Modulformen - Übung 12

Dr. Markus Schwagenscheidt

01.07.2019

Aufgabe 1.

(1) Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den antilinearen Differentialoperator

$$\xi_k f = 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} f}$$

für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\xi_k(f|_k M) = (\xi_k f)|_{2-k} M$$

für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

(2) Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den Gewicht k invarianten Laplace-Operator

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Zeigen Sie

$$\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k.$$

Folgen Sie daraus, dass

$$\Delta_k(f|_k M) = (\Delta_k f)|_k M$$

für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt.

(3) Es sei

$$E_k(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s|_k M$$

die normalisierte nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht k. Zeigen Sie die Differentialgleichung

$$\Delta_k E_k(\tau, s) = s(1 - s - k) E_k(\tau, s)$$

Aufgabe 1. Wir wollen mithilfe der nicht-holomorphen Eisensteinreihe einen neuen Beweis für die Modularität der Gewicht 2 Eisensteinreihe

$$E_2^*(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n - \frac{3}{\pi y}$$

geben. *Wir nehmen dazu an, dass wir noch nicht gezeigt haben, dass das unendliche Produkt*

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

eine Modulform vom Gewicht 12 *ist*, denn beim Beweis dieser Tatsache haben wir die Modularität von E_2^* bereits benutzt.

(1) Machen Sie sich klar, dass die Koeffizienten $a_n(\tau)$ in der Laurententwicklung $G^*(\tau, s) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(\tau)(s-1)^n$ invariant unter Γ sind. Insbesondere ist die Funktion

$$f(\tau) = \log\left(y^6 \left| q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} \right|\right)$$

invariant unter Γ.

(2) Zeigen Sie, dass $\xi_0 f(\tau)$ ein Vielfaches von E_2^* ist, und leiten Sie daraus die Modularität von E_2^* her.

Aufgabe 3. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1$ hat. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(1) Nehmen Sie an, es gilt $\zeta(1 + i\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\zeta(2s_0)$ und $\zeta(2s_0 - 1)$ bei $s_0 = \frac{1}{2}(1 + i\alpha)$ verschwinden.

(2) Zeigen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} G(\tau, s) G(\tau, \tfrac{1}{2}(1 + i\alpha) d\mu(\tau) = 0$$

für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(3) Setzen Sie $s = \overline{s_0} = \frac{1}{2}(1 - i\alpha)$ ein und folgern Sie $G(\tau, \frac{1}{2}(1 + i\alpha)) = 0$, um einen Widerspruch zu erhalten.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das modulare Polynom $F_2(X, Y)$ vom Grad 2.

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe) Es seien $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \in S_k$ normierte simultane Eigenformen aller Hecke-Operatoren. Wir können ihr L-Funktionen in der Form

$$L_f(s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p (1 - \alpha_p p^{-s})^{-1} (1 - \beta_p p^{-s})^{-1}$$

$$L_g(s) = \prod_p (1 - b_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} = \prod_p (1 - \gamma_p p^{-s})^{-1} (1 - \delta_p p^{-s})^{-1}$$

mit geeigneten $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p \in \mathbb{C}$ schreiben. Zeigen Sie die Eulerprodukt-Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s} = \zeta(2s - 2k + 2) \prod_p \left((1 - \alpha_p \gamma_p p^{-s})(1 - \alpha_p \delta_p p^{-s})(1 - \beta_p \gamma_p p^{-s})(1 - \beta_p \delta_p p^{-s})\right)^{-1}.$$