Kaspar Nipp
Daniel Stoffer
Eidgenössische Technische Hochschule ETH, Zürich

# LINEARE ALGEBRA

## Eine Einführung für Ingenieure unter besonderer Berücksichtigung numerischer Aspekte

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Nipp, Kaspar**
Lineare Algebra: eine Einführung für Ingenieure unter besonderer Berücksichtigung numerischer Aspekte / Kaspar Nipp; Daniel Stoffer. – 4., überarb. und erw. Aufl. – Zürich: vdf, Hochsch.-Verl. an der ETH, 1998

ISBN 3-7281-2649-7

4., überarbeitete und erweiterte Auflage 1998



Der vdf auf Internet: http://vdf.ethz.ch

# Inhaltsverzeichnis


**1 Lineare Gleichungssysteme — Der Gauss'sche Algorithmus** **1**

1.1 Herleitung des Gaussverfahrens . . . . . . 2
1.2 Folgerungen aus dem Gauss'schen Endschema . . . . . . 13
1.3 Rechenaufwand des Gaussverfahrens . . . . . . 16
1.4 Aufgaben . . . . . . 18

**2 Matrizen** **21**

2.1 Definition und spezielle Matrizen . . . . . . 21
2.2 Das Rechnen mit Matrizen . . . . . . 23
2.3 Die Inverse einer Matrix . . . . . . 29
2.4 LR–Zerlegung . . . . . . 33
2.5 Pivotstrategie . . . . . . 43
2.6 Aufgaben . . . . . . 48

**3 Determinanten** **51**

3.1 Definition und Eigenschaften . . . . . . 51
3.2 Die effiziente Berechnung von Determinanten . . . . . . 61
3.3 Determinanten und lineare Gleichungssysteme . . . . . . 62
3.4 Aufgaben . . . . . . 63

**4 Vektorräume** **65**

4.1 Definition und Beispiele . . . . . . 65
4.2 Die Struktur von Vektorräumen . . . . . . 71
4.3 Normierte Vektorräume . . . . . . 83
4.4 Das Skalarprodukt . . . . . . 90
4.5 Aufgaben . . . . . . 99

**5 Ausgleichsrechnung — Methode der kleinsten Quadrate** **101**
5.1 Die Methode der kleinsten Quadrate — Normalgleichungen . . . . . 101
5.2 Die Methode der kleinsten Quadrate — QR–Zerlegung . . . . . . . . 107
5.3 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116

**6 Lineare Abbildungen** **119**
6.1 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
6.2 Lineare Abbildungen und Skalarprodukt . . . . . . . . . . . . . . . . 126
6.3 Lineare Selbstabbildungen von Vektorräumen . . . . . . . . . . . . . 128
6.4 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141

**7 Das Eigenwertproblem** **145**
7.1 Eigenwerte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 145
7.2 Eigenvektoren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149
7.3 Das Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen . . . . . . . . . . . . 159
7.4 Erste Folgerungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
7.5 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170

**8 Anwendungen zum Eigenwertproblem** **173**
8.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . . 173
8.2 Kurven und Flächen zweiter Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . 185
8.3 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 191

**9 Normalformen** **193**
9.1 Die Normalform einer quadratischen Matrix . . . . . . . . . . . . . . 194
9.2 Die Normalform einer allgemeinen $m \times n$–Matrix (Singulärwertzerlegung) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 201
9.3 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213

**10 Numerische Behandlung des Eigenwertproblems** **215**
10.1 Vektoriteration . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
10.2 Das Jacobi–Verfahren für das symmetrische Eigenwertproblem . . . 222
10.3 Der QR–Algorithmus für das allgemeine Eigenwertproblem . . . . . 228
10.4 Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 233

**11 Lösungen der Aufgaben** **235**

# Vorwort

Die vorliegende Autographie ist gedacht für Ingenieurstudentinnen und -studenten als Begleittext zur Grundvorlesung Lineare Algebra. Sie ist hervorgegangen aus Vorlesungen über lineare Algebra und über numerische Mathematik, gehalten von Urs Kirchgraber und den Autoren an verschiedenen Ingenieurabteilungen der ETH Zürich.

Wir haben versucht, in diesem Text die *algorithmischen* Aspekte der linearen Algebra zu betonen, ohne dabei die *geometrisch-abstrakten* Gesichtspunkte zu vernachlässigen. Die Betonung des Algorithmischen in der linearen Algebra hat an der ETH Zürich eine lange Tradition. Sie geht zurück auf E. Stiefel und wurde fortgeführt in den Vorlesungen von U. Kirchgraber und in seiner Autographie (U. Kirchgraber, *Lineare Algebra*, VdF, 1974). 1980 entstand eine erweiterte Ausgabe dieses Büchleins nach Vorlesungen von U. Kirchgraber und J. Marti.

Der Ausgangspunkt dieser Einführung in die lineare Algebra ist die Bestimmung der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme mit dem Gauss'schen Eliminationsverfahren. Im Laufe der Autographie wird immer wieder der Bezug hergestellt zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zum Gaussverfahren, so z.B. bei der Inversen einer Matrix, bei den Determinanten, bei den geometrischen Begriffen linear (un-)abhängig, erzeugend, Basis, bei den linearen Abbildungen, usw. Der Gauss'sche Algorithmus ist dabei nicht nur von Bedeutung für die praktische Behandlung der erwähnten Problemstellungen, er trägt auch entscheidend zum Verständnis bei und dient als Beweismittel. Er ist sozusagen das zentrale Instrument dieser Autographie.

Die Methoden der linearen Algebra stellen für den Ingenieur ein Mittel dar, um viele in der Praxis auftretende mathematische Probleme zu lösen. Im Rahmen dieses Textes können wir nur modellhafte Anwendungen mit wenigen Unbekannten betrachten (vgl. Ausgleichsrechnung und Anwendungen zum Eigenwertproblem). Der Ingenieur wird jedoch in der Praxis auf Probleme der linearen Algebra stossen mit sehr vielen Unbekannten. Solche Probleme sind nur mit Hilfe des Computers zu lösen. Wir haben uns bemüht, den sich daraus ergebenden *numerischen* Aspekten Rechnung zu tragen. Dies führt zu einer Variante des Gaussverfahrens für das Lösen von linearen Gleichungssystemen (LR-Zerlegung mit geeigneter Pivotstrategie), zum QR-Zerlegungs-Zugang für das Lösen des Ausgleichsproblems, zum QR-Algorithmus und anderen Iterationsverfahren für das Lösen des Eigenwertproblems. Bei den behandelten numerischen Algorithmen haben wir uns von der Darstellung im Buch von H.R. Schwarz leiten lassen (H.R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, Teubner, 2. Auflage, 1988).

Wir möchten verschiedenen Personen unseren Dank aussprechen. Thomas Serafin hat mit grossem Einsatz unsere nicht immer perfekt dargestellten Manuskripte in TEX-Form gebracht. Die Figuren sowie die Lösungen zu den Aufgaben wurden erstellt von Markus Keller, Sandro Merino und Bernd Mösli. Dem Verlag der Fachvereine danken wir für die speditive Zusammenarbeit.

Zürich, September 1992 Kaspar Nipp, Daniel Stoffer

P.S. An die geneigte Leserin, an den geneigten Leser:
Lesen Sie bitte immer noch ein wenig weiter! Wenn Sie diesen Satz nicht verstanden haben, dann werden Sie ihn verstehen, wenn Sie weiterlesen. Es ist oft so, dass eine spezielle Frage (Unklarheit) beim Lesen der Autographie in den darauffolgenden Zeilen beantwortet wird.

**Zur dritten Auflage**

Die neue Auflage unterscheidet sich kaum von der vorangehenden. Wir haben vor allem Tippfehler korrigiert, und wir haben mit der verdankenswerten Unterstützung von Arno Grand, Sandro Merino und Diego Tognola die Lösungen der Aufgaben überarbeitet.

Zürich, September 1994 Kaspar Nipp, Daniel Stoffer

**Zur vierten Auflage**

Wir haben unser Buch in der vierten Auflage wesentlich überarbeitet und auch erweitert. Dabei sind folgende Punkte hervorzuheben. Wir haben den Abschnitt über Elementarmatrizen weggelassen und dafür auf Anregung von Franz Spirig die Sätze über die Determinante der Transponierten einer Matrix und über die Determinante des Produkts von zwei Matrizen mit vollständiger Induktion bewiesen. In Kapitel 6 haben wir einen Paragraphen über die geometrische Interpretation der Determinante als Volumen eines Parallelepipeds eingefügt. Die Aussagen über den Rang einer Matrix wurden wesentlich ausgebaut. Die grösste Veränderung gegenüber der dritten Auflage ist das neue Kapitel über Normalformen. Motiviert wurde dieses Kapitel hauptsächlich durch die Singulärwertzerlegung, welche in der numerischen linearen Algebra eine wichtige Rolle spielt. Zum Schluss möchten wir Diego Tognola für das Erstellen der neu dazugekommenen Figuren danken.

Zürich, Juli 1998 Kaspar Nipp, Daniel Stoffer