Modulformen - Übung 3

Dr. Markus Schwagenscheidt

15.04.2019

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \ (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

erzeugt wird.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für $K \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(a) $K \in \mathrm{SO}(2)$,
(b) $Ki = i$,
(c) $K = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ist $\tau \in \mathcal{F}$ und $M \in \Gamma$, so gilt $\mathrm{Im}(M\tau) \leq \mathrm{Im}(\tau)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Hat eine Matrix $M \in \Gamma$ endliche Ordnung, so ist ihre Ordnung entweder $1, 2, 3, 4$, oder 6. Geben Sie zu jeder dieser Ordnungen eine passende Matrix an.

Aufgabe 5. (Sage)

(1) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenem $\tau \in \mathbb{H}$ und $M \in \Gamma$ die Möbiustransformation $M\tau$ berechnet.
(2) Berechnen Sie $ST^7S^{-1}T^{19}$ mithilfe von Sage.
(3) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenem $\tau \in \mathbb{H}$ entscheidet, ob τ im Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ liegt oder nicht.

Aufgabe 6. (Zusatzaufgabe) Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe* N durch

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass $\Gamma(N)$ ein Normalteiler von Γ von endlichem Index ist. Wir wollen nun eine Formel für den Index von $\Gamma(N)$ in Γ bestimmen. Zeigen Sie dafür folgende Aussagen.

(1) $\Gamma(N)$ ist der Kern der komponentenweise Reduktion mod N

$$r_N : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

(2) Der Homomorphismus r_N ist surjektiv.

(3) Es gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N_2\mathbb{Z})$$

falls $N = N_1N_2$ mit $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$.

(4) Es gilt

$$|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})| = p^{3n}(1 - 1/p^2)$$

für jede Primzahl p und $n \geq 1$.

(5) Wir haben die Formel

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} (1 - 1/p^2).$$

Aufgabe 7. (Sage Zusatzaufgabe) Schreiben Sie ein Programm, das für eine gegebene Matrix $M \in \Gamma$ eine Zerlegung der Form

$$M = S^{m_1}T^{m_2}S^{m_3} \cdots T^{m_{n-1}}S^{m_n}$$

mit $m_j \in \mathbb{Z}$ berechnet. Das Programm soll zu gegebenem M die Liste $[m_1, \ldots, m_n]$ der Exponenten ausgeben.