis der Bott-Periodizität und damit der topologischen K-Theorie führen könnte.

2.2 Cohomologie der Gruppen

In seiner Arbeit [15] schließt Eckmann an frühere Arbeiten seines Mentors Heinz Hopf [Ho41a, Ho44] an. Dieser hatte für eine gegebene diskrete Gruppe G einen abstrakten algebraischen Komplex definiert, in dem die Homologiebildung die Homologiegruppen eines asphärischen topologischen Raumes mit Fundamentalgruppe G liefert. Dass die Homologiegruppen eines derartigen Raumes nur von der Fundamentalgruppe G abhängen, hatte in den dreißiger Jahren Witold Hurewicz [Hu35] bewiesen; nicht klar war damals aber, ob zu jeder Gruppe G ein derartiger Raum existiert und wie er allenfalls zu konstruieren wäre. Eckmann nahm sich dieses Problems an, arbeitete – abweichend von Hopf – mit der Cohomologie statt mit der Homologie und konstruierte auf kanonische Weise zu gegebenem G einen algebraischen Komplex, der dem Cokettenkomplex der universellen Überlagerung eines derartigen Raumes nachgebildet ist: Es ist die – später so genannte – homogene Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ über dem Gruppenring $\mathbb{Z}G$, die hier konstruiert wurde. Mit Hilfe der Coketten beschrieb Eckmann auch explizit die Produktstruktur der Cohomologie; dies führte zur Definition des Cohomologie*ringes* der Gruppe G. Die Arbeit geht detailliert auf die Beziehungen ein, die sich zwischen der topologischen und algebraischen Sichtweise ergeben, insbesondere spiegeln sich im algebraischen Vorgehen explizit die Begriffe der universellen Überlagerung und des Produktes in der Cohomologie eines topologischen Raumes.

Es ist mathematikgeschichtlich interessant, dass die (Co)Homologietheorie der Gruppen praktisch gleichzeitig und unabhängig von Hopf und Eckmann auch von Samuel Eilenberg und Saunders Mac Lane in den USA und von Hans Freudenthal in den Niederlanden in ganz ähnlicher Weise angegangen wurde. Während des Zweiten Weltkrieges war die wissenschaftliche Kommunikation zwischen der Schweiz und dem Ausland fast völlig zum Stillstand gekommen. Von den neuen Entwicklungen hörte man gegenseitig erst nach Ende des Krieges, als die Kontakte langsam wieder aufgenommen werden konnten.[2]

Die Beschäftigung mit der Gruppencohomologie hat Beno Eckmann in [35] fortgesetzt. Dabei wurden die Beziehungen zwischen den Cohomologiegruppen von einer Gruppe G und einer Untergruppe U näher untersucht. Unter anderem ist in dieser Arbeit das Resultat zu finden, das später unter dem Namen Shapiro-Lemma bekannt geworden ist (siehe [35], Theorem 4, [33], Theorem 3); es drückt die Cohomologie einer Untergruppe als Cohomologie der ganzen Gruppe mit speziellen Koeffizienten aus. In heutiger Schreibweise lautet es wie folgt:

$$H^*(U,B) \cong H^*(G, \mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G), B)) \ . \tag{1}$$

Die allgemeine Theorie in der Cohomologie der Gruppen liefert sofort eine Abbildung (Restriktion) $R: \ H^*(G) \to H^*(U)$; sie ist durch die entsprechende Einschränkung der Coketten

[2] Im Falle von Saunders Mac Lane lässt sich dies etwas genauer festlegen (siehe Mac Lane [ML78]): Eine Note von Hopf, die als Beitrag zu einer Topologiekonferenz gedacht war und die inhaltsmäßig ungefähr seiner Arbeit [Ho41a] entsprach, erreichte im Sommer 1941 noch Eilenberg und Mac Lane. Diese erkannten deren Wichtigkeit sofort, und es gelang ihnen, zu einer gegebenen Gruppe G einen algebraischen asphärischen Komplex zu konstruieren, der sich später als eine Variante des Eckmannschen Komplexes entpuppte, nämlich als die inhomogene Standardauflösung.

definiert. Nimmt man die Beziehung (1) zur Hilfe, so lässt sich R auch durch den Koeffizienten-Homomorphismus

$$B \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}(G), B)) \to \mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G), B))$$

beschreiben. Im Falle einer Untergruppe U von *endlichem* Index in G lässt sich durch Summenbildung ein Modulhomomorphismus

$$\mathrm{Hom}_U(\mathbb{Z}(G), B) \to B$$

definieren. Eckmann benützt diesen Homomorphismus, um daraus mit Hilfe der Beziehung (1) eine Abbildung (Transfer) T in der der Restriktion umgekehrten Richtung $H^*(U) \to H^*(G)$ zu definieren.[3] Die Namensgebung folgte dabei der Tatsache, dass in der Dimension 1 die so definierte Abbildung zum "klassischen" gruppentheoretischen Transfer (Verlagerung) dual ist. Die Definition erfolgte zusätzlich auch explizit mit Formeln in der Standardauflösung von [15]. Gegenüber der Arbeit [15] sind hier wichtige notationelle Neuerungen festzustellen, wie etwa die Verwendung von Pfeilen für Abbildungen, von exakten Folgen und von Diagrammen; es sind dies Notationen, wie sie sich in jener Zeit rasch in der ganzen Mathematik einbürgerten. Aus den gegebenen Definitionen des Transfers[4] ergaben sich leicht eine Reihe von Folgerungen, die sich für mannigfache Anwendungen in der Gruppentheorie als wichtig erweisen sollten, darunter vielleicht die wohl bekannteste Folgerung, dass die Zusammensetzung $T \circ R : H^*(G) \to H^*(G)$ nichts anderes als die Multiplikation mit dem Index von U in G ist.

Mit der Gruppenhomologie und -cohomologie und ihren Anwendungen in der Gruppentheorie hat sich Beno Eckmann in seinem Werk mehrfach wieder beschäftigt. Nach der erfolgreichen Definition der Transferabbildung war Eckmann mehr denn je davon überzeugt, dass die (Co)Homologie von Gruppen auch in der klassischen Gruppentheorie wichtige Anwendungen besitzen würde, die über die bereits bekannte Interpretation der zweiten und dritten Cohomologiegruppe durch Gruppenerweiterungen hinausgehen würden. In der Tat hatte sich gezeigt (siehe [StJ65], [StU66]), dass die einer Gruppenerweiterung zugeordnete, aus der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe stammende exakte Fünf-Term-Sequenz derartige rein gruppentheoretische Anwendungen erlaubte, welche das Rechnen mit Kommutatoren betrafen, wie sie etwa in der Definition nilpotenter Gruppen auftreten. Aus Sicht der Gruppentheorie bestand deshalb ein Bedürfnis, diese Sequenz auf einfache Weise, d.h. ohne den involvierten Apparat der Spektralreihen herzuleiten. Dies wurde in der Arbeit von Eckmann und Stammbach [68] geleistet. Es schloss sich eine Reihe weiterer Arbeiten mit P. Hilton an ([72], [73], [74], [76] (zum Teil auch gemeinsam mit U. Stammbach), welche die Theorie zentraler Gruppenerweiterungen betrafen: in dieser Situation lässt sich die Fünf-Term-Sequenz durch einen weiteren Term (siehe auch [Ga68]) verlängern, was eine Reihe von gruppentheoretischen Anwendungen auf sogenannte Stammerweiterungen und auf zentrale Produkte erlaubte.

Die Beschäftigung mit der Cohomologietheorie der Gruppen setzte sich in einer langen Reihe von Arbeiten zur homologischen Dualität fort. In seiner Dissertation hatte sich Robert Bieri [Bi72] mit Gruppen beschäftigt, deren ganzzahlige Cohomologie und Homologie eine zur Poincaré-Dualität analoge Dualität aufweisen (siehe auch [JW72]). Darunter fallen selbstverständlich

[3] Bereits in der etwas früher fertiggestellten Arbeit [33] hat Eckmann diese Transfer-Abbildung definiert.

[4] Gemäß einer mündlichen Mitteilung von Beno Eckmann ging seine Definition des Transfers auf eine Anregung von Emil Artin und John Tate zurück, welche der Gruppen(co)homologie erst dann algebraische Relevanz zusprechen wollten, wenn die klassische gruppentheoretische Konstruktion des Transfers (der Verlagerung) in diese Theorie eingebettet werden konnte. Artin und Tate haben in den unmittelbar folgenden Jahren die Gruppencohomologie in der Klassenkörpertheorie verwendet; siehe u.a. [T52].

Gruppen, deren Eilenberg-Mac Lane-Raum eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist, dann aber auch z.B. endlich erzeugte torsionsfreie nilpotente Gruppen. Unmittelbar daran anschließend stellten sich viele Fragen, und eine Reihe von Verallgemeinerungen boten sich an, insbesondere wenn man sich – wie Beno Eckmann – von der Topologie leiten ließ. Die Arbeiten [75], [77], [78], [79], [80], [82], [83] – viele davon gemeinsam mit Robert Bieri – gingen einem Teil dieser Fragen nach.[5] Insbesondere wurde in diesen Arbeiten der Begriff der Poincaré-Dualität verallgemeinert, wobei ein dualisierender Modul auftrat, mit dem man die Koeffizienten auf der Seite der Cohomologie zu tensorieren hatte, um eine Dualität zu erhalten. Der dualisierende Modul ergab sich dabei jeweils als die höherdimensionale Endengruppe $H^n(G, \mathbb{Z}G)$, wobei n die (Co)Homologiedimension der Gruppe G bezeichnet.[6] Ein Spezialfall dieser allgemeineren Dualität ergibt sich zum Beispiel dann, wenn der Eilenberg-Mac Lane-Raum von G eine *nicht* orientierbare Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall besteht eine verallgemeinerte Poincaré-Dualität, wenn als dualisierender Modul $\hat{\mathbb{Z}}$ verwendet wird, also die unendlich zyklische abelsche Gruppe mit nichttrivialer G-Operation. Es ergaben sich viele weitere Beispiele von Gruppen mit verallgemeinerter Dualität, wobei auch weit kompliziertere dualisierende Moduln auftraten.

Besonders interessant ist im Zusammenhang mit der Poincaré-Dualität der Fall der Dimension 2. Offensichtlich liefern hier die Flächengruppen Beispiele. Es stellt sich sofort die Frage, ob algebraisch gegebene Poincaré-Dualitätsgruppen stets Flächengruppen sind. In einer Serie von Arbeiten hat Eckmann nach wichtigen Vorarbeiten von Robert Bieri, Ralph Strebel und Heinz Müller (siehe [BS78], [Mu81]) diese Frage zusammen mit Peter Linnell im positiven Sinne klären können (siehe [88], [90], [91], [92]). Den Beweis hat Eckmann in [97], [98] zusammenfassend dargestellt.

2.3 Eckmann-Hilton Dualität

Wohl im Zusammenhang mit dem Aufkommen der Kategorientheorie in den späten 40er Jahren (siehe [EML45]) traten in natürlicher Weise Fragen der Dualität von kategorietheoretischen Begriffen auf. Bei den Konstruktionen der Komplexe, und insbesondere beim algebraischen Beweis für die Tatsache, dass im Rahmen der (Co)Homologietheorie der Gruppen die Homologiebildung nicht von der gewählten freien Auflösung abhängt (siehe Hopf [Ho44]), erkannte man rasch, dass dies auch galt, wenn an Stelle der *freien* G-Moduln *projektive* G-Moduln zugelassen wurden. So lag es damals nahe, den kategorietheoretischen Begriff des projektiven Moduls zu dualisieren. Dies führt auf den Begriff des injektiven Moduls. Reinhold Baer, mit dem Beno Eckmann an der University of Illinois at Urbana-Champaign bei seinem Aufenthalt 1951/52 engen mathematischen und persönlichen Kontakt hatte, hat wohl damals in diesem Zusammenhang auf seine frühere Arbeit [B40] hingewiesen. In dieser hatte Baer jeden Modul M in einen umfassenden Modul einbetten können, welcher eine zur Eigenschaft *injektiv* äquivalente Eigenschaft besitzt. Zusammen mit Andreas Schopf[7] gelang es Beno Eckmann einen neuen einfachen Beweis des

[5] Wie Beno Eckmann in den Selecta [E87], p. 824 angemerkt hat, sind Teile der Arbeiten später redundant geworden; Kenneth S. Brown [B75] und Ralph Strebel [StR76] haben (unabhängig voneinander) gezeigt, dass die Definition der "Duality group" die Eigenschaft *FP* impliziert. Davon machten Eckmann und Bieri in ihren Beweisen noch keinen Gebrauch.

[6] Die Gruppe der Enden eines topologischen Raumes, die als $H^1(G, \mathbb{Z}G)$ interpretiert werden kann, wurde bereits um 1950 von Heinz Hopf, Hans Freudenthal und Ernst Specker untersucht.

[7] Andreas Schopf hat seine schriftliche Diplomarbeit an der ETH bei Beno Eckmann verfasst. Für sein hervorragendes Diplom und die Diplomarbeit wurde er mit dem Kern Preis und der Silbernen Medaille der ETH ausge-

Resultates von Baer zu geben, und insbesondere zu einem gegebenen Modul M einen – in einem gewissen Sinn kleinsten – injektiven Obermodul $U(M)$ zu konstruieren, es ist dies die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) injektive Hülle von M. Für diesen Nachweis benützten Eckmann und Schopf den Begriff der *wesentliche Erweiterung* von M, indem sie zeigten, dass die injektive Hülle $U(M)$ gleichzeitig die maximale wesentliche Erweiterung von M ist. Die entsprechende kurze Arbeit [34] gehört zu den am häufigsten zitierten Arbeiten in der homologischen Algebra überhaupt.

Über den damaligen Stand der "homologischen Algebra", soweit dies die Gruppencohomologie betrifft, gibt die Arbeit [40] Auskunft. Es ist dies der Text des Vortrages, den Beno Eckmann am Internationalen Mathematiker-Kongress 1954 in Amsterdam gehalten hat. Hier werden ganz allgemein die verschiedenen Cohomologietheorien behandelt, die sich dadurch definieren lassen, dass die Betrachtung auf verschiedene Arten von Coketten eingeschränkt werden, seien es Coketten, die zu einer Untergruppe gehören, seien es Coketten, die einer Endlichkeitsbedingung genügen.

Der Begriff der Dualität, wie er sich als heuristisches Prinzip aus der Kategorientheorie ergab, spielte in der Folge im Werk Beno Eckmanns eine wichtige Rolle. Dabei war insbesondere auch der topologische Begriff der Homotopie wichtig. Eine Übertragung des Begriffes der Homotopie auf die Situation von Moduln führte zu zwei dualen Begriffsbildungen, nämlich zu einer injektiven und einer projektiven Homotopie (siehe [41]). Es lassen sich damit Homotopiegruppen für Moduln definieren, wie sich auch mit der Homotopie im Zusammenhang stehende topologische Begriffe, wie etwa die Begriffe der Suspension und des Schleifenraumes, in die Modultheorie übertragen lassen. Daraus ergeben sich dann entsprechende exakte Sequenzen. Im Grunde genommen wurde in den erwähnten Arbeiten zur Modultheorie eine "homologische Algebra" entwickelt, die anstelle der Funktoren Tor und Ext Funktoren setzt, die durch Homotopiegruppen definiert werden. In der Folge hat sich die Theorie der Tor und Ext rasch und erfolgreich entwickelt – dabei spielte sicher das Buch von Cartan-Eilenberg [CE56] eine wichtige Rolle – , während die Homotopiegruppen von Moduln für viele Jahre kaum in weiten Kreisen bekannt wurden. Erst in neuester Zeit haben die damals in die Modultheorie eingeführten Begriffe wieder an Wichtigkeit gewonnen, nämlich in der modernen modularen Darstellungstheorie von endlichen Gruppen (siehe [He60], [He61], [B91] [C96]). Dabei gingen die Ursprünge leider oft fast ganz verloren, als auf die alten Arbeiten kaum mehr Bezug genommen wurde.

Die entsprechenden Überlegungen zur Homotopietheorie von Moduln hat Beno Eckmann zusammen mit Peter Hilton durchgeführt – sie stehen am Anfang ihrer langen und erfolgreichen Zusammenarbeit. Interessanterweise gibt es aber zu diesem Thema keine gemeinsame Veröffentlichungen, sondern nur zwei Übersichtsvorträge, der eine von Beno Eckmann (siehe [41]), der andere von Peter Hilton (siehe [Hi58]). Diese Tatsache mag mit dazu beigetragen haben, dass die Homotopietheorie von Moduln damals wenig beachtet wurde. Zu diesem Themenkreis gibt es ferner eine gemeinsame Arbeit von Eckmann und Kleisli [48]. Im Anschluss an die Dissertation von Heinrich Kleisli wird hier im Falle einer Frobeniusalgebra, also z.B. für den Fall der Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe, die Homotopietheorie und die Beziehung zur Gruppencohomologie näher untersucht. In diesem speziellen Fall lassen sich die aus der Homotopie gewonnenen exakten Sequenzen mit Hilfe der (gewöhnlichen) Cohomologiegruppen

zeichnet. Die Diplomarbeit bildete den Ausgangspunkt für die gemeinsame Arbeit [34]. Nach einer mehrjährigen Assistententätigkeit an der ETH starb er im Herbst 1959 unter tragischen Umständen während eines Amerikaaufenhaltes.

beschreiben.

Wie bereits angemerkt, haben Eckmann und Hilton diese algebraische Entwicklungsspur nicht intensiv weiter verfolgt. Der Grund mag in der frühen Erkenntnis gelegen haben, dass die im Sinne der Kategorientheorie dualen Begriffsbildungen der injektiven und projektiven Homotopie von Moduln eine (wohl als wichtiger erachtete) Dualität in der Topologie suggeriert. Dieser topologischen Dualität sind die unmittelbar nachfolgenden gemeinsamen Arbeiten ([42]-[46], [48], [50]) von Eckmann und Hilton gewidmet.[8] Der wesentliche Gedanke wird bereits in [41] angedeutet. Die Rückübersetzung der algebraischen Überlegungen in die Topologie liefert eine Dualität zwischen der Homotopietheorie und der Cohomologietheorie (siehe dazu weiter unten). Die entsprechenden Grundlagen hat Eckmann 1962 in seinem Vortrag am Internationalen Mathematiker-Kongress in Stockholm (siehe [58]) dargestellt. Dies ist die *Eckmann-Hilton-Dualität*, wie sie als Gebietsbeschreibung in der *Mathematics Subject Classification* der *Mathematical Reviews* vorkommt. In seinem Artikel über das Werk von Beno Eckmann (siehe [Hi78]) gibt Peter Hilton an, dass diese sich auf die Homotopie gründende Dualität das *Leitmotiv* für die vielen gemeinsamen Arbeiten war, die sich in den Folgejahren anschlossen.

Prominent unter dieses Arbeiten ist die – von den damaligen Studierenden so genannte – “Trilogie” zum Thema *Group-like structures in general categories* [52], [56], [57], wo dieser Gesichtspunkt voll zum Tragen kommt. Der Anfangspunkt war das wohlbekannte Resultat der algebraischen Topologie, dass die Homotopieklassen von Abbildungen $\pi(X,Y)$ eine Gruppe bilden, wenn Y eine “Gruppe bis auf Homotopie” ist.[9] Um eine “Gruppe” C in einer allgemeinen Kategorie $\mathbf{C}$ zu definieren, verlangen Eckmann und Hilton in analoger Weise einen Morphismus $m: C \times C \to C$, welcher für jedes X in $\mathbf{C}$ die Menge der Morphismen $\mathbf{C}(X,C)$ zu einer Gruppe macht, und zwar (im kategorietheoretischen Sinn) natürlich in X. Das Dualitätsprinzip lässt sich dann voll ausschöpfen. Es suggeriert als erstes die Definition einer Cogruppe in einer allgemeinen Kategorie; ferner wurde die Aufmerksamkeit nun besonders auf diejenigen Funktoren gerichtet, welche die Gruppen- bzw. Cogruppenstruktur respektierten. Insbesondere von einem heuristischen Standunkt aus erwies sich dies im allgemeinen wie auch bei speziellen Anwendungen als sehr fruchtbar: In vielen Gebieten wurden auf diese Weise neue Resultate suggeriert, die anschließend bewiesen werden konnten.

Als ein einfaches Resultat, das sich aus den ganz grundlegenden Überlegungen in diesen drei Arbeiten ergibt, mag hier das folgende angeführt werden. Wenn X in der Kategorie $\mathbf{C}$ eine Cogruppe ist und Y in $\mathbf{C}$ eine Gruppe, so besitzt die Morphismenmenge $\mathbf{C}(X,Y)$ zwei Gruppenstrukturen, die eine kommt von X, die andere von Y. Gemäß [52], Theorem 4.17 stimmen diese zwei Gruppenstrukturen aus ganz allgemeinen Gründen überein. Daraus ergibt sich sofort, dass *verschiedene* Cogruppenstrukturen in X bzw. verschiedene Gruppenstrukturen in Y zu ein und derselben Gruppenstruktur in $\mathbf{C}(X,Y)$ führen und dass ferner diese Gruppenstruktur *abelsch* ist. Als eine konkrete Anwendung dieses allgemeinen und ganz formalen Resultates ergibt sich, dass die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe bzw. eines H-Raumes immer abelsch ist. In den drei Arbeiten haben die Autoren in einer systematischen Weise sowohl einen Überblick über viele Begriffe der Kategorientheorie gegeben, wie auch auf viele konkrete

[8] Über den interessanten und für das Werk von Eckmann charakteristischen Wechsel des Fokus von der Topologie zur Algebra und wieder zurück zur Topologie, der sich in diesen gemeinsamen Arbeiten offenbart, vergleiche man den detaillierten Überblick in [Hi80].

[9] Der letztere Begriff war von Hopf in seiner Arbeit [Ho41b] geprägt worden. Der Vorschlag, solche Räume H-Räume zu nennen, geht offenbar auf J.P. Serre zurück.

Anwendungen dieser allgemeinen Theorie hingewiesen. Ganz offensichtlich haben Eckmann und Hilton bereits zu diesem frühen Zeitpunkt klar die Möglichkeiten erkannt, welche die konsequente Verwendung der Kategorientheorie zur Vereinheitlichung der Mathematik leisten kann. Dieser Standpunkt ist heute allgemein geworden, so dass heutige Mathematiker Mühe haben, sich anderes vorzustellen.

Die kategorietheoretischen Überlegungen waren inspiriert durch die oben erwähnte topologische Dualität, wie sie in [53] und [59] beschrieben worden sind: Der Schleifenraum ΩX eines punktierten topologischen Raumes X ist offensichtlich ein H-Raum, die Suspension ΣX ebenso offensichtlich ein coH-Raum. Die resultierenden Gruppen $[\Sigma X, Y]$ und $[X, \Omega Y]$ sind natürlich isomorph und mittels Iteration führt dies zu Gruppen

$$\Pi_n(X,Y) = [\Sigma^n X, Y] = [\Sigma^{n-1} X, \Omega Y] = \cdots = [X, \Omega^n Y] \ ,$$

die nach obigem für $n \geq 2$ abelsch sind. Da die Sphäre S^n als n-te Suspension der Nullsphäre S^0 angesehen werden kann, erhält man

$$\Pi_n[S^0, Y] = [S^n, Y] = \pi_n(Y) \ ,$$

also die n-te Homotopiegruppe von Y. Indem man "dual" vorgeht und den Eilenberg-Mac Lane Raum $K(\mathbb{Z}, m)$ als Schleifenraum ansieht, erhält man eine Cohomologietheorie

$$H^m(X, \mathbb{Z}) = [X, K(\mathbb{Z}, m)] \ .$$

Diese stimmt für CW-Komplexe mit der zellulären (bzw. singulären) Cohomologie überein. Die Räume $K(\mathbb{Z}, m)$, bilden das sogenannte Eilenberg-Mac Lane-Spektrum. Neben diesem gibt es andere Spektren, die beim analogen Vorgehen zu allgemeineren Cohomologietheorien führen, die das "Dimensionsaxiom" nicht erfüllen. So erhält man zum Beispiel die K-Theorie, indem man das Bott-Spektrum verwendet; es besteht aus der unendlichen unitären Gruppe U für m ungerade und aus ΩU für m gerade.

2.4 Harmonische Ketten, ℓ_2-Cohomologie

Im Jahre 1949 publizierte Beno Eckmann den Artikel *Coverings and Betti numbers* [19]. Wie sich etwa 30 Jahre später zeigte, war diese Arbeit der Anfang einer intensiven Entwicklung, die auf einer systematischen Nutzung von Hilbertraum-Strukturen in Kettengruppen und Cohomologiegruppen beruht und im Rahmen der ℓ_2-Cohomologie aufgegriffen wurde (siehe [115]). Eckmann betrachtet ein endliches, simpliziales und zusammenhängendes Polyeder P, welches ein Überlagerungsraum des Polyeders $\overline{P}$, mit simplizial operierender Decktransformationengruppe G, ist. Er beweist, dass sich die Betti-Zahlen $b_n(\overline{P})$ von $\overline{P}$ aus der Darstellung von G in der Homologie des Überlagerungskomplexes P berechnen lassen und gibt eine explizite Formel für diese Betti-Zahlen.

Seine Beweis ist kurz und elegant und verwendet den Begriff von *simplizialen harmonischen Ketten*, ein heute geläufiger Begriff im Rahmen der ℓ_2-Cohomologie. Für ein endliches simpliziales Polyeder haben die reellen Kettengruppen eine natürliche Euklidische Struktur, und es ist deshalb sinnvoll, vom zur Randabbildung ∂ adjungierten Operator δ zu sprechen, sowie vom sogenannten simplizialen Laplace-Operator $\Delta = \partial\delta + \delta\partial$, einem Endomorphismus der Kettengruppen. Die Elemente im Kern von Δ heißen *harmonische* Ketten. Eckmann beweist, dass die harmonischen Ketten Zykeln sind und dass jede Homologieklasse genau einen harmonischen Repräsentanten besitzt. Der Raum der harmonischen n-Ketten ist somit natürlich isomorph zur n-ten Homologiegruppe. Dies gilt sowohl für P wie auch für den Bahnenraum $\overline{P}$, mit dem Unterschied, dass im Falle von P zusätzlich die Decktransformationengruppe G auf den Kettengruppen operiert. Eckmann beweist, dass der Raum der G-invarianten harmonischen n-Ketten von P isomorph ist zur n-ten Homologiegruppe von $\overline{P}$. Indem er den G-invarianten Teil als Bild eines Projektionsoperators, nämlich der Mittelbildung bezüglich der Gruppenoperation auffasst, erhält er hieraus eine explizite Formel für die Dimension des Raumes der G-invarianten harmonischen n-Ketten, und diese Dimension ist genau die gesuchte n-te Betti-Zahl $b_n(\overline{P})$ von $\overline{P}$.

In der allgemeineren Situation der ℓ_2-(Co)homolgie sind die Definitionen wie folgt (siehe [115]). Der Einfachheit halber skizzieren wir den Fall, wo $P \to \overline{P}$ die universelle Überlagerung eines endlichen, zusammenhängenden simplizialen Polyeders $\overline{P}$ mit $G = \pi_1(\overline{P})$ bezeichnet. Die Decktransformationengruppe G operiert dann simplizial, ist nun aber nicht mehr unbedingt endlich, aber abzählbar, da der Bahnenraum P/G endlich ist. Der G-Vektorraum der reellen simplizialen n-Ketten von P besitzt auch in diesem allgemeineren Fall eine natürliche Euklidische Struktur. Eine orthonormale Basis ist durch die Vektoren gegeben, welche den n-Simplexen entsprechen. Es folgt daraus, dass die G-Operation auf dem Raum der n-Ketten isometrisch ist. Vervollständigt man diese Kettenräume bezüglich der ℓ_2-Norm, so erhält man einen Kettenkomplex von Hilbert-G-Räumen. Der adjungierte Operator δ zum beschränkten Randoperator ∂ entspricht dem Corandoperator, und $\Delta = \delta\partial + \partial\delta$ ist der Laplace-Operator, dessen Kern *per definitionem* aus den harmonischen ℓ_2-Ketten besteht. Die (reduzierte) ℓ_2-Homologiegruppe $\mathcal{H}_n$ von $\overline{P}$ ist definiert als Raum der harmonischen ℓ_2-Ketten von P in der Dimension n. Diese ℓ_2-Homologiegruppe $\mathcal{H}_n$ ist ein Hilbert-G-Modul und besitzt als solcher eine *von Neumann*-Dimension $\beta_n(\overline{P})$, die eine Homotopieinvariante von $\overline{P}$ ist. Die $\beta_n(\overline{P})$ heißen ℓ_2-Betti-Zahlen von $\overline{P}$ und sind nicht-negative, reelle Zahlen. Sie sind häufig gleich 0, aber im Unterschied zu den gewöhnlichen Betti-Zahlen im allgemeinen nicht ganzzahlig. Eine fundamentale Eigenschaft der ℓ_2-Betti-Zahlen von $\overline{P}$ ist die Tatsache, dass, analog wie im Falle der gewöhnlichen Betti-Zahlen, die Eulercharakteristik $\chi(\overline{P})$ durch die alternierende Summe $\sum(-1)^n\beta_n(\overline{P}) = \chi(\overline{P})$ gegeben ist. Beno Eckmann verwendet dies in [103] um Folgendes zu beweisen:

Ist G amenabel und unendlich und sind die simplizialen Homologiegruppen $H_i(P,\mathbb{Z})$ für $0 < i < N = \dim(P)$ alle gleich 0, so besteht die Ungleichung $(-1)^{\dim(P)}\chi(\overline{P}) \geq 0$. Ferner ist $\chi(\overline{P})$ genau dann gleich 0, wenn zusätzlich die simpliziale Homologiegruppe $H_N(P,\mathbb{Z})$ verschwindet.

Mit einer Zusatzüberlegung ergibt sich daraus für ein Polyeder $\overline{P}$ der Form $K(G,1)$ mit G unendlich und amenabel, dass $\chi(\overline{P}) = 0$ ist. In [107] untersucht Beno Eckmann die Umkehrung dieses Satzes im Falle, wo $\overline{P} = M$ eine 4-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit mit unendlicher, amenabler Fundamentalgruppe G ist. Er zeigt, dass die Bedingung $\chi(M) = 0$ zusammen mit dem Verschwinden der Endengruppen $H^i(G,\mathbb{Z}G)$ für $i = 1, 2$ impliziert, dass M ein $K(G,1)$-Raum und mithin G eine 4-dimensionale Poincaré-Dualitätsgruppe ist.

Falls $\overline{P} = M$ eine geschlossene, nicht unbedingt orientierbare N-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so erfüllen die ℓ_2-Homologiegruppen von $\overline{P}$ als Hilbert-G-Moduln ganz allgemein die Poincaré-Dualität $\mathcal{H}_n \cong \mathcal{H}_{N-n}$. Somit ist $\beta_n(M) = \beta_{N-n}(M)$. Ist G unendlich, so gilt immer $\beta_0(\overline{P}) = 0$, so dass für eine geschlossene Mannigfaltigkeit M der Dimension N mit unendlicher Fundamentalgruppe stets folgt $\beta_N(M) = 0$. Zum Beispiel ergibt sich für $\overline{P}=F$, eine geschlossene, nicht unbedingt orientierbare Fläche mit unendlicher Fundamentalgruppe:

$$\beta_0(F) = 0, \quad \beta_1(F) = -\chi(F), \quad \beta_2(F) = 0 \;.$$

Weitere Anwendungen betreffen den *Defekt* $\mathrm{def}(G)$ einer endlich präsentierbaren Gruppe G. Ist P eine endliche Präsentierung von G mit e Erzeugenden und r Relatoren, so ist $\mathrm{def}(P) = e - r$, und $\mathrm{def}(G)$ ist definiert als Maximalwert von $\mathrm{def}(P)$, wobei P die endlichen Präsentierungen von G durchläuft. Es ist eine elementare Tatsache, dass die Ungleichung $\mathrm{def}(G) \leq b_1(G) - b_2(G)$ gilt, wobei $b_i(G)$ für die i-te Betti-Zahl des Eilenberg-Mac Lane Raumes $K(G,1)$ steht. Bezeichnen wir die ℓ_2-Betti-Zahlen von $K(G,1)$ mit $\beta_i(G)$, so gilt nach Theorem 4.1.2 von [115]

$$\mathrm{def}(G) \leq 1 - \beta_0(G) + \beta_1(G) - \beta_2(G) \;.$$

Die folgenden Beispiele illustrieren den Nutzen dieser zweiten Ungleichung. Ist G eine endlich präsentierbare amenable Gruppe G, so folgt $\mathrm{def}(G) \leq 1$, denn in diesem Fall ist $\beta_1(G) = 0$. Andere Beispiele von Gruppen mit $\beta_1 = 0$ sind die Gruppen mit der Kazhdan-Eigenschaft T, die Gruppen der Form $H \times K$ mit beiden Faktoren unendlich und die Knotengruppen; alle diese Gruppen haben somit einen Defekt ≤ 1. Eine PD^2-Gruppe σ ist nach einem im Abschnitt 2.2 erwähnten Satz von Eckmann-Linnell [92], [98] isomorph zu einer Flächengruppe. Ein wesentlicher Schritt im Beweis dieses Satzes besteht darin zu zeigen, dass es eine surjektive Abbildung $\sigma \to \mathbb{Z}$ gibt, also $b_1(\sigma) > 0$ ist. Dies kann man, wie Beno Eckmann bemerkt hat, mittels der ℓ_2-Betti-Zahlen wie folgt sehen. Aus bekannten allgemeinen Sätzen schließt man, dass eine PD^2-Gruppe σ ein endliches CW-Modell $K(\sigma,1)$ besitzt. Schreiben wir $\chi(\sigma)$ für die Eulercharakteristik von $K(\sigma,1)$, so folgt:

$$\chi(\sigma) = 1 - b_1(\sigma) + b_2(\sigma) = \beta_0(\sigma) - \beta_1(\sigma) + \beta_2(\sigma) = -\beta_1(\sigma)$$

und somit

$$b_1(\sigma) \geq 1 \,.$$

Für die Fundamentalgruppe π einer Fläche vom Geschlechte $g > 0$ liefert die Standardpräsentierung für den Defekt im orientierbaren Fall $2g - 1 = 1 - \chi(\pi)$ als untere Schranke und im nicht-orientierbaren Fall $g - 1 = 1 - \chi(\pi)$. Zusammen mit der oberen Schranke $1 + \beta_1(\pi) = 1 - \chi(\pi)$ ergibt sich daraus auf Grund des Satzes von Eckmann-Linnell, dass der Defekt einer beliebigen PD^2-Gruppe σ gleich $1 - \chi(\sigma)$ ist.

Beno Eckmann hat die ℓ_2-Cohomologie in [111] auch auf weitere Situationen in einem erstaunlich umfangreichen Gebiet der algebraischen Topologie und Algebra angewendet, so auf die Hausmann-Weinberger Invariante (siehe [HW85]) von endlich präsentierbaren Gruppen, auf die holomorphe Eulercharakteristik einer Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2 und (in [118]) auf Gitter in zusammenhängenden halbeinfachen Liegruppen.

2.5 Algebraische K-Theorie

Die Hattori-Stallings-Spur Φ_P eines endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Modul P ist eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion, die auf den Konjugationsklassen der Gruppe G definiert ist. Eine Vermutung von Hyman Bass besagt, dass, wie im Falle eines freien Moduls, höchstens der Wert $\Phi_P(e)$ verschieden von 0 sein kann; $\Phi_P(e) = \kappa(P)$ nennt man die Kaplansky-Spur. Nach einem Satz von

Kaplansky ist $\kappa(P) \geq 0$, und $\kappa(P) = 0$ gilt genau dann, wenn $P = 0$ ist. Damit verwandt ist die Augmentierungsspur $\epsilon(P) = \dim_{\mathbb{C}}(P \otimes_G \mathbb{C})$, wobei $\mathbb{C}$ als trivialer G-Modul aufzufassen ist. Sie entspricht der Summation der Werte von Φ_P über alle Konjugationsklassen. Ist die Bass-Vermutung erfüllt, so gilt offenbar $\kappa(P) = \epsilon(P)$. Erfüllt eine Gruppe G für alle endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Moduln die letztere Gleichung, so sagt man G erfülle die *schwache Bass-Vermutung*. Die Bass-Vermutung ist zum Beispiel für endliche Gruppen erfüllt, denn in diesem Fall zeigt sich, dass ein endlich erzeugter projektiver $\mathbb{Z}G$-Modul P unter der Skalarerweiterung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ zu einem freien $\mathbb{Q}G$-Modul $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ wird. Allgemeiner ist die Bass-Vermutung für amenable Gruppen erfüllt, aber auch für freie Gruppen und allgemeiner, nach einem Resultat von Peter Linnell, für alle residuell endlichen Gruppen. Eckmann hat in [99] bewiesen, dass eine torsionfreie Gruppe G die Bass-Vermutung erfüllt, falls für alle Elemente $x \in G$, die rationale Cohomologiedimension von $C_x/\langle x \rangle$ endlich ist, wobei C_x den Zentralisator von x in G bezeichnet. Eckmanns Beweis verwendet eine bekannte Berechnung der zyklischen Homologie des Gruppenrings $\mathbb{Q}G$. Die oben definierte Klassenfunktion Φ_P kann als Element $\overline{\Phi}_P$ in der zyklischen Homologie von $\mathbb{Q}G$ in der Dimension 0 aufgefasst werden. Wie Beno Eckmann zeigt, impliziert die Voraussetzung über die cohomologische Dimension der Zentralisatorquotienten, dass $\overline{\Phi}_P$ in dem der Konjugationsklasse von $e \in G$ entsprechenden Summanden der zyklischen Homologie liegt und dies entspricht genau der Aussage der Bass-Vermutung.

Unter Verwendung von Resultaten von Robert Bieri und Ralph Strebel (siehe [Bi76], [StR76]) gelingt es Beno Eckmann, die Bedingung betreffend der cohomologischen Dimension der Zentralisatorquotienten im Falle der Gruppen mit Cohomologiedimension 2 nachzuweisen (siehe [99]) und somit die Bass-Vermutung für diese Klasse von Gruppen zu beweisen.

In den Arbeiten [110], [116] untersucht Eckmann endlich erzeugte projektive Moduln M über $\mathcal{N}(G)$, der komplexen von Neumann-Algebra von G, eine Banach-Algebra, welche die komplexe Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ umfasst. Ein endlich erzeugter projektiver $\mathcal{N}(G)$-Modul M besitzt eine *von Neumann-Dimension* $\dim(M) \in \mathbb{R}$. Dabei gilt $\dim(M) = 0$ genau für $M = 0$. Die von Neumann-Dimension ist wie folgt mit der Kaplansky-Spur eines endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Moduls P verknüpft: es gilt $\kappa(P) = \dim(\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P)$. Eckmann zeigt, dass für einen endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}G$-Modul P, der projektive $\mathcal{N}(G)$-Modul $\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P$ frei und damit isomorph zu $\mathcal{N}(G)^{\kappa(P)}$ ist. Erfüllt G die schwache Bass-Vermutung, so ist ferner $\kappa(P) = \epsilon(P)$, und mithin $\mathcal{N}(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} P \cong \mathcal{N}(G)^{\epsilon(P)}$. Dies verwendet Eckmann um zu zeigen, dass für einen endlich dominierten zusammenhängenden CW-Komplex X die ℓ_2-Eulercharakteristik von X mit der üblichen Eulercharakteristik übereinstimmt, falls die Fundamentalgruppe von X die schwache Bass-Vermutung erfüllt.

2.6 Charakteristische Klassen von Darstellungen von Gruppen

In den Arbeiten [84], [86], [89], [96] studiert Beno Eckmann (in Zusammenarbeit mit G. Mislin) charakteristische Klassen von Gruppen-Darstellungen. Im Falle einer reellen n-dimensionalen Darstellung ρ mit darstellenden Matrizen von positiver Determinante, ist die Eulerklasse $e_n(\rho) \in H^n(G, \mathbb{Z})$ definiert als Eulerklasse des durch ρ induzierten flachen, orientierten $\mathbb{R}^n$-Bündels über dem klassifizierenden Raum von G.

Die Arbeit [84] bezieht sich auf die Situation einer $\mathbb{Q}$-Darstellung einer endlichen Gruppe G. Für die Eulerklasse $e_n(\rho)$ einer solchen Darstellungen wird bewiesen, dass ihre Ordnung durch eine von der endlichen Gruppe G und der spezifischen n-dimensionalen Darstellung unabhängigen, optimalen Schranke E_n beschränkt ist, die in überraschender Weise mit den Bernoulli-Zahlen zusammenhängt (siehe [84], Theorem 3.2).

Analog sind die Chernklassen $c_i(\rho) \in H^{2i}(G, \mathbb{Z})$ einer komplexen n-dimensionalen Darstellung ρ als Chernklassen des durch ρ induzierten flachen $\mathbb{C}^n$-Bündels über BG definiert. Es zeigt sich, dass die gleiche optimale Schranke E_i für die Ordnung von $c_i(\rho)$ auftritt, falls die Darstellung ρ reell ist und rationalen Charakterwerte besitzt (siehe [84], Theorem 4.2). Beispiele zeigen, dass dies für nichtreelle Darstellungen im allgemeinen nicht richtig bleibt, und zwar auch dann nicht, wenn die Darstellung rationale Charakterwerte besitzt.

In der Arbeit [86] werden Darstellungen über beliebigen Zahlkörpern betrachtet. Es werden universelle Schranken für die Eulerklasse von reellen Darstellungen endlicher Gruppen in Abhängigkeit vom reellen Zahlkörper, über dem sie definiert sind, angegeben; entsprechende Schranken gelten für die Chernklassen (siehe [89]).

Es ist leicht zu sehen, dass es keine universelle Schranke für die Ordnung der Chernklassen $c_i(\rho)$ für komplexe Darstellungen von beliebigen, nicht unbedingt endlichen Gruppen geben kann; insbesondere sind für $N \gg j$ die universellen Chernklassen $c_j(\mathbb{C}) \in H^{2j}(GL_N^\delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^{2j}(GL_\infty^\delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ der identischen Darstellung der diskreten Gruppe $GL_N^\delta(\mathbb{C})$ von unendlicher Ordnung. In [93] wird das Verhalten dieser Chernklassen $c_j(\mathbb{C})$ unter Körperautomorphismen von $\mathbb{C}$ studiert. In diesem Zusammenhang ist es zweckmäßig, die sogenannten profiniten Chernklassen zu betrachten. Ist K ein Zahlkörper, so lässt sich die Wirkung der Galois-Automorphismen der Körpererweiterung $K \subset \mathbb{C}$ auf diesen Chernklassen explizit bestimmen. Daraus lassen sich universelle Schranken für die Chernklassen von Darstellungen über dem Zahlkörper K für beliebige, auch unendliche Gruppen herleiten.

Dank. Die Autoren danken Frau Doris Eckmann herzlich für viele mündliche Informationen sowie für die freundliche Erlaubnis, Einsicht in persönliche Unterlagen zu nehmen, die Beno Eckmann betreffen.

Literatur

[A60] Adams F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. **72** (1960), 20-104

[A62] Adams F.: Vector fields on spheres, Ann. of Math. **75** (1962), p. 603-632

[B40] Baer R.: Abelian groups that are direct summands of every containing abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), p. 800-806

[B91] Benson D.: *Representations and Cohomology.* (Two Volumes) Cambridge University Press 1991

[Bi72] Bieri R.: Gruppen mit Poincaré Dualität, Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 373-396

[Bi76] Bieri R.: *Homological dimension of discrete groups.* Queen Mary College Lecture Notes, London, 1976

[BS78] Bieri R., Strebel R.: Almost finitely presented soluble groups, Comment. Math. Helv. **53** (1978), p. 258-278

[BoM58] Bott R., Milnor J.: *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), p. 87-89

[B75] Brown, K.S.: Homological criteria for finiteness, Comment. Math. Helv. **50** (1975), p. 129-135

[C96] Carlson J.F.: *Modules and group algebras*, Birkhäuser Basel 1996

[CE56] Cartan H., Eilenberg S.: *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956

[E87] Eckmann B.: *Selecta*, (Ed. Knus M.-A., Mislin G., Stammbach U.), Springer Verlag, 1987

[E07] Eckmann, B.: *Mathematical Survey Lectures 1943-2004*, Springer Verlag, 2007.

[EML45] Eilenberg S., Mac Lane S.: General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), p. 231-294

[Ga68] Ganea T.: Homologie et extensions centrales de groupes, C.R. Acad. Sc. Paris **266** (1968), p. 557-558

[HW85] Hausmann J.-C., Weinberger S.: Caractéristiques d'Euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4, Comment. Math. Helv. **60** (1985), p. 139-144

[He60] Heller A.: The loop space functor in homological algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), p. 382-394

[He61] Heller A.: Indecomposable representations and the loop-space operation, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), p. 640-643

[Hi58] Hilton P.J.: Homotopy theory of modules and duality, Proc. Mexico Symposium (1958), p. 273-281

[Hi78] Hilton P.J.: Some contributions of Beno Eckmann to the development of topology and related fields, in: M.-A. Knus, G. Mislin, U. Stammbach (Ed.): *Topology and Algebra*, Enseign. Math. Monograph **26**, 1978, p. 11-27

[Hi80] Hilton P.J.: Duality in homotopy theory: a retrospective essay, J. Pure Appl. Algebra **19** (1980), p. 159-169

[Ho41a] Hopf H.: Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 257-309

[Ho41b] Hopf H.: Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Ann. of Math. **42** (1941), p. 22-52

[Ho44] Hopf H.: Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comment. Math. Helv. **17** (1944/45), p. 39-79

[Ho01] Hopf H.: *Collected papers, Gesammelte Abhandlungen*, (Ed. Beno Eckmann), Springer Verlag, 2001.

[Hu35] Hurewicz W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 112-119, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), p. 521-528, Proc. Akad. Amsterdam **39** (1936), p. 215-224

[JW72] Johnson F.E.A., Wall C.T.C.: On groups satisfying Poincaré duality, Ann. of Math. **96** (1972), p. 592-598

[K58] Kervaire M.A.: Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44** (1958), p. 280-283

[ML78] Mac Lane S.: Origins of the cohomology of groups, in: M.-A. Knus, G. Mislin, U. Stammbach (Ed.): *Topology and Algebra*, Enseign. Math. Monograph **26**, 1978, p. 191-219

[Mu81] Müller, H.: Decomposition theorems for group pairs, Math. Z. **176** (1981), p. 223-246

[StU66] Stammbach U.: Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen, Math. Z. **94** (1966), p. 157-177

[StJ65] Stallings J.: Homology and central series of groups, J. of Algebra **2** (1965), p. 170-181

[StR76] Strebel R.: A homological finiteness criterion, Math. Z. **151** (1976), p. 263-275

[T52] Tate J.: The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math. **56** (1952), p. 294-297

Wissenschaftliche Arbeiten und Übersichtsartikel von Beno Eckmann

Die Liste der Publikationen [1] bis [99] ist aus den *Selecta* [E87], p. 825-830 übernommen.

[1] Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 141-l92

[2] Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), p. 234-256

[3] Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 1-26

[4] Vektorfelder auf Sphären, Société math. suisse 1941, Enseign. Math. **39** (1944), p. 9-10

[5] Solutions continues de systèmes d'équations linéaires, Société math. suisse 1942, Enseign. Math. **39** (1944), p. 18-19

[6] Über Zusammenhänge zwischen algebraischen und topologischen Problemen, Mitteilung der Naturf. Ges. Bern (1942), p. 54-55

[7] L'idée de dimension, Leçon inaugurale Lausanne 5 février 1943, Revue de Théologie et Philosophie **127** (1943), p. 3-17

[8] Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 318-339

[9] Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen, Comment. Math. Helv. **15** (1942/43), p. 358-366

[10] Sur les groupes monothétiques, Société math. suisse 1943, Enseign. Math. **39** (1944), p. 24-25

[11] Topologie und Algebra, Antrittsvorlesung ETH 22. Mai 1943, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich **89** (1944), p. 25-34

[12] Über monothetische Gruppen, Comment. Math. Helv. **16** (1943/44), p. 249-263

[13] Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex, Comment. Math. Helv. **17** (1944/45), p. 240-255

[14] Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques, Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. **63** (1945), p. 67-78

[15] Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe, Comment. Math. Helv. **18** (1945/46), p. 232-282

[16] Der Cohomologiering einer beliebigen Gruppe, Société math. suisse (1945), p. 97-99

[17] On complexes over a ring and restricted cohomology groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33** (1947), p. 275-281

[18] On infinite complexes with automorphisms, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33** (1947), p. 372-376

[19] Coverings and Betti numbers, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), p. 95-101

[20] Sur les applications d'un polyèdre dans un espace projectif complexe, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), p. 1397-1399

[21] On fibering spheres by toruses (with H. Samelson and G. W. Whitehead), Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), p. 433-438

[22] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. I. Structure complexe, formes pures (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 464-466

[23] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. II. Formes de classe k; formes analytiques (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 489-491

[24] Sur les variétés c1oses à métrique hermitienne sans torsion (with H. Guggenheimer), C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 503-505

[25] Quelques propriétés globales des variétés kählériennes, C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), p. 577-579

[26] Cartesisches und Alexandersches Produkt in der Cohomologietheorie (with H. Brändli), Comment. Math. Helv. **24** (1950), p. 68-72

[27] Continu et discontinu, in: *Études de Philosophie des Sciences, hommage à F. Gonseth*, Editions du Griffon (1950), p. 83-90

[28] Continu et discontinu, in: *Actes du congrès international de philosophie des sciences Paris 1949*, Hermann (1951), p. 67-74

[29] Espaces fibrés et homotopie, Coll. Topol. Centre Belge de Rech. Math. (1950), p. 83-99

[30] Sur l'intégrabilité des structures presque complexes (with A. Frölicher), C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), p. 2284-2286

[31] Complex-analytic manifolds, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1950 II*, American Mathematical Society (1952), p, 420-427

[32] Räume mit Mittelbildungen, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1950 I*, American Mathematical Society (1952), p. 523

[33] On complexes with operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39** (1953), p. 35-42

[34] Über injektive Moduln (with A. Schopf), Arch. Math. **4** (1953), p. 75-78

[35] Cohomology of groups and transfer, Ann. of Math. **8** (1953), p. 481-493

[36] A class of compact, complex manifolds which are not algebraic (with E. Calabi), Ann. of Math. **58** (1953), p. 494-500

[37] Sur les structures complexes et presque complexes, Géométrie différentielle, Coll. Int. du Centre Nat. de la Rech. Scientifique (1953), p. 151-159

[38] Structures complexes et transformations infinitésimales, in: *Convegno di Geometria Differenziale 1953*, Edizioni Cremonese (1954), p. 1-9

[39] Räume mit Mittelbildungen, Comment. Math. Helv. **28** (1954), p. 329-340

[40] Zur Cohomologietheorie von Räumen und Gruppen, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1954 III*, North-Holland Publishing Co. (1957), p. 170-177

[41] Homotopie et dualité, Coll. Topol. Alg. Centre Belge de Rech. Math. 1956, p. 41-53

[42] Groupes d'homotopie et dualité. Groupes absolus (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2444-2447

[43] Groupes d'homotopie et dualité. Suites exactes (with P. J. Hilton). C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2555-2558

[44] Groupes d'homotopie et dualité. Coefficients (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), p. 2291-2293

[45] Transgression homotopique et cohomologique (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), p. 620-623

[46] Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe (with P. J. Hilton), C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), p. 2054-2056

[47] On the homology and homotopy decomposition of continuous maps (with P. J. Hilton), Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959), p. 372-375

[48] Groupes d'homotopie et dualité, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), p. 271-281

[49] Operators and cooperators in homotopy theory (with P. J. Hilton), Math. Ann. **141** (1961), p. 1-21

[50] Homotopy groups of maps and exact sequences (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **34** (1960), p. 271-304

[51] Structure maps in group theory (with P. J. Hilton), Fund. Math. **50** (1961), p. 207-221

[52] Group-like structures in general categories I. Multiplications and comultiplications (with P. J. Hilton), Math. Ann. **145** (1962), p. 227-255

[53] Homotopie und Homologie, Enseign. Math. **8** (1962), p. 209-217

[54] Algebraic homotopy groups and Frobenius algebras (with H. Kleisli), Illinois J. Math. **6** (1962), p. 533-552

[55] Generalized means (with T. Ganea and P. J. Hilton), in: *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, Stanford University Press (1962), p. 82-92

[56] Group-like structures in general categories III. Primitive categories (with P. J. Hilton), Math. Ann. **150** (1963), p. 165-187

[57] Group-like structures in general categories II. Equalizers, limits, lengths (with P. J. Hilton), Math. Ann. **151** (1963), p. 150-186

[58] Homotopy and cohomology theory, in: *Proc. Int. Congr. of Math. 1962*, Institut Mittag-Leffler (1963), p. 59-73

[59] A natural transformation in homotopy theory and a theorem of G. W. Whitehead (with P. J. Hilton), Math. Z. **82** (1963), p. 115-124

[60] Unions and intersections in homotopy theory (with P. J. Hilton), Comment. Math. He1v. **38** (1963/64), p. 293-307

[61] Exact couples in an abelian categogory (with P. J. Hilton), J. Algebra **3** (1966), p. 38-87

[62] Composition functors and spectral sequences (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **41** (1966/67), p. 187-221

[63] Filtrations, associated graded objects and completions (with P. J. Hilton), Math. Z. **98** (1967), p. 319-354

[64] Homologie et différentielles. Suites exactes (with U. Stammbach), C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967), p. 11-13

[65] Homologie et différentielles. Basses dimensions; cas spéciaux (with U. Stammbach), C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967), p. 46-48

[66] Commuting limits with colimits (with P. J. Hilton), J. Algebra **11** (1969), p. 116-144

[67] Continuous solutions of linear equations - some exceptional dimensions in topology, in: *Battelle Rencontres 1967, Lectures in Mathematics and Physics*, W.A. Benjamin (1968), p. 516-526

[68] On exact sequences in the homology of groups and algebras (with U. Stammbach), Illinois J. Math. **14** (1970), p. 205-215

[69] Homotopical obstruction theory (with P. J. Hilton), An. Acad. Brasil. Ciênc. **40** (1968), p. 407-425

[70] Le groupe des types simples d'homotopie sur un polyèdre (with S. Maumary), in: *Essays on Topology and Related Topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham*, Springer-Verlag (1970), p. 173-187

[71] Simple homotopy type and categories of fractions, Symp. Math. **5** (1970), p. 285-299

[72] On central group extensions and homology (with P. J. Hilton), Comment. Math. Helv. **46** (1971), p. 345-355

[73] On the homology theory of central group extensions: I – The commutator map and stem extensions (with P. J. Hilton and U. Stammbach), Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 102-122

[74] On the homology theory of central group extensions: II – The exact sequence in the general case (with P. J. Hilton and U. Stammbach), Comment. Math. Helv. **47** (1972), p. 171-178

[75] Groupes à dualité homologique (with R. Bieri), C. R. Acad. Sci. Paris **275** (1972), p. 899-901

[76] On the Schur multiplicator of a central quotient of a direct product of groups (with P. J. Hilton and U. Stammbach), J. Pure Appl. Algebra **3** (1973), p. 73-82

[77] Propriétés de finitude des groupes à dualité (with R. Bieri), C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973), p. 831-833

[78] Groups with homological duality generalizing Poincaré duality (with R. Bieri), Invent. Math. **20** (1973), p. 103-124

[79] Finiteness properties of duality groups (with R. Bieri), Comment. Math. Helv. **49** (1974), p. 74-83

[80] Amalgamated free products of groups and homological duality (with R. Bieri), Comment. Math. Helv. **49** (1974), p. 460-478

[81] Aspherical manifolds and higher-dimensional knots, Comment. Math. Helv. **51** (1976), p. 93-98

[82] Cobordism for Poincaré duality groups (with R. Bieri), Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), p. 137-139

[83] Relative homology and Poincaré duality for group pairs (with R. Bieri), J. Pure Appl. Algebra **13** (1978), p. 277-319

[84] Rational representations of finite groups and their Euler class (with G. Mislin), Math. Ann. **245** (1979), p. 45-54

[85] Two-dimensional Poincaré duality groups and pairs (with R. Bieri), in: C.T.C. Wall (Ed.): *Homologial Group Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series **36** (1979), p. 225-230

[86] On the Euler class of representations of finite groups over real fields (with G. Mislin), Comment. Math. Helv. **55** (1980), p. 319-329

[87] Some recent developments in the homology theory of groups (Groups of finite and virtually finite dimension), J. Pure Appl. Algebra **19** (1980), p. 61-75

[88] Poincaré duality groups of dimension two (with H. Müller), Comment. Math. Helv. **55** (1980), p. 510-520

[89] Chern classes of group representations over a number field (with G. Mislin), Compositio Math. **44** (1981), p. 41-65

[90] Plane motion groups and virtual Poincaré duality of dimension two (with H. Müller), Invent. Math. **69** (1982), p. 293-310

[91] Groupes à dualité de Poincaré de dimension 2 (with P. Linnell), C. R. Acad. Sci. Paris **295** (1982), p. 417-418

[92] Poincaré duality groupes of dimension two, II (with P. Linnell), Comment. Math. Helv. **58** (1983), p. 111-114

[93] Profinite Chern classes for group representations (with G. Mislin), in: I.M. James (Ed.): *Topological Topics*, London Math. Soc. Lecture Note Series **86** (1983), p. 103-119

[94] The p-periodicity of the groups $\mathrm{GL}(n, O_S(M))$ and $\mathrm{SL}(n, O_S(M))$ (with B. Bürgisser), Mathematika **31** (1984), p. 89-97

[95] Sur les groupes fondamentaux des surfaces closes, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1984), p. 41-46

[96] Galois action on algebraic matrix groups, Chern classes, and the Euler class (with G. Mislin), Math. Ann. **271** (1985), p. 349-358

[97] Surface groups and Poincaré duality, in: R. Piccinini, D. Sjerve (Ed.): *Conference on Algebraic Topology in Honor of Peter Hilton*, Contemp. Math. **37**, Amer. Math. Soc. (1985), p. 51-59

[98] Poincaré duality groups of dimension two are surface groups, in: *Combinatorial group theory and topology*, Ann. Math. Stud. **111** (1987), p. 35-51

[99] Cyclic homology of groups and the Bass conjecture, Comment. Math. Helv. **61** (1986), p. 193-202

[100] Nilpotent group action and Euler characteristic, in: *Algebraic topology, Barcelona 1986*, Lecture Notes in Math. **1298**, Springer Verlag, 1987, p. 120-123

[101] Hurwitz-Radon matrices and periodicity modulo 8, Enseign. Math., **35** (1989), p. 77-91

[102] Continuous solutions of linear equations – An old problem, its history, and its solution, Expo. Math. **9** (1991), p. 351-365

[103] Amenable groups and Euler charactereristic, Comment. Math. Helv. **67** (1992), p. 383-393

[104] Georges de Rham 1903-1990, Elem. Math. **47** (1992), p. 118-122

[105] Hurwitz-Radon matrices revisited: from effective solution of the Hurwitz-Radon matrix equations to Bott periodicity, in: G. Mislin (Ed.): *The Hilton symposium 1993 (Montreal 1993)*, CRM Proc. Lecture Notes **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, p. 23-35

[106] Guidelines 1900-1950 (with P. Dugac and J. Mawhin), in: J.-P. Pier (Ed.): *Development of mathematics 1900-1950*. Birkhäuser 1994, p. 1-34

[107] Manifolds of even dimension with amenable fundamental group, Comment. Math. Helv. **69** (1994), p. 501-511

[108] Zum 100. Geburtstag von Heinz Hopf, Elem. Math. **49** (1994), p. 133-136

[109] Naissance des fibrés et homotopie, in: *Matériaux pour l'histoire des mathématiques aux XXe siècle – Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice 1996)*, Sémin. Congr. **3** (1998), p. 31-36. Soc. Math. France, Paris.

[110] Projective and Hilbert modules over group algebras, and finitely dominated spaces, Comment. Math. Helv. **71** (1996), p. 453-462. Addendum: Comment. Math. Helv. **72** (1997), p. 329

[111] 4-manifolds, group invariants, and ℓ_2-Betti numbers, Enseign. Math. **43** (1997), p. 271-279

[112] Approximating ℓ_2-Betti numbers of an amenable covering by ordinary Betti numbers, Comment. Math. Helv. **74** 1999, p. 150-155

[113] Birth of fibre spaces, and homotopy, Expo. Math. **17** (1999), p. 23-34. English version of [109], translated by Peter Hilton.

[114] Topology, algebra, analysis – relations and a missing link, Notices Amer. Math. Soc. **46** 5 (1999), p. 520-527

[115] Introduction to ℓ_2-methods in topology: reduced ℓ_2-homology, harmonic chains, ℓ_2-Betti numbers, Israel J. Math. **117** (2000), 183-219

[116] Idempotents in a complex group algebra, projective modules, and the von Neumann algebra, Arch. Math. **76** (2001), p. 241-249

[117] Kolmogorow and contemporary mathematics, Newsletter of the European Mathematical Society **50** (2003), p. 13

[118] Lattices, ℓ_2-Betti numbers, deficiency, and knot groups, Enseign. Math. **50** (2004), p. 123-137

[119] Social choice and topology: A case of pure and applied algebra, Expo. Math. **22** (2004), p. 385-393

[120] Hermann Weyl in Zurich 1950-1955, Notices Amer. Math. Soc. **53** 10 (2006), p. 1222-1223

Liste der von Beno Eckmann betreuten Dissertationen

Die Liste ist aus den *Selecta* [E87], p. 831-833 übernommen.

[1] Guggenheimer, Heinrich, *Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik*, 1951

[2] Ghenzi, Albert Georges, *Studien über die algebraischen Grundlagen der elektrischen Netzwerke*, 1953

[3] Kirchhoff, Adrian, *Beiträge zur topologischen linearen Algebra*, 1953

[4] Frölicher, Alfred, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen*, 1955

[5] Grauert, Hans, *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch vollständige Kählersche Metrik*, 1956[10]

[6] Aeppli, Alfred, *Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten*, 1957

[7] Curjel, Caspar Robert, *Über die Homotopie- und Cohomologie-Gruppen von Abbildungen*, 1961

[8] Kleisli, Heinrich, *Homotopy theory in abelian categories*, 1962

[9] Huber, Peter Jost, *Homotopy theory in general categories*, 1962

[10] Stärk, Roland, *Nullsysteme in allgemeinen Kategorien*, 1963

[11] Meier, Werner, *Beiträge zur algebraischen Homotopietheorie der Moduln*, 1963

[12] Fatt, Milton Jacob, *On the homotopical approach to algebraic topology and the Hurewicz theorem*, 1964

[13] Matzinger, Heinrich, *Über den Begriff der uniformen Struktur und die Konvergenz in Booleschen Algebren*, 1963

[10] eingereicht an der Universität Münster mit Heinrich Behnke als Referent

[14] Carnal, Henri Claude, *Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen*, 1964

[15] Thöni, Werner, *Äquivariante Homotopie und Cohomologie*, 1965

[16] Stamm, Emil, *Über die Homotopiegruppen gewisser Faserungen*, 1965

[17] Frei, Armin, *Freie Objekte und multiplikative Strukturen*, 1966

[18] Stammbach, Urs, *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen*, 1966

[19] Sigrist, François, *Obstruction et transgression cohomologigue dans les espaces fibrés*, 1967

[20] Déruaz, Marcel, *Sur la catégorie de Lusternik-Schnirelmann des espaces fibrés et des groupes de Lie*, 1967

[21] Knus, Max-Albert, *Sur une classe d'algèbres filtrées*, 1967

[22] Vögele, Heinz, *Algebren mit multiplikativen Strukturen*, 1967

[23] Terrier, Jean-Marc, *Variétés minimales*, 1967

[24] Ojanguren, Manuel, *Freie Präsentierung endlicher Gruppen und zugehörige Darstellungen*, 1968

[25] Mislin, Guido, *Über Gruppen, die in Cohomologie-Moore-Räumen operieren*, 1968

[26] Storrer, Hans Heinrich, *Epimorphismen von kommutativen Ringen*, 1968

[27] Suter, Ulrich, *Schnittflächen komplexer Stiefel-Mannigfaltigkeiten*, 1968

[28] Grünenfelder, Luzius, *Über die Struktur von Hopf-Algebren*, 1969

[29] Held, René Pierre, *Exakte Paare und Homotopietheorie*, 1969

[30] Bachmann, Franz, *Kategorische Homologietheorie und Spektralsequenzen*, 1969

[31] Hösli, Hans Ulrich, *Über die Existenz von H-Raum-Strukturen auf einer gewissen Klasse von Polyedern*, 1970

[32] Glaus, Christian, *Mayer-Vietoris-Funktoren und Kompositionsfunktoren*, 1970

[33] Schorta-Schrag, Evelyn, *Raumgruppen in N Dimesionen und Cohomologie*, 1971

[34] Ledergerber, Paul, *The torsion decomposition of finite CW-complexes*, 1971

[35] Kubli, Hans Ulrich, *Galois-Theorie für unendliche, rein-inseparable Körpererweiterungen vom Exponenten 1*, 1971

[36] Gronstein, Claude, *Catégories avec modèles, préfaisceaux, et coalgèbres*, 1971

[37] Näf, Franz Jacob, *Eigentliche Homotopie unendlicher Polyeder und Lokalisierung von Kategorien*, 1971

[38] Bieri, Robert, *Gruppen mit Poincaré-Dualität*, 1973

[39] Castellet, Manuel, *Grupos finitos cohomologia periódica y espacios que admiten recubrimientos esféricos*, 1973[11]

[40] Dubach-Szodoray, Elisabeth, *Über die Struktur der Ω-Ringoide*, 1973

[41] Bolthausen, Erwin, *Einfache Isomorphietypen in lokalisierten Kategorien und einfache Homotopietypen von Polyedern*, 1973

[42] Pont, Jean-Claude, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, 1974

[11] eingereicht an der Universitat de Barcelona

[43] Zufferey, Richard, *Sur le produit cotensoriel des comodules et ses foncteurs dérivés Cotor*, 1974

[44] Gut, Arthur, *Zur Homologietheorie der zentralen Erweiterungen von Gruppen und von Lie-Algebren*, 1974

[45] Meier, Willi, *Phantomabbildungen und klassifizierende Räume*, 1975

[46] Egli, Herbert, *Picard-Kategorien und funktorielle Determinantentheorien*, 1975

[47] Huber, Martin, *Klassen von Moduln über Dedekindringen und Satz von Stein-Serre*, 1976

[48] Lundmark, Rolf, *Zur Cohomologietheorie der zentralen Erwreiterungen von p-periodischen Gruppen*, 1977

[49] Schneebeli, Hans Rudolf, *Virtuelle Eigenschaften in der Gruppentheorie und virtuelle Cohomologie*, 1977

[50] Hübschmann, Johannes, *Verschränkte n-fache Erweiterungen von Gruppen und Cohomologie*, 1977

[51] Müller, Heinz, *Über die höherdimensionalen Endengruppen von Gruppen*, 1978

[52] Bürgisser, Balz Christoph, *Gruppen virtuell endlicher Dimension und Periodizität der Cohomologie*, 1979

[53] Biner, Hermann-Josef, *Homologische Dualität von Moduln, insbesondere über Hopf-Algebren*, 1981

[54] Plesko-Meier, Hanna, *Lie-Algebren mit homologischer Dualität*, 1983

[55] Lage, Alexander J.P., *Über die Chernklassen flacher komplexer Vektorbündel*, 1981

[56] Widmer, Hans Rudolf, *Gruppenpaare mit homologischer Dualität der Dimension zwei*, 1981

[57] Staffelbach, Othmar Joh., *Aufspaltung komplexer Vektorbündel in flache Linienbündel*, 1983

[58] Wies, Ghislain Joseph, *Gruppenpaare mit virtueller Poincaré-Dualität in der Dimension zwei*, 1984

[59] Fornera, Linda, *Caractéristique eulérienne de groupes et rangs de modules projectifs*, 1986

Max-Albert Knus (max-albert.knus@math.ethz.ch)
Guido Mislin (guido.mislin@math.ethz.ch)
Urs Stammbach (urs.stammbach@math.ethz.ch)

Mathematik
ETH-Zentrum
CH 8092 Zürich