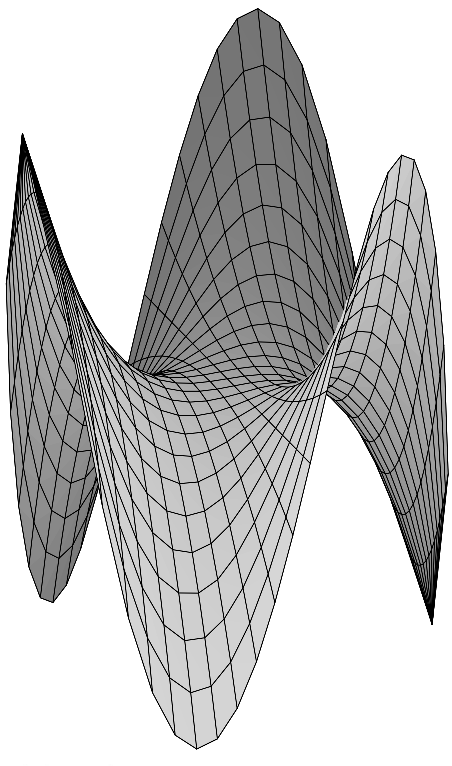
G. Felder mit Ergänzungen von P. Zimmermann

Partielle Differenzialgleichungen

für Ingenieurinnen und Ingenieure

hypertextuelle Notizen
zur Vorlesung Analysis III WS 2002/2003
und Analysis III HS 2020/2021



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Zurück

Inhaltsverzeichnis

G. Felder ist Markus Engeli, Thomas Liebrich und Torsten-Karl Strempel für zahlreiche Verbesserungen des Textes dankbar.

1. Grundbegriffe, Beispiele

1.1. Definitionen, Beispiele. Eine *partielle Differenzialgleichung* (PDG) ist eine Gleichung für eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ auf einem Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die als Gleichheit zweier Funktionen von $\mathbf{x}$ und den partiellen Ableitungen von $u(\mathbf{x})$ gegeben ist.

Zum Beispiel ist

$$(1) \qquad y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 yu \qquad \text{oder} \qquad yu_{xx} + u_y = x^2 yu$$

eine PDG für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei Variablen (Wir verwenden die Notation $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = (u_x)_x$, $u_{xy} = (u_x)_y = u_{yx}$, usw. für partielle Ableitungen).

Die Variablen x, y heissen *unabhängige Variablen* .

Die Variable u heisst *abhängige Variable* .

Die *Ordnung* einer PDG ist die Ordnung der partiellen Ableitung höchster Ordnung die darin vorkommt. Zum Beispiel ist (1) eine PDG zweiter Ordnung. Die PDG $xu_x u_{xxy} + u_x^4 = 0$ ist eine PDG dritter Ordnung, da die dritte Ableitung u_{xxy} und keine höhere Ableitung darin vorkommt.

Fast alle PDG, die in der Praxis auftreten, sind von erster oder zweiter Ordnung.

Eine *Lösung* einer PDG ist eine Funktion u, welche die PDG erfüllt. Zum Beispiel ist $u = \exp((x^2 - y^2)/2)$ eine Lösung von (1) (verifizieren Sie das).

Beispiele.

(1) Das elektrostatische Potenzial $u(x, y, z)$, das von einer gegebenen Ladungsdichteverteilung $\rho(x, y, z)$ erzeugt wird, erfüllt die Poisson-Gleichung

$$\triangle u = -4\pi\rho,$$

wobei $\triangle$ der Laplace-Operator (in drei Dimensionen) ist: $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

(2) Die *Wellengleichung* ist die PDG

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \triangle u.$$

$u(x, y, z, t)$ ist dabei zum Beispiel die Dichte der Luft im Punkt (x, y, z) zur Zeit t bei Schallwellen, eine Komponente des elektromagnetischen Feldes bei Lichtwellen, usw. Wir werden sehen, dass der Parameter $c > 0$ die Interpretation der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen hat.

(3) Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung:

$$u_t = \alpha \triangle u, \qquad \alpha > 0.$$

(4) Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ und der Druck $p(\mathbf{x}, t)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit als Funktion des Ortes $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und der Zeit t erfüllen die Navier–Stokes-Gleichung

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \triangle \mathbf{v} + \nabla p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \nu > 0.$$

Es handelt sich eigentlich um ein *System* von vier PDG für die vier Funktionen v_1, v_2, v_3, p.

Definition. Eine PDG für u heisst *linear* falls u und ihre Ableitungen gemeinsam höchstens linear vorkommen. Genauer: Eine lineare PDG für eine Funktion u von n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist von der Form

$$Lu(x_1, \ldots, x_n) = b(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei b eine Funktion der unabhängigen Variablen ist und L ein *linearer Differenzialoperator*; d.h. L ist ein Differenzialoperator, so dass

(1) $L(cu) = cL(u)$ und
(2) $L(u + v) = L(u) + L(v)$

für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ und alle hinreichend oft differenzierbaren Funktionen u und v. Wenn $b \equiv 0$, heisst die PDG *homogen.*

Zum Beispiel ist (1) linear mit

$$L = y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} - x^2 y, \qquad b = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist linear mit $L = \triangle$ und $b = -4\pi\rho$. Die Wellen- und Wärmeleitungsgleichungen sind linear. Die Navier–Stokes-Gleichung ist nicht linear. Weitere Beispiele von nichtlinearen partiellen Differenzialgleichungen sind $u_x + uu_y = 0$, $u_x = \sin(u_y)$.

1.2. **Energiebilanz: Herleitung der Wärmeleitungsgleichung.** Einige partielle Differenzialgleichungen, wie die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld, sind Grundgleichungen der Physik. Andere treten als Beschreibung von Systemen von sehr vielen Teilchen (z.B. einer Flüssigkeit) durch eine Kontinuumapproximation auf. Sie können oft aus anschaulichen Grundprinzipien hergeleitet werden. Dies soll illustriert werden am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension.

Wir betrachten die Temperaturverteilung $u(x,t)$ auf einem wärmeleitenden homogenen Stab der Länge L. Dabei ist $u(x,t)$ die Temperatur im Punkt $x \in [0,L]$ zur Zeit t.

Prinzipien: 1. Energiebilanz. Die Zeitliche Änderung der thermischen Energie in jedem Intervall $[a,b]$ ist gleich dem Wärmefluss durch die Ränder a, b

2. Die Energiedichte (Energie pro Längeneinheit) ist $\rho c u$. Die Dichte ρ und die spezifische Wärme c werden wir konstant annehmen.

3. Fouriergesetz: Der Wärmefluss ist proportional zum Gradienten der Temperatur ("Wärme fliesst von warm nach kalt"). Die Proportionalitätskonstante $k > 0$ heisst Wärmeleitfähigkeit.

In Formeln haben wir dann

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho c u(x,t)dx = -k\frac{\partial u}{\partial x}(a,t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(b,t). \tag{2}$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Ableitung der totalen Energie im Intervall $[a,b]$. Die rechte Seite ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch die Grenzen des Intervalls fliesst, mit dem richtigen Vorzeichen gerechnet. Diese Gleichung soll für alle Intervalle $[a,b]$ gelten. Mit dem Fundamentalsatz der Integrationsrechnung können wir diese Gleichung umformen:

$$\int_a^b \left(\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) dx = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Intervalle gilt, soll der Integrand verschwinden (Mittelwertsatz für kleine Intervalle $[a, a+\epsilon]$). Also haben wir die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \alpha u_{xx} = 0$, $\alpha = k/(\rho c)$.

Eine ähnliche Überlegung gilt in drei Dimensionen. Statt (2) haben wir, für jedes Volumen D mit Rand ∂D und nach aussen weisendem normalem Einheitsvektor $\mathbf{n}$,

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho c u(\mathbf{x},t)dV = \int_{\partial D} k\nabla u \cdot \mathbf{n}\, dA.$$

Dabei ist $k\nabla u \cdot \mathbf{n} dA$ der Wärmefluss durch das Flächenelement dA (positiv wenn Wärme *hinein*fliesst). Mit Hilfe des Gaussschen Divergenzsatzes können wir die rechte Seite als Volumenintegral schreiben:

$$\int_{\partial D} k\nabla u \cdot \mathbf{n}\, dA = k\int_D \triangle u\, dV.$$

Wir erhalten also die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \alpha\triangle u = 0$, $\alpha = k/(\rho c)$.

1.3. **Die eindimensionale Wellengleichung.** Wir wollen einen der wenigen Fälle studieren, wo alle Lösungen einer partiellen Differenzialgleichung explizit bekannt sind. Die *eindimensionale Wellengleichung*

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0$$

beschreibt z. B. die Amplitude $u(x,t)$ der (kleinen) Schwingungen einer Saite als Funktion von Ort x und Zeit t. Wir wollen diese Gleichung durch geschickte *Transformation der unabhängigen Variablen* vereinfachen. Zuerst führt man die neue Funktion $v(x,\tau) = u(x,\tau/c)$ ein. Erfüllt u die Wellengleichung, so erfüllt v die Gleichung $v_{\tau\tau} - v_{xx} = 0$, in welcher c nicht mehr vorkommt, und umgekehrt. Denn es gilt

$$v_{xx} = u_{xx}, \quad v_\tau = u_t\frac{1}{c}, \quad v_{\tau\tau} = u_{tt}\frac{1}{c^2}$$

und damit erhalten wir

$$v_{\tau\tau} - v_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx}.$$

Zweitens, d'Alembert folgend, führen wir neue Variablen $\xi = x - \tau$, $\eta = x + \tau$ ein und setzen $w(\xi,\eta) = v(x,\tau)$. Aus der Definition der Variablen ξ, η folgt

$$\begin{aligned}\frac{\eta+\xi}{2} &= \frac{1}{2}((x+\tau)+(x-\tau)) = \frac{2x}{2} = x\\ \frac{\eta-\xi}{2} &= \frac{1}{2}((x+\tau)-(x-\tau)) = \frac{2\tau}{2} = \tau\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$w(\xi,\eta) = v(x,\tau) = v\left(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\eta\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v_x}{2} - \frac{v_\tau}{2}\right) = \frac{v_{xx}}{4} + \frac{v_{x\tau}}{4} - \frac{v_{\tau x}}{4} - \frac{v_{\tau\tau}}{4} = \frac{v_{xx} - v_{\tau\tau}}{4}$$

Dies zeigt, wenn v die Gleichung $v_{\tau\tau} - v_{xx} = 0$ löst, dann erfüllt w die Gleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} = 0$, und umgekehrt. Zusammengefasst: Die Wellengleichung für u ist dann äquivalent zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

Jean d'Alembert
1717–1783

für w. Diese Gleichung bedeutet, dass $\partial w/\partial\xi$ unabhängig von η ist, also

$$\frac{\partial w(\xi,\eta)}{\partial\xi} = f(\xi)$$

Nach Integration (bei jedem festen η) folgt

$$w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist und die Integrationskonstante $G(\eta)$ von η abhängen kann.

Umgekehrt ist es klar, dass $w = F(\xi) + G(\eta)$ für beliebige differenzierbare Funktionen F, G eine Lösung von $w_{\xi\eta} = 0$ ist.

In den ursprünglichen Variablen ausgedrückt, haben wir das Resultat (von d'Alembert):

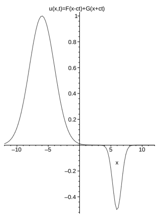
Für beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen F, G ist

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{3}$$

eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Alle (zweimal stetig differenzierbaren) Lösungen sind von dieser Form.



>Visualisierung

Zum Beispiel ist $u(x,t) = F(x-ct)$ eine Lösung. Sie beschreibt eine Welle, die sich mit Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nach rechts bewegt: Der Graph der Funktion $x \mapsto u(x,t)$ verschiebt sich nach einer Zeit t um ct. Analog beschreibt $G(x+ct)$ eine sich nach links bewegende Welle. Eine Formel wie (3), die alle Lösungen einer PDG angibt, heisst *allgemeine Lösung* der PDG.

Wir sehen, dass im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differenzialgleichungen, deren allgemeine Lösung typischerweise von endlich vielen Konstanten abhängt, die allgemeine Lösung der Wellengleichung von beliebig wählbaren *Funktionen* abhängt. In den Anwendungen werden diese Funktionen mit Hilfe der im physikalischen Problem auftretenden Nebenbedingungen (Randbedingungen oder Anfangsbedingungen) bestimmt. Für die Wellengleichung hat man typischerweise ein *Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{4}$$

Beschreibt u die Amplitude einer in einer Ebene schwingenden Saite, so sind die vorgegebenen Funktionen $f(x)$, $g(x)$ die Anfangsamplitude bzw. die Anfangsgeschwindigkeit im Punkt x (die Notation $u_t(x,0)$ bedeutet den Wert der Funktion $u_t(x,t)$ an der Stelle $t=0$).

Um die Lösung des Anfangswertproblems für beliebig vorgegebene f, g zu finden, setzen wir unsere allgemeine Lösung ein, und finden Bedingungen für F, G:[1]

$$F(x)+G(x)=f(x), \qquad c(-F'(x)+G'(x))=g(x).$$

Wir leiten die erste Gleichung ab und lösen nach F', G' auf:

$$F'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2c}g(x), \quad G'(x)=\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2c}g(x).$$

Daraus folgt

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy+C, \quad G(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy-C,$$

wobei die Integrationskonstanten $\pm C$ so gewählt wurden, dass die Anfangsbedingung $F(x)+G(x)=f(x)$ gilt. In der Lösung $u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$ kürzen sich die Integrationskonstanten, und wir erhalten:

Die Lösung des Anfangswertproblems (4) der eindimensionalen Wellengleichung ist

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

Bemerkung. Wir sehen hier das Phänomen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale bei der Wellengleichung, welches auch in höheren Dimensionen auftritt: Nehmen wir an, dass die Anfangsfunktionen f, g in einem kleinen Intervall $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$ verschieden von 0 und sonst überall null sind. Nach einer Zeit t kann die Lösung $u(x,t)$ nur im Intervall $[x_0-\epsilon-ct, x_0+\epsilon+ct]$ verschieden von 0 sein: Das zur Zeit $t=0$ in x_0 ausgesandte Signal hat zur Zeit t nur Punkte im Abstand $\leq ct$ erreicht. Wir werden eine stärkere Fassung dieses Phänomens (Huygens-Prinzip) im Fall der dreidimensionalen Wellengleichung diskutieren.

[1] Nach der Kettenregel ist $\frac{\partial}{\partial t}F(x-ct)=F'(x-ct)(-c)$, wobei F' die Ableitung der Funktion F bezeichnet: $F'(\xi)=\frac{dF(\xi)}{d\xi}$.

1.4. **Wohl gestellte Probleme.** Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung *hat eine eindeutige Lösung*: Es gibt genau eine Lösung, welche die Anfangsbedingungen erfüllt. Zudem ist die Lösung *stabil*: Werden f, g ein wenig geändert so ändert sich die Lösung zu jeder gegebenen Zeit t wenig: Ersetzen wir nämlich die Anfangsfunktionen f, g durch $f + \delta f$, $g + \delta g$ mit $\max(|\delta f(x)|) < \epsilon$ und $\max(|\delta g(x)|) < \epsilon$, so ist die Lösung $u + \delta u$ mit

$$|\delta u(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \epsilon dy = \epsilon(1+t).$$

Probleme mit diesen zwei Eigenschaften, der Existenz einer eindeutigen Lösung und der Stabilität unter Änderung von Anfangs- oder Randdaten, nennt man *wohl gestellt*. Diese Eigenschaften sind wichtig für die Anwendungen: Bei einem wohl gestellten Anfangswertproblem gibt die gerechnete Lösung mit durch Messungen bestimmten Anfangsfunktionen eine gute Approximation des Verhaltens des Systems, selbst wenn die Messungen ungenau sind. Darüber hinaus sind die numerischen Lösungen eines Problems, bei dem die Anfangs- und Randdaten notwendigerweise durch eine Approximation gegeben werden, nur sinnvoll, wenn das Problem wohl gestellt ist.

Wir werden ein Beispiel eines schlecht gestellten Problems bei der Wärmeleitungsgleichung im Abschbitt 3.6 treffen.

2. Lineare partielle Differenzialgleichungen, Separation der Variablen

2.1. Homogene lineare PDG, Superpositionsprinzip. Eine lineare partielle Differenzialgleichung für $u = u(x_1, \dots, x_n)$ hat die allgemeine Form $Lu = b$, wobei L ein Differenzialoperator und b eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen ist. Eine lineare Differenzialgleichung heisst *homogen* falls $b = 0$.

Wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist die wichtigste Eigenschaft einer homogenen linearen partiellen Differenzialgleichung das *Superpositionsprinzip*

Sind $u_1, \dots, u_n$ Lösungen der linearen PDG

$$Lu = 0,$$

so auch jede Linearkombination

$$u = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten: Die Lösungen einer homogenen PDG bilden einen Vektorraum.

Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität $L(c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) = c_1 L u_1 + \cdots + c_n L u_n$, die wiederum auf der Linearität der partiellen Ableitungen beruht.

Bei einer homogenen linearen *gewöhnlichen* Differenzialgleichung ist der Vektorraum der Lösungen endlichdimensional.[2] Dagegen ist aber der Vektorraum der Lösungen einer homogenen linearen PDG im allgemeinen *unendlichdimensional*, wie wir bei der Wellengleichung schon bemerkt haben. Daher will man das Superpositionsprinzip so erweitern, dass auch unendliche Linearkombinationen

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j u_j$$

[2] eine homogene lineare gewöhnliche Differenzialgleichung der Ordnung n hat einen n-dimensionalen Lösungsraum. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$u''(x) - u(x) = 0$$

zwei linear unabhängige Lösungen $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$. Diese Lösungen bilden eine Basis des Lösungsraum. Also ist die allgemeine Lösung

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

von Lösungen u_j Lösungen ergeben. Dies gilt tatsächlich unter geeigneten Konvergenzbedingungen.

2.2. **Methode der Separation der Variablen.** Wir betrachten zuerst partielle Differenzialgleichungen für Funktionen $u(x, t)$ von zwei Unbekannten. Die Methode der Separation der Variablen besteht aus zwei Schritten:

(i) Finde Lösungen der Form $u(x, t) = X(x)T(t)$.
(ii) Hoffe, dass die allgemeine Lösung durch eine (möglicherweise unendliche) Linearkombination von Lösungen dieser Form gegeben ist.

Auch wenn die Hoffnung in (ii) in dieser Allgemeinheit nicht erfüllt ist, ist die Methode bei vielen Problemen erfolgreich: Dabei versucht man nicht die allgemeine Lösung zu bestimmen, sondern diejenige Lösung in der Form einer solchen Linearkombination, die die gegebene Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt.

Wir wollen diese Idee anhand des Beispiels eines Anfangs-/Randwertproblems der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung illustrieren.

Beispiel 2.A. Man soll die Temperaturverteilung eines Stabes der Länge L untersuchen, dessen Enden auf einer festen Temperatur gehalten werden, die wir mit passender Wahl der Temperaturskala auf Null festlegen:

$$\begin{array}{ll} u_t = \alpha u_{xx}, & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \ge 0, \text{Randbedingung} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \ell, \text{Anfangsbedingung,} \end{array}$$

für eine gegebene anfängliche Temperaturverteilung $f(x)$, die die Randbedingungen erfüllt, zum Beispiel

$$f(x) = \sin(\pi x/\ell).$$

Die Konstante $\alpha > 0$ ist ein Parameter.

Im ersten Schritt suchen wir also Lösungen der Form $u(x, t) = X(x)T(t)$. Wir setzen diese Funktion in die PDG:

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t).$$

Hier kommt die eigentliche Separation der Variablen, wo alles was von x abhängt nach rechts und alles was von t abhängt nach links geschoben wird:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Die linke Seite ist jetzt unabhängig von x und die rechte Seite ist unabhängig von t. Da beide Seiten gleich sind, sind sie unabhängig von x

und von t also konstant:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda = \alpha \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Umgekehrt gilt: Sind $X(x)$, $T(t)$ Funktionen und λ eine Konstante, welche diese Gleichungen erfüllen, so ist $u(x,t) = X(x)T(t)$ eine Lösung der gegebenen partielle Differenzialgleichung. Wir haben also, für jedes λ, gewöhnliche Differenzialgleichungen für X und T. Wir betrachten zuerst die Gleichung für X:

$$X''(x) - \frac{\lambda}{\alpha} X(x) = 0.$$

Ist $\lambda < 0$, so hat diese Gleichung die allgemeine Lösung

$$X(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x), \qquad \omega = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Wir setzen hier die Randbedingungen ein: $T(t)X(0) = T(t)X(\ell) = 0$ also $X(0) = X(\ell) = 0$ (oder $T \equiv 0$ aber diese triviale Lösungen wollen wir nicht berücksichtigen). Es folgt, dass $B = 0$ und $\omega = \pi n/\ell$, $n = 1, 2, \ldots$, also

$$\lambda = -\frac{\alpha \pi^2 n^2}{\ell^2}, n = 1, 2, \ldots$$

Nur für diese Werte von λ hat man eine nichttriviale Lösung der Form XT, die die Randbedingungen erfüllt.[3] Die allgemeine Lösung der Gleichung für T ist dann $T(t) = Ce^{\lambda t}$.

Also haben wir für jedes $n = 1, 2, \ldots$ eine Lösung der Form $X(x)T(t)$, nämlich

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right),$$

(oder proportional dazu) die auch die Randbedingungen erfüllt.

Im zweiten Schritt wollen wir das Superpositionsprinzip verwenden um den Kandidat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

für die allgemeine Lösung zu untersuchen. Im vorliegende Fall will man die Lösung finden, die die Anfangsbedingung erfüllt: $u(x,0) = f(x)$, oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = f(x).$$

Das Problem, Koeffizienten c_n zu finden, so dass diese *Sinusreihe* eine vorgegebene, auf $[0, \ell]$ definierte, Funktion f gibt, ist Teil der Theorie der Fourier-Reihen, die wir im nächsten Kapitel studieren. In unserem Beispiel

[3] Dies haben wir gezeigt unter der Annahme $\lambda < 0$. Für positive λ hat man aber Exponentialfunktionen, die nicht beide Randbedingungen erfüllen können

für f können wir einfach $c_1 = 1$, $c_j = 0$, $j \neq 1$ nehmen. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$u(x,t) = e^{-\frac{\alpha\pi^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right).$$

Beispiel 2.B. Wir wollen das folgende Anfangswertproblem für eine Funktion $u(x,t)$ lösen:

$$\begin{aligned} &xu_x = u_t \qquad\qquad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0,\\ &u(x,0) = x + 2x^3. \end{aligned}$$

Der Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ führt auf die Gleichung

$$xX'(x)T(t) = X(x)T'(t),$$

oder

$$x\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Wieder sind hier beide Seiten unabhängig von x, t also gleich einer Konstante λ. Wir haben dann die gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$xX'(x) = \lambda X(x), \qquad T'(t) = \lambda T(t),$$

mit Lösungen

$$X(x) = C_1 x^\lambda, \qquad T(t) = C_2 e^{\lambda t}.$$

Genauer: Aus der Gleichung für X folgt

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{\lambda}{x} = \lambda\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d}{dx}\ln(x^\lambda).$$

Andererseits kann die linke Seite geschrieben werden als $\frac{d}{dx}\ln(X(x))$ und damit folgt

$$\ln(X(x)) = \ln(x^\lambda) + C = \ln(x^\lambda) + \ln(e^C) = \ln(e^C x^\lambda)$$

für eine noch zu bestimmende Konstante C. Wir erhalten

$$X(x) = C_1 x^\lambda,$$

wobei wir $\ln(0) = 1$ benutzt haben und $C_1 = e^C$ setzten. Also für jedes λ haben wir eine Lösung der Form $X(x)T(t)$, nämlich

$$u_\lambda(x,t) = x^\lambda e^{\lambda t}.$$

Also auch jede Linearkombination von solchen Lösungen ist eine Lösung. Für $t = 0$ gilt $u_\lambda(x,0) = x^\lambda$, also ist die Linearkombination, die die Anfangsbedingung erfüllt

$$u(x,t) = u_1(x,t) + 2u_3(x,t) = xe^t + 2x^3e^{3t}.$$

2.3. **Inhomogene Probleme.** Die Probleme, die wir bis jetzt betrachtet haben, sind *homogen*: Die partielle Differenzialgleichung ist homogen linear und die Randbedingungen sind von der Form $u(a,t) = 0$. Solche Randbedingungen nennt man homogen. Allgemeiner heisst eine Randbedingung homogen, wenn sie fordert, dass eine Linearkombination der Werte der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen auf dem Rand gleich null ist. Die wesentliche Eigenschaft homogener Probleme ist das Superpositionsprinzip. Wenn die PDG nicht homogen ist oder wenn die Randbedingungen nicht homogen sind, kann die Methode der Separation der Variablen nicht direkt funktionieren: Summen von Lösungen sind im Allgemeinen keine Lösungen. Es gilt aber das allgemeine Prinzip der linearen Algebra:

Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Randwertproblems ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Problems plus eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Das “zugehörige homogenene Problem” erhält man, in dem man die rechte Seite der PDG und die Randwerte durch Null ersetzt. Die “partikuläre Lösung” ist irgendeine Lösung, die man typischerweise erratet.

Beispiel 2.C. Die PDG

$$c^{-2}u_{tt} - u_{xx} = \cos(x)$$

ist linear, aber inhomogen (wir fordern keine Randbedingungen hier). Die zugehörige homogene PDG ist die eindimensionale Wellengleichung. Die rechte Seite ist unabhängig von t. Es ist also natürlich zu versuchen, eine t-unabhängige partikuläre Lösung zu finden: Sie soll $-u_{xx} = \cos(x)$ erfüllen, woraus wir die partikuläre Lösung $u(x,t) = \cos(x)$ finden. Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(x,t) = \cos(x) + F(x - ct) + G(x + ct).$$

Beispiel 2.D. Wir betrachten wie im Beispiel 2.A die Wärmeleitungsgleichung auf einem Intervall, aber diesmal wollen wir die Temperatur an den Endpunkten auf verschiedene Werte festsetzen:

$$\begin{array}{lll} u_t = \alpha u_{xx}, & & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = T_1, & u(\ell,t) = T_2, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & & 0 \le x \le \ell, \end{array}$$

Wir ignorieren zunächst die Anfangsbedingung und betrachten die PDG mit den Randbedingungen. Wir versuchen wieder, eine von t unabhängige partikuläre Lösung $u(x,t) = u_P(x)$ zu finden. Eine solche erfüllt $u_P''(x) =$

$0, u_P(0) = T_1, u_P(\ell) = T_2$. Wir erhalten die partikuläre Lösung $u_P(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/\ell$. Also ist die allgemeine Lösung von der Form

$$u(x,t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell}\, x + U(x,t), \tag{5}$$

wobei U die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist

$$\begin{array}{lll} U_t = \alpha U_{xx}, & & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge 0, \\ U(0,t) = 0, & U(\ell,t) = 0, & t \ge 0. \end{array}$$

Die Anfangsbedingung kann jetzt eingesetzt werden. Aus (5) sehen wir, dass die Anfangsbedingung für U

$$U(x,0) = f(x) - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ell}\, x$$

ist. Das homogene Problem für U kann mit der Methode der Separation der Variablen wie im Beispiel 2.A gelöst werden.

3. Fourier-Reihen

3.1. Komplexe Zahlen und die Exponentialabbildung . Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ Real- bzw. Imaginärteil von z genannt werden und die imaginäre Einheit i die Identität $i^2 = -1$ erfüllt. Die Addition und das Produkt zweier komplexer Zahlen $z = x + iy, w = u + iv$ sind definiert durch

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \quad zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Die komplex Konjugierte von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ergibt sich durch Umkehrung des Vorzeichens des Imaginärteils und wird mit

$$\overline{z} = x - iy$$

bezeichnet und erfüllt

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$$

für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$. Zusätzlich folgt aus der Definition der komplexen Konjugation, dass gilt

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(x + iy) + (x - iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$
$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(x + iy) - (x - iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y$$

für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert als die Euklidische Norm des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und wir schreiben dafür

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man rechnet leicht nach, dass folgende Eigenschaften gelten

$$|z|^2 = z\,\overline{z} = |\overline{z}|^2, \quad |zw| = |z|\,|w|, \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$. Geometrisch können wir jede komplexe Zahl $z = x+iy$, wenn wir sie mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren, durch ihren Betrag $r = |z|$ und den Winkel φ zwischen der $x-$Achse und der Geraden durch den Ursprung und $z \leftrightarrow (x, y)$ darstellen:

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Dies ist die Polarkoordinatendarstellung von z und aus Abbildung 1 (siehe unten) lesen wir ab

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Weiter folgt aus Abbildung 1 mit $r = 1$ und dem Satz von Pytha-

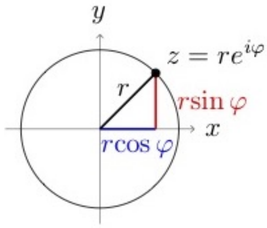


Abbildung 1. Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl $z = x + iy$.

goras, dass

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt. Wir fassen nun ein paar Eigenschaften des Sinus und Kosinus zusammen:

(1) Es gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Der Kosinus ist eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion, d.h. es gilt $\cos(-x) = \cos(x), \sin(-x) = -\sin(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Es gilt $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) Es gilt $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x), \sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (1) Aus der Euler'schen Identität $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt, dass $\cos(x)$ der Realteil und $\sin(x)$ der Imaginärteil von e^{ix} ist. Aus der obigen Darstellung des Real- bzw. Imaginärteils folgen die angegeben Formeln, wenn wir $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$ zeigen können. Aber mit $|z|^2 = z\,\overline{z}$, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ erhalten wir

$$\overline{e^{ix}} = \frac{|e^{ix}|^2}{e^{ix}} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{e^{ix}} = \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}.$$

(2) Dies ist eine direkte Konsequenz von (1), denn es gilt

$$\cos(-x) = \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x),$$

$$\sin(-x) = \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{2i} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x).$$

(3) Mit der Kettenregel, der Eueler'schen Identität und $i^2 = -1$ erhalten wir

$$(e^{ix})' = ie^{ix} = i(\cos(x) + i\sin(x)) = -\sin(x) + i\cos(x) \quad \text{und}$$
$$(e^{ix})' = (\cos(x))' + i(\sin(x))'.$$

Daraus folgt

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \text{und} \quad (\sin(x))' = \cos(x).$$

(4) Aus Abbildung 1 und der Identifikation $i \leftrightarrow (0, 1)$ sehen wir $i = e^{\pi/2}$ und damit folgt

$$\cos(x + \pi/2) + i\sin(x + \pi/2) = e^{i(x+\pi/2)} = e^{ix}e^{i\pi/2} = ie^{ix} = (e^{ix})'.$$

Mit Eigenschaft (3) erhalten wir

$$\cos(x+\pi/2)+i\sin(x+\pi/2) = (\cos(x))'+i(\sin(x))' = -\sin(x)+i\cos(x).$$

Es folgt

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + \pi/2) = \cos(x).$$

□

3.2. **Fourier-Reihen periodischer Funktionen. Definition.** Sei $L > 0$. Eine auf $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige Funktion $f(x)$ heisst *L-periodisch* (oder periodisch mit Periode L) falls

$$f(x + L) = f(x), \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele von L-periodischen Funktionen:

(i) $\cos(x), \sin(x), e^{ix}$ sind 2π-periodische Funktionen.

(ii) Es folgt, dass $\cos(2\pi x/L), \sin(2\pi x/L), e^{2\pi i x/L}$ L-periodische Funktionen sind.

(iii) Für jede ganze Zahl n sind die Funktionen

$$\cos(2\pi nx/L), \qquad \sin(2\pi nx/L), \qquad e^{2\pi inx/L}$$

L-periodisch (sie sind ebenfalls L/n-periodisch).

(iv) Linearkombinationen von L-periodischen Funktionen sind L-periodisch.

Definition. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi in}{L}x}, \qquad c_n \in \mathbb{C},$$

heisst (komplexe) *Fourier-Reihe*.

Falls eine Fourier-Reihe für alle x konvergiert, definiert sie eine Funktion

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x},$$

die L-periodisch ist. Die Fragen, die die Theorie der Fourier-Reihe beantwortet, sind: Kann jede periodische Funktion als eine Fourier-Reihe dargestellt werden? Wenn ja, wie bestimmt man die Koeffizienten c_n?

Lemma 3.1. *Sei n eine ganze Zahl.*

$$\frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L}x}dx=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

Beweis: Für $n=0$ ist diese Identität $\frac{1}{L}\int_0^L dx=1$. Für $n\neq 0$,

$$\int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L}x}dx=\tfrac{L}{2\pi i n}(e^{2\pi i n}-e^{2\pi i 0})=0.$$

□

Lemma 3.2. *Ist $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}$ mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$, so gilt*

$$c_n=\frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x}f(x)dx. \tag{6}$$

Beweis: Nach Lemma 3.1 gilt

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-\frac{2\pi i n}{L}x}dx=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\frac{1}{L}\int_0^L e^{\frac{2\pi i(m-n)}{L}x}dx=c_n.$$

Die Vertauschung von Integral und Summe ist erlaubt, da die Summe absolut konvergiert. □

Wir haben also gezeigt: Wenn eine periodische Funktion durch eine Fourier-Reihe gegeben ist, dann kann man die Koeffizienten c_n aus der Funktion durch (6) bestimmen. Bleibt die Frage, welche Funktionen durch Fourier-Reihen dargestellt werden können. Der folgende Satz, den wir nicht beweisen, gibt dazu Auskunft.

Satz 3.1. *Sei $f(x)$ eine 2-mal stetig differenzierbare L-periodische Funktion. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x},$$

wobei die Fourier-Koeffizienten c_n *durch die Formel*

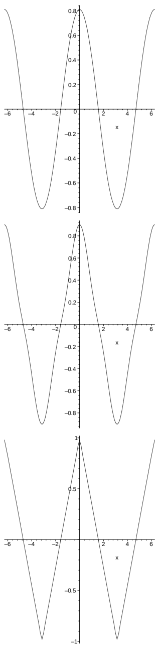
$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} f(x)dx \tag{7}$$

gegeben sind.
Ist $f(x)$ stückweise 2-mal stetig differenzierbar, so gilt dasselbe, aber nur für x wo f stetig ist.

Bemerkung. In der Formel für c_n können wir statt von 0 bis L auf einem beliebigen Intervall der Länge L integrieren. Dies folgt, da der Integrand L-periodisch ist: Wenn wir beispielsweise von a bis $L+a$ mit $a>0$, integrieren, liefert der Teil des Integrals zwischen L und $L+a$ denselben Beitrag wie das Integral von 0 bis a. Also ist $\int_a^{L+a}(\dots) = \int_0^a(\dots) + \int_a^L(\dots) = \int_0^L(\dots)$.

Ein oft nützliches Integrationsintervall ist $[-L/2, L/2]$. Also haben wir

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-\frac{2\pi i n}{L}x}dx. \tag{8}$$



Partialsummen
$N = 1, 3, 9.$

Beispiel 3.A. Wir wollen die Funktion $f(x) = 1 - 2|x|/\pi$, $-\pi < x \le \pi$ zu einer 2π-periodischen Funktion fortsetzen (Abb. 2).

Die Fourier-Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-2|x|/\pi)e^{-inx}dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2}, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$

wie man durch partielle Integration findet.

Es gilt also

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{-\infty<n \text{ ungerade}<\infty} \frac{1}{n^2}e^{inx}.$$

Nimmt man die Terme für n und $-n$ zusammen, so erhält man mit $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx) = \frac{8}{\pi^2}\cos(x) + \frac{8}{9\pi^2}\cos(3x) + \cdots$$

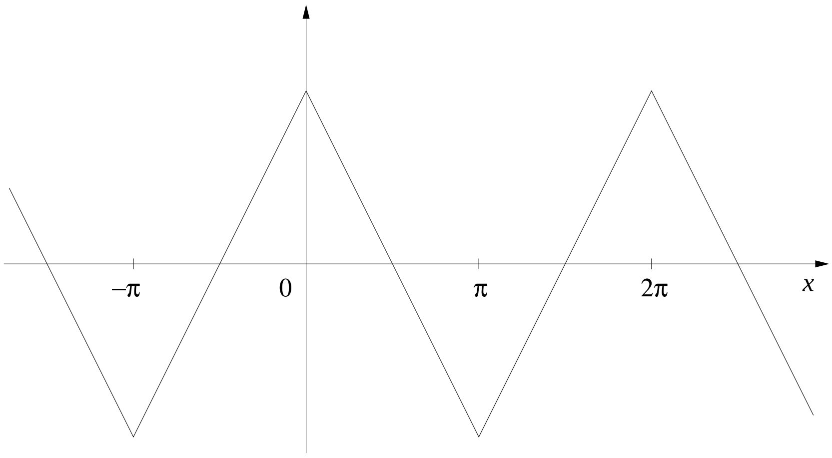


ABBILDUNG 2. Die 2π-periodische Fortsetzung der auf $[-\pi, \pi]$ definierten Funktion $1 - 2|x|/\pi$

Da $f(0) = 1$, erhält man nach Division durch $8/\pi^2$ eine Formel für die Summe der Inversen der Quadrate der ungeraden Zahlen:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Übung. Leiten Sie aus dieser Formel die Eulersche Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

her. Hinweis: Jede gerade Zahl ist das Doppelte einer ganzen Zahl.

3.3. **Anwendung: Wärmeleitung auf einem Ring.** Wir betrachten die Temperaturverteilung auf einem Ring mit Radius R. Die Temperatur im Punkt mit Bogenlänge x (S. Abb. 3) zur Zeit t sei mit $u(x,t)$ bezeichnet. Da x und $x+2\pi R$ denselben Punkt auf dem Ring darstellen, gilt $u(x+2\pi R, t) = u(x,t)$, also ist u eine $2\pi R$-periodische Funktion von x. Es gilt also

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx/R},$$

wobei

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} u(x,t)\, e^{-inx/R} dx.$$

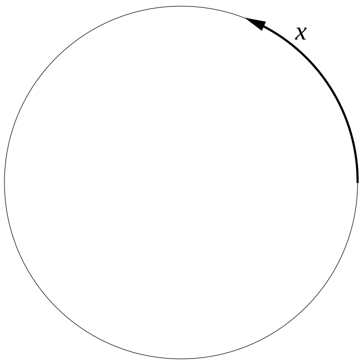


Abbildung 3. Wärmeleitung auf einem Ring

Die grundlegende Bemerkung, die wir im Fall der Wärmeleitungsgleichung jetzt machen werden, ist, dass *lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für $u(x,t)$ äquivalent zu gewöhnlichen Differenzialgleichungen für die Fourier-Koeffizienten $c_n(t)$ sind.*

In unserem Fall soll $u(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllen

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \qquad u(x + 2\pi R, t) = u(x,t).$$

Also gilt, nach Differenzieren unter dem Summationszeichen,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{dc_n}{dt} + \alpha \frac{n^2}{R^2} c_n \right) e^{inx/R} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass die linke Seite die Fourier-Reihe der Funktion 0 ist, für welche alle Fourier-Koeffizienten $= 0$ sind. Also ist die Wärmeleitungsgleichung äquivalent zu

$$\frac{dc_n}{dt} + \alpha \frac{n^2}{R^2} c_n = 0,$$

für alle ganzen Zahlen n, mit Lösung

$$c_n(t) = e^{-\alpha \frac{n^2}{R^2} t} c_n(0).$$

Die unendlich vielen Integrationskonstanten $c_n(0)$ werden festgelegt, wenn Anfangsbedingungen gestellt werden. Ist $u(x,0) = f(x)$ die gegebene, $2\pi R$-periodische Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$, so sind die Fourier-Koeffizienten $c_n(0)$ zur Zeit 0 gleich den Fourier-Koeffizienten von f, nämlich

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(x)\, e^{-inx/R} dx.$$

Das Resultat ist also

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Temperaturverteilung $u(x,t) = u(x+2\pi R, t)$ auf einem Ring vom Radius R,

$$\begin{aligned} &u_t - \alpha u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}$$

ist

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0)\, e^{inx/R - \alpha n^2 t/R^2},$$

mit

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} f(x)\, e^{-inx/R} dx.$$

Bemerkung. Wir haben in der Herleitung der Lösung *komplexe Zahlen* benutzt. Genauer haben wir die Funktion $u(x,t)$ als eine *komplexwertige* Funktion von reellen Variablen x, t betrachtet. Obwohl das physikalische Problem nach einer reellwertigen Lösung fragt, ist es nützlich, das Problem in dieser grösseren Allgemeinheit zu studieren: Der Vorteil besteht wie bei linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen darin, dass Exponentialfunktionen leichter zu behandeln sind als trigonometrische Funktionen. Auf jeden Fall sind reellwertige Lösungen Spezialfälle von komplexwertigen Lösungen, und bei reellen Anfangsbedingungen erhält man automatisch reelle Lösungen. Spezielle Eigenschaften von reellwertigen Fourier-Reihen werden im nächsten Abschnitt studiert.

3.4. **Reelle Fourier-Reihen, Kosinus- und Sinusreihen.** Aus den Formeln

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{9}$$

folgt, dass jede Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x},$$

auch mit cos und sin geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\cos\frac{2\pi n}{L} + i\sin\frac{2\pi n}{L}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos\frac{2\pi n}{L} + i\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sin\frac{2\pi n}{L} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n})\cos\frac{2\pi n}{L} + i\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{-n})\sin\frac{2\pi n}{L} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{L}x + b_n\sin\frac{2\pi n}{L}x\right),
\end{aligned}$$

wobei wir $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ gesetzt haben und verwendeten, dass cos eine gerade und sin eine ungerade Funktion ist. Mit (8) hat man dann das Resultat

Für jede L-periodische stückweise 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt (ausser an den Unstetigkeitsstellen)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{L}x + b_n\sin\frac{2\pi n}{L}x\right).$$

Die Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sind:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\frac{2\pi n}{L}x\,dx, \qquad n \geq 0, \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\frac{2\pi n}{L}x\,dx, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

In der Tat folgt aus Eigenschaft (1) in Abschnitt 3.1 und $i^2 = -1$, dass gilt:

$$\begin{aligned}
a_n = c_n + c_{-n} &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\left(e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} + e^{\frac{2\pi i n}{L}x}\right)dx \\
&= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\frac{2\pi i n}{L}x\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n = i(c_n - c_{-n}) &= \frac{i}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\left(e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} - e^{\frac{2\pi i n}{L}x}\right)dx \\
&= -\frac{2i^2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\frac{2\pi i n}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\frac{2\pi i n}{L}x\,dx.
\end{aligned}
$$

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heisst *gerade* falls $f(-x) = f(x)$. Sie heisst *ungerade* falls $f(-x) = -f(x)$.

Zum Beispiel ist, für alle a, $\cos(ax)$ eine gerade Funktion, $\sin(ax)$ eine ungerade Funktion. Das Produkt von zwei geraden oder zwei ungeraden Funktionen ist gerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Das Integral einer ungeraden Funktion auf einem symmetrischen Intervall $[-L/2, L/2]$ verschwindet. Daraus folgt:

Ist $f(x)$ eine ungerade L-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten a_n, und $f(x)$ ist durch eine Sinusreihe gegeben:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n\,x}{L}, \qquad (f \text{ ungerade}),$$

wobei

$$b_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(x)\,\sin\frac{2\pi n\,x}{L}\,dx, \qquad n \geq 1. \tag{10}$$

Die Formel für die Koeffizienten ist durch ein Integral einer geraden Funktion gegeben: Der Beitrag des Intervalls $[-L/2, 0]$ ist gleich dem Beitrag des Intervalls $[0, L/2]$.

Analog erhält man:

Ist $f(x)$ eine gerade L-periodische Funktion, so verschwinden die Fourier-Koeffizienten b_n, und $f(x)$ ist durch eine Kosinusreihe *gegeben:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x, \qquad (f \text{ gerade}),$$

wobei

$$a_n = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} f(x)\,\cos\frac{2\pi n}{L}x\,dx, \qquad n \geq 0.$$

3.5. **Die schwingende Saite.** Ein Modell für die ebene Schwingungen einer an den Endpunkten festgehaltenen Saite der Länge ℓ ist durch die Wellengleichung mit Randbedingungen gegeben:

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad 0 \le x \le \ell, \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist $u(x,t)$ die Amplitude der Saite im Punkt x zur Zeit t. Dies bedeutet, dass die Lage der Saite zur Zeit t durch die Kurve in der x-y-Ebene mit Gleichung $y = u(x,t)$ beschrieben wird. Die Randbedingungen $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ besagen, dass die Endpunkte zu allen Zeiten festgehalten werden.

Physikalisch erwartet man, dass die Lösung eindeutig bestimmt wird, wenn wir zu einer bestimmten Zeit, sagen wir $t = 0$, die Anfangslage $u_0(x)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$ vorgeben. Also betrachten wir zusätzlich zu (11) die *Anfangsbedingungen*

$$(12)\qquad \begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 \le x \le \ell, \\ u_t(x,0) &= v_0(x), \quad 0 \le x \le \ell. \end{aligned}$$

Die vorgegebenen Funktionen $u_0(x)$, $v_0(x)$ sollen mit den Randbedingungen verträglich sein, also für $x = 0, \ell$ verschwinden. Wir setzen u_0, v_0 als ungerade Funktionen auf $[-\ell, \ell]$ fort. Den Grund dafür werden wir später sehen und in der Tat stellt sich heraus, dass die Lösung unabhängig von der Wahl der Fortsetzung ist.

Obwohl dieses Anfangswertproblem mit einem direkten Fourieransatz gelöst werden kann, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, wollen wir hier systematischer die Methode der Separation der Variablen anwenden. Also schreiben wir $u(x,t) = X(x)T(t)$ und finden aus

$$\frac{1}{c^2}T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

die Relation

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

für noch ein zu bestimmendes $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir erhalten die separierten Gleichungen

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad c^{-2}T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Die Randbedingungen $X(0) = X(\ell) = 0$ sind nur dann erfüllt, falls $A = 0$ und $\sqrt{\lambda}\ell = \pi n$, wobei n eine ganze Zahl ist. Also ist $\lambda =$

$(\pi n/\ell)^2$ und linear unabhängige Lösungen der zweiten Gleichung sind $\cos(\omega_n t), \sin(\omega_n t)$, $\omega_n = c\pi n/\ell$. Wir erhalten die Lösung von (11)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \qquad \omega_n = \frac{c\pi n}{\ell}.$$

Setzen wir $t = 0$ in u und u_t so erhalten wir aus den Anfangsbedingungen Gleichungen für die Koeffizienten A_n, B_n:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \\ v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right). \end{aligned}$$

Also sind u_0, v_0 Sinusreihen mit $L = 2\ell$. Dies erklärt weshalb wir u_0, v_0 als ungerade Funktionen fortsetzten. Aus der Formel für die Fourier-Koeffizienten erhalten wir

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx. \tag{13}$$

$$B_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx. \tag{14}$$

Genauer: Da $u_0, v_0, \sin$ ungerade Funktionen sind, gilt

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} u_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx \\ B_n \omega_n &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} v_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx. \end{aligned}$$

Benutzen wir $\omega_n = c\pi n/\ell$ dann folgen die gewünschten Formeln. Dabei ist es wichtig, dass die Koeffizienten der Sinusreihen nur von den Werten von u_0, v_0 auf dem Intervall $[0, \ell]$, wo unsere Funktionen definiert sind, abhängen. Die Sinusreihen selbst sind dann für alle x definiert: Ihre Summen sind die eindeutigen ungeraden 2ℓ-periodischen Funktionen, die mit u_0, bzw. v_0 auf $[0, \ell]$ übereinstimmen.

Wir fassen zusammen:

Die Lösung von (11) mit Anfangsbedingungen (12) ist die Reihe
(15)

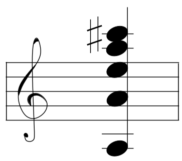
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$

wobei

$$\omega_n = \frac{c\pi n}{\ell},$$

und die Koeffizienten A_n, B_n aus den Anfangsbedingungen mittels (13) auszurechnen sind.

Die Zahlen ω_n sind die *Kreisfrequenzen* der Schwingung. Die Lösung (12) ist eine Summe von *Eigenschwingungen*: Jeder Summand ist eine in der Zeit periodische Funktion, wobei die Periode des n-ten Summanden $2\pi/\omega_n$ ist. Dies entspricht einer *Frequenz* (Zyklen pro Zeiteinheit) $\nu_n = \omega_n/(2\pi)$. Lässt man die Saite eines musikalischen Instruments schwingen, so empfindet das Ohr die Frequenzen der Schwingungen als Tonhöhen, wobei Frequenzen in gleichen Verhältnissen als gleiche Intervalle empfunden werden. Mit einer Grundfrequenz von beispielsweise $\nu_1 = 220$ Hz $= 220$ Zyklen pro Sekunde, sind die Frequenzen $\nu_1, \ldots, \nu_5$ die Frequenzen der Noten nebenan. Welche Note entspricht der Frequenz ν_6?



Bemerkung. Die Lösung mit Fourier-Reihen, die wir hier vorgestellt haben, ist für die physikalische Interpretation der Lösung als Superposition von Eigenschwingungen nützlich. Interessiert man sich nur für eine Lösung des Anfangswertproblems, so kann man es auch, und expliziter, mit Hilfe der d'Alembert Lösung lösen, was der Leserin, dem Leser überlassen wird.

3.6. **Ein schlecht gestelltes Problem.** Wir kommen auf das Beispiel 2.A der Wärmeleitung in einem Stab der Länge ℓ zurück. Die Lösung lautet

$$u(x,t) = \sum b_n e^{-\frac{\alpha\pi^2 n^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

wobei die Koeffizienten b_n aus der Anfangstemperatur $f(x)$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) = f(x)$ zu bestimmen sind. Nach (10), mit $L = 2\ell$ erhalten wir

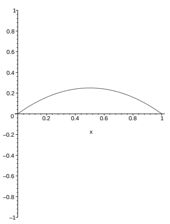
$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \, dx, \qquad n \geq 1.$$

In dieser Herleitung haben wir nirgends von der physikalisch gegebenen Tatsache Gebrauch gemacht, dass $\alpha > 0$ ist. Trotzdem hängen die Eigenschaften des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \alpha u_{xx}$ wesentlich vom Vorzeichen von α ab.

Ist $\alpha > 0$, so nehmen die Fourierkoeffizienten $b_n(t) = b_n e^{-cn^2 t}$ ($c = \alpha\pi^2/\ell^2 > 0$) mit $n > 0$ exponentiell schnell ab, und je grösser n desto schneller streben sie gegen 0. Wir haben also ein wohl gestelltes Problem: Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung, und eine kleine Änderung der Anfangsbedingung hat eine kleine Änderung der Lösung zur Folge. Auch numerisch ist das Anfangswertproblem sehr gut: Ersetzt man die Anfangsfunktion f durch die ersten paar Summanden in ihrer Fourier-Reihe, so erhält man eine sehr gute Approximation der Lösung ausser für sehr kleine Zeiten.

Ist $\alpha < 0$, so wachsen die Fourierkoeffizienten $b_n(t)$ von $u(x,t)$ exponentiell mit der Zeit und mit einer Rate, die mit n wächst. Dies hat zur Folge, dass das Anfangswertproblem *schlecht gestellt* ist. Erstens existiert eine Lösung nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen: Die Fourierkoeffizienten der Anfangsfunktion f müssen derart schnell mit n gegen 0 streben, dass die Reihe für $u(x,t)$ für positive t immer noch konvergiert. Selbst dann ist das Problem instabil: Ändert man die Anfangsbedingung wenig, so dass sich die Fourierkoeffizienten wenig ändern, hat das für die Lösung für $t >> 0$ grosse Konsequenzen: Die Änderung der Fourierkoeffizienten wird mit der Zeit exponentiell gross.

Instruktiv ist der Vergleich der grafischen Darstellungen der (durch eine Partialsumme der Fourier-Reihe approximierten) Lösungen des Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ mit Anfangsbedingung $u(x,0) = x(1-x)$ und $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -0.001$ (Klicken Sie nebenan).



>Visualisierung $\alpha > 0$
>Visualisierung $\alpha < 0$

4. Fouriertransformationen

Wir haben gesehen, dass jede L-periodische Funktion $f(x)$ durch eine Fourierreihe $\sum c_n e^{2\pi inx/L}$ gegeben ist. Also kann jede solche Funktion als Superposition (unendliche Linearkombination) von Funktionen der Form e^{ikx} dargestellt werden, wobei k über die Menge $\{\cdots - \frac{2\pi}{L}, 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \cdots\}$ läuft. Der Abstand Δk zwischen zwei benachbarten Werten von k ist $2\pi/L$. Mit Hilfe der Fourierreihen kann man partielle Differenzialgleichungen auf endlichen Intervallen wie die Wellengleichung für die schwingende Saite untersuchen. Für lineare PDG in unendlichen Bereichen spielen *Fouriertransformationen* dieselbe Rolle.

Die (heuristische) Idee besteht darin, Funktionen auf der reellen Achse als L-periodische Funktionen mit unendlich grossem L zu betrachten. Im Grenzwert $L \to \infty$ strebt der Abstand $\Delta k = 2\pi/L$ gegen 0, und die Summe der Fourierreihe wird zu einem Integral. Um diese Idee in Formeln umzusetzen, ist es nützlich, die Fourierreihe einer L-periodischen Funktion f umzuschreiben, in dem man für $k = 2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$, die Notation

$$\hat{f}_L(k) = Lc_n = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-ikx} dx, \qquad n = \frac{Lk}{2\pi},$$

einführt. Dann gilt

$$f(x) = \sum_k \frac{1}{L}\hat{f}_L(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_k \hat{f}_L(k)\, e^{ikx}\Delta k, \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{L}.$$

Hier läuft die Summe über $k = 2\pi n/L$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Summe auf der rechten Seite ist eine Riemannsche Summe. Nimmt man also formal den Grenzwert $L \to \infty$, so gilt für die *Fouriertransformierte* einer auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx,$$

der Satz von Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}dk.$$

Dieser Satz gilt tatsächlich, aber unter geeigneten Annahmen über f, die die Konvergenz der uneigentlichen Integrale garantieren. Eine mögliche Formulierung (von L. Schwartz), die wir gleich in n Dimensionen angeben, ist die folgende: Wir sagen, dass eine Funktion f auf

$\mathbb{R}^n$ *schnell abfällt* wenn für jedes $N > 0$ ein R_N existiert, so dass $|\mathbf{x}| > R_N \implies |f(\mathbf{x})| \le 1/|\mathbf{x}|^N$.

Satz 4.1. *Sei f eine komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so dass f und alle ihre partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung schnell abfallen. Dann hat die* Fouriertransformierte *von f*

$$(16)\qquad \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 \cdots dx_n, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n,$$

dieselbe Eigenschaft und es gilt

$$(17)\qquad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 \cdots dk_n.$$

Hier ist $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Umgekehrt, unter denselben Annahmen für eine Funktion $\hat{f}$, definiert (17) ihre inverse Fouriertransformierte *(oder Fourierrücktransformierte) f und es gilt (16).*

Beispiel 4.A. Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ (für $n = 1$):

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ik/(2a))^2 - k^2/(4a)} dx \\ &= e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Die Variablensubstitution $y = x + ik/(2a)$ mit einer Verschiebung um eine *komplexe* Zahl kann im Rahmen der komplexen Analysis gerechtfertigt werden. Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx} dk &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{4\pi a}\, e^{-ax^2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

4.1. **Fouriertransformierte reeller Funktionen.** Ist f eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so erfüllt die Fouriertransformierte die Relation

$$\overline{\hat{f}(\mathbf{k})} = \hat{f}(-\mathbf{k}),$$

wie man aus der Definition unmittelbar sieht. Umgekehrt erfüllt die Fouriertransformierte einer Funktion f diese Relation, so gilt

$$\begin{aligned}
\overline{f(\mathbf{x})} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dk_1\cdots dk_n \\
&= f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Also nimmt $f(\mathbf{x})$ nur reelle Werte. Es folgt

Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ nimmt genau dann ihre Werte in $\mathbb{R}$ an, wenn ihre Fouriertransformierte die Relation

$$\overline{\hat{f}(\mathbf{k})} = \hat{f}(-\mathbf{k})$$

erfüllt.

Man bemerke, dass die Fouriertransformierte einer reellwertigen Funktion im allgemeinen nicht reellwertig ist.

Beispiel 4.B. (Übung) Die Fouriertransformierte von

$$f(x) = e^{-a(x-b)^2}, \qquad a>0, b\in\mathbb{R},$$

ist

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-k^2/(4a)-ikb}.$$

5. Wärmeleitungsgleichung

Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ lautet

$$(18)\qquad \begin{aligned} &u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t), \qquad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Die anfängliche Temperaturverteilung $f(x)$ ist eine gegebene Funktion, und die Konstante $\alpha > 0$ ist ein fester Parameter. In Analogie zum Fall eines Ringes schreiben wir die Gleichung als eine Differenzialgleichung für die Fouriertransformierte von u bezüglich x. Es gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)\, e^{ikx} dk, \qquad \hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ikx} dx.$$

Differenziert man unter dem Integral, so erhält man

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_t(k,t)\, e^{ikx} dk, \\ u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,t)(ik)^2\, e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$0 = u_t(x,t) - \alpha u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{u}_t(k,t) + \alpha k^2 \widehat{u}(k,t)\right] e^{ikx}\, dk$$

Es folgt, dass $\hat{u}(k,t)$ das folgende Anfangswertproblem erfüllt:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(k,t) = -\alpha k^2 \hat{u}(k,t), \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ &\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also erfüllt $\hat{u}(k,t)$ für jedes feste k eine *gewöhnliche* Differenzialgleichung, mit Anfangsbedingung $\hat{f}(k)$. Die Lösung ist

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\, e^{-\alpha k^2 t}.$$

Daraus erhält man die Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems, ausgedrückt durch die Fouriertransformierte der Anfangstemperaturverteilung $f(x)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{-\alpha k^2 t + ikx} dk, \\ \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Setzt man die zweite Formel in die erste ein, so erhält man

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$ *ist*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-x')f(x')dx'$$

mit Wärmeleitungskern

$$K_t(x-x') = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-\alpha k^2 t+ikx}\,dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky}\,dy\right)e^{-\alpha k^2 t+ikx}\,dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 t+ik(x-y)}\,dk\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\sqrt{\alpha t}k-i\frac{x-y}{2\sqrt{\alpha t}}\right)^2}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}}\,dk\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,dk\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}}\,dy \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}}\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}}\,dy
\end{aligned}$$

wobei wir von der dritten zur vierten Zeile quadratisch ergänzt haben, von der vierten zur fünften Zeile die Substitution $s = \sqrt{\alpha t}k$ verwendeten und schlussendlich die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

benutzten.

Obwohl diese Formel mit Hilfe von Fouriertransformationen hergeleitet worden ist, also unter der Voraussetzung, dass u schnell abfällt, gilt diese Formel unter schwächeren Annahmen. Zum Beispiel gilt die Wärmeleitungsgleichung für u für alle $t > 0$ falls f stückweise stetig und beschränkt ist, und es gilt in diesem Fall $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = f(x)$. Ein Teil des Beweises ist die (als Übung für den Leser und die Leserin empfohlene) Tatsache, dass $K_t(x-x')$, bei festem x', die Wärmeleitungsgleichung selber erfüllt.

Bemerkung. Der Wärmeleitungskern erfüllt

1) $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-x')dx = 1$.
2) $K_t(x-x') > 0$.

Daraus folgen einfache aber physikalisch wichtige Eigenschaften. Aus 1) folgt: Wenn die Temperatur anfänglich konstant ist, dann bleibt sie immer gleich. Aus 2) folgt: Ist die Anfangstemperatur positiv, so bleibt sie für alle Zeiten positiv.

Dieselbe Rechnung mit geringem Unterschied gilt in n Dimensionen. In 3 Dimensionen hat man zum Beispiel

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} u_t(\mathbf{x},t) &= \alpha \triangle u(\mathbf{x},t), \quad && \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, t\geq 0,\\ u(\mathbf{x},0) &= f(\mathbf{x}), && \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

ist

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} K_t(\mathbf{x}-\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')dx_1'dx_2'dx_3'$$

mit Wärmeleitungskern

$$K_t(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{3/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4\alpha t}}.$$

In n Dimensionen ist der Exponent im Nenner $n/2$.

Beispiel 5.A. Wir suchen die Temperaturverteilung für $t > 0$ in der Nähe des Punktes, wo zwei identische homogene Stäben zur Zeit $t = 0$ zusammengefügt werden, die anfänglich unterschiedliche, konstante Temperaturen T_1, T_2 haben.

Wir wählen den Ursprung $x = 0$ im Punkt wo sich die beiden Stäbe berühren. Also haben wir das Anfangswertproblem (18) mit

$$f(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0,\\ T_2, & x < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $T_1 = -T_2 \equiv T$. Diese Annahme wird die Rechnung vereinfachen; den allgemeinen Fall werden wir durch Verschiebung des Nullpunktes erhalten. Die Lösung ist

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} K_t(x-x')(-T)\,dx' + \int_0^{\infty} K_t(x-x')\,T\,dx'$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\left(-\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx' + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx'\right)\\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{x/\sqrt{2\alpha t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy + \int_{-x/\sqrt{2\alpha t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy\right)\\
&= \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x/\sqrt{2\alpha t}}^{x/\sqrt{2\alpha t}} e^{-y^2/2}dy,
\end{aligned}
$$

(Variablensubstitution $y=(x-x')/\sqrt{2\alpha t}$ bzw. $y=(x'-x)/\sqrt{2\alpha t}$). Diese Lösung können wir durch die in der Statistik wichtige (und in Rechnern vorhandenen) *Fehlerfunktion* (error function)

$$
\mathrm{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{-y^2/2}dy,
$$

ausdrücken:

$$
u(x,t) = T\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right).
$$

Den Fall, wo T_1, T_2 beliebig sind, führen wir auf diesen zurück: u genügt der Wärmeleitungsgleichung genau dann, wenn $u-C$ sie erfüllt. Sei u die Lösung des Anfangswertproblems mit beliebigen T_1, T_2. Wir wählen C gleich dem Mittelwert $(T_1+T_2)/2$. Dann erfüllt $u-C$ die Anfangsbedingung mit Anfangswerten $T, -T$, wobei $T=(T_1-T_2)/2$.

Die gesuchte Lösung ist also

$$
u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right).
$$

Die erf Funktion erfüllt $\mathrm{erf}(z)\to\pm 1$ wenn $z\to\pm\infty$ also gilt für alle $t>0$, wie erwartet,

$$
\lim_{x\to\infty} u(x,t) = T_1, \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = T_2.
$$

6. Die Wellengleichung

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in n Dimensionen ist

$$\begin{aligned}
&c^{-2}u_{tt}(\mathbf{x},t) - \triangle u(\mathbf{x},t) = 0, && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, && t \geq 0,\\
&u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\\
&u_t(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

$c > 0$ ist eine feste Konstante und f, g sind vorgegebene Funktionen.

Das eindimensionale Problem haben wir im Abschnitt 1.3 gelöst. Die Lösung ist eindeutig und lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

Wir wenden uns dem dreidimensionalen Fall zu, den wir mit Hilfe der Fouriertransformationen lösen.

6.1. Lösung der 3-dimensionalen Wellengleichung durch Fouriertransformation. Wir gehen vor wie bei der Wärmeleitungsgleichung und drücken die gesuchte Funktion u durch ihre Fourier-transformierte aus:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\mathbf{k},t)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1 dk_2 dk_3.$$

Wir setzen diese Formel in die Wellengleichung $c^{-2}u_{tt} - \triangle u = 0$ ein und differenzieren unter dem Integral:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \left[c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - u(\mathbf{k},t)\triangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right] dk_1 dk_2 dk_3\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \left[c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - u(\mathbf{k},t)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right] dk_1 dk_2 dk_3\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \left[c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - u(\mathbf{k},t)\sum_{j=1}^{3}(ik_j)^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right] dk_1 dk_2 dk_3\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} [c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t) + |\mathbf{k}|^2 u(\mathbf{k},t)]e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1 dk_2 dk_3,
\end{aligned}$$

wobei $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ die Euklidische Länge des Vektors $\mathbf{k}$ bezeichnet. Der Ausdruck in eckigen Klammern ist also die Fouriertransformation der Funktion 0, muss also verschwinden. Das Anfangswertproblem für die Transformation $\hat{u}$ ist dann

$$\begin{aligned}
&c^{-2}\hat{u}_{tt}(\mathbf{k},t) + |\mathbf{k}|^2\hat{u}(\mathbf{k},t) = 0, \quad && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \qquad t \geq 0,\\
&\hat{u}(\mathbf{k},0) = \hat{f}(\mathbf{k}), && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3,\\
&\hat{u}_t(\mathbf{k},0) = \hat{g}(\mathbf{k}), && \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Für jedes feste $\mathbf{k}$ haben wir das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

$$\hat{u}(\mathbf{k},t) = A(\mathbf{k})\cos(|\mathbf{k}|ct) + B(\mathbf{k})\sin(|\mathbf{k}|ct).$$

Die Integrationskonstanten A, B werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\hat{u}(\mathbf{k},0) = A(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \hat{u}(\mathbf{k},t) = |\mathbf{k}|cB(\mathbf{k}) = \hat{g}(\mathbf{k}).$$

Also ist die *Lösung* des Anfangswertproblems:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\hat{f}(\mathbf{k})\,\cos(|\mathbf{k}|ct) + \hat{g}(\mathbf{k})\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,dk_1dk_2dk_3.$$

Dabei sind die Fouriertransformierten von f, g durch die übliche Formel gegeben:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dx_1dx_2dx_3, \qquad \hat{g}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}dx_1dx_2dx_3.$$

6.2. **Die Kirchhoff-Lösung.** Die obige Lösungsmethode kann in n Dimension angewendet werden und die Lösung ist durch dieselbe Formel (mit 3 durch n ersetzt) gegeben. In drei Dimensionen können wir sie aber so umformen, dass physikalisch wichtige Eigenschaften der Wellenfortpflanzung ersichtlich sind. Wir betrachten zuerst den Fall wo $f(\mathbf{x}) \equiv 0$. Also ist

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\mathbf{k})\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,dk_1dk_2dk_3.$$

Wir verwenden folgende nützliche Identität:

Lemma 6.1. *Sei $S_R = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\mathbf{y}| = R\}$ die Oberfläche der Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\mathbf{0}$, $d\omega(\mathbf{y})$ ihr Oberflächenelement. Dann gilt:*

$$\frac{\sin(|\mathbf{k}|R)}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d\omega(\mathbf{y})$$

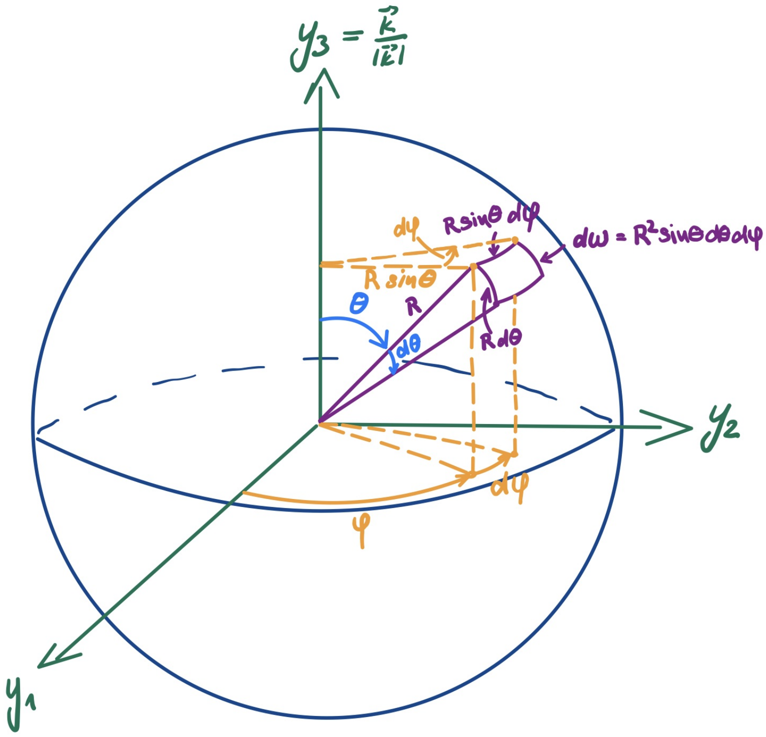


Abbildung 4. Kugelkoordinaten und infinitesimales Oberflächenelement der Sphäre

Beweis: Wir werten das Integral auf der rechten Seite in Kugelkoordinaten (θ, φ) aus, wobei die y_3-Achse parallel zu $\mathbf{k}$ gewählt wird, θ der Winkel zwischen $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ und $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ist und φ bezeichnet den Azimutwinkel. Also ist die Parametrisierung eines Punktes $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1 &= R \sin\theta \cos\varphi, \\ y_2 &= R \sin\theta \sin\varphi, \\ y_3 &= R \cos\theta, \end{aligned}$$

wobei $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ (siehe Abbildung 4) und damit gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{k}| R \cos\theta$. Aus der Skizze sehen wir, dass das infinitesimale Oberflächenelement gegeben ist durch $d\omega(\mathbf{y}) = R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$, weil seine vertikale Seite $Rd\theta$ ist und die horizontale Seite $R \sin\theta d\varphi$.

Also, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi R}\int_{S_R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\omega(\mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi R}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{iR|\mathbf{k}|\cos\theta} R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta \\
&= \frac{2\pi R^2}{4\pi R}\int_0^\pi e^{iR|\mathbf{k}|\cos\theta}\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R}{2}\int_{-1}^1 e^{iR|\mathbf{k}|z} dz \\
&= \frac{R}{2}\frac{1}{iR|\mathbf{k}|}\left(e^{iR|\mathbf{k}|} - e^{-iR|\mathbf{k}|}\right) \\
&= \frac{\sin(|\mathbf{k}|R)}{|\mathbf{k}|},
\end{aligned}
$$

wobei wir von der zweiten zur dritten Zeile die Substitution $z = \cos\theta$, $dz = -\sin\theta\, d\theta$ verwendet haben. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir setzen diese Formel mit $R = ct$ in die Lösung ein:

$$
u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\mathbf{k})\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})}\, d\omega(\mathbf{y})\, dk_1 dk_2 dk_3.
$$

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})}\, dk_1 dk_2 dk_3\right] d\omega(\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) d\omega(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Also ist $u(\mathbf{x}, t)$ gleich t mal *dem Mittelwert von g auf einer Kugeloberfläche mit Radius ct und Mittelpunkt* $\mathbf{x}$. Das ist die Lösung wenn $f = 0$. Der Term mit f kann auf derselben Weise behandelt werden, wenn wir bemerken, dass der Koeffizient von $\hat{f}(\mathbf{k})$ auch durch den Ausdruck des Lemmas geschrieben werden kann:

$$
\cos(|\mathbf{k}|ct) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}.
$$

Mit dieser Relation, Lemma 6.1 und dem Satz von Fubini können wir den ersten Term von $u(\mathbf{x}, t)$ wie folgt umschreiben:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\mathbf{k})\cos(|\mathbf{k}|ct)\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1 dk_2 dk_3 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1 dk_2 dk_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat f(\mathbf{k})\frac{\sin(|\mathbf{k}|ct)}{|\mathbf{k}|c}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1dk_2dk_3\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat f(\mathbf{k})\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}d\omega(\mathbf{y})\right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, dk_1dk_2dk_3\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})}dk_1dk_2dk_3\right] d\omega(\mathbf{y})\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\, d\omega(\mathbf{y})\right).
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Formel von Kirchhoff:

Die Lösung des Anfangswertproblems in drei Dimensionen ist

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} f(\mathbf{x}+\mathbf{y})d\,\omega(\mathbf{y})\right)\\
&\quad + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}} g(\mathbf{x}+\mathbf{y})d\,\omega(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

6.3. **Das Huygens-Prinzip.** Aus der Kirchhoff-Form der Lösung erkennt man eine wichtige Eigenschaft der Wellengleichung in drei Dimensionen: Nehmen wir an, dass die Anfangsfunktionen überall verschwinden ausser in einer kleinen Umgebung eines Punktes $\mathbf{x}_0$.

Im Falle der Schallwellen, wo $u(\mathbf{x},t)$ die Druckverteilung der Luft darstellt, können wir uns vorstellen, dass überall Stille herrscht, ausser in der Unmgebung von $\mathbf{x}_0$, wo jemand zur Zeit $t = 0$ ein Wort ausgesprochen und dadurch eine Abweichung im Luftdruck verursacht hat.

Wie ist dann die Druckverteilung zu einer Zeit $t > 0$? Wir sehen, dass wir f und g über eine Kugeloberfläche vom Radius ct mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ integrieren müssen, um $u(x,t)$ auszurechnen. Damit diese Integrale nicht verschwinden, muss die Kugeloberfläche durch die Umgebung von $\mathbf{x}_0$ gehen, den einzigen Ort, wo $f, g \neq 0$. Dies bedeutet dass, zu gegebener Zeit t, $u(\mathbf{x},t)$ verschwindet ausser wenn $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| \simeq ct$. Also gilt das *Huygens-Prinzip* für die Wellengleichung in 3 Dimensionen:

Verschwinden die Anfangsdaten f, g ausser in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{x}_0$, so verschwindet die Lösung zur Zeit $t > 0$ ausser in einer kleinen Umgebung einer Kugeloberfläche mit Radius ct und Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$.

In anderen Worten: Das zur Zeit 0 in $\mathbf{x}_0$ ausgesprochene Wort wird zur Zeit $t > 0$ von allen gehört, die sich im Abstand ct von $\mathbf{x}_0$ befinden.

7. Laplacetransformationen

7.1. Definitionen, elementare Beispiele.

Definition. Die *Laplacetransformierte* $F(s)$ einer für $t \geq 0$ definierten Funktion $f(t)$ ist

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

Die Laplacetransformierte F von f wird auch mit $\mathcal{L}[f]$ bezeichnet. Wir betrachten also $\mathcal{L}$, die *Laplacetransformation*, als eine lineare Abbildung, die einer Funktion f die Funktion $F = \mathcal{L}[f]$ zuordnet. Die Laplacetransformierte $F(s)$ ist für diejenigen s definiert, für die das Integral existiert.

Rapporté par Victor Hugo:
M. Arago avait une anecdote favorite. Quand Laplace eut publié sa Mécanique céleste, disait-il, l'empereur le fit venir. L'empereur était furieux. Comment, s'écria-t-il en apercevant Laplace, vous faite tout le système du monde, vous donnez les lois de toute la création et dans tout votre livre vous ne parlez pas une seule fois de l'existence de Dieu! Sire, répondit Laplace, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.

Beispiel 7.A. Wir berechnen die Laplacetransformierte von $f(t) = t^n$, für $n = 0, 1, \cdots$. Sie ist für $s > 0$ definiert. Für $n = 0$ ist $f(t) = 1$, also $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = 1/s$. Für $n > 0$ haben wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^n e^{-st} dt &= t^n \frac{1}{-s} e^{-st}\Big|_0^\infty - \int n t^{n-1} \frac{1}{-s} e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Durch Iteration dieser Identität erhalten wir

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdots \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Der letzte Faktor $1/s$ ist das Integral für $n = 0$. Die Laplacetransformierte von $f(t) = t^n$ ist also $F(s) = n!/s^{n+1}$.

Beispiel 7.B. Sei $f(t) = e^{at}$. Dann ist die Laplacetransformierte definiert für $s > a$ und es gilt $F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = 1/(s-a)$.

Allgemeiner gilt: ist $f(t)$ eine stetige, auf $[0, \infty)$ definierte Funktion mit $|f(t)| \leq Ce^{at}$, so ist die Laplacetransformierte von f für alle $s > a$. Der Integrand ist nämlich dann kleiner als $Ce^{(a-s)t}$, das exponentiell gegen 0 für $t \to \infty$ strebt, und das Integral existiert.

Beispiel 7.C. *Die Heaviside Funktion.* Die Heaviside Funktion ist die Funktion:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Also gilt

$$H(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a, \\ 0, & t < a. \end{cases}$$

In der Praxis kommt diese Funktion vor, wenn man einen Einschaltprozess zur Zeit a beschreiben will. Für $a \geq 0$ ist die Laplacetransformierte von $H(t-a)$

$$\int_a^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{-s}e^{-st}|_a^\infty = \frac{1}{s}e^{-as}.$$

Sie ist für $s > 0$ definiert.

7.2. **Inverse Laplacetransformation.** Eine Funktion $f(t)$ heisst *inverse Laplacetransformierte* (oder Laplace-Rücktransformierte) einer Funktion $F(s)$ falls $F(s)$ die Laplacetransformierte von $f(t)$ ist. Wir schreiben dann $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$.

Nicht alle Funktionen haben eine inverse Laplacetransformierte. Man kann aber zeigen, dass die inverse Laplacetransformierte, falls sie als stetige Funktion auf $[0,\infty)$ existiert, eindeutig durch F bestimmt ist. Insbesondere ist $\mathcal{L}^{-1}$ linear. Eine Formel für $\mathcal{L}^{-1}[F]$ unter gewissen Annahmen über F kann mit Hilfe der komplexen Analysis gegeben werden. In den Fällen, wo die Laplacetransformation nützlich ist, findet man aber die inverse Laplacetransformierte einer Funktion durch Zurückführen auf Funktionen, von denen wir die Laplacetransformierte kennen. Zum Beispiel wissen wir aus obigem Beispiel, dass die inverse Laplacetransformierte von $1/s^2$ ist t.

7.3. **Eigenschaften.**

(1) *Linearität.* Die Laplacetransformation ist linear:

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g],$$

für f, g Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Beweis: Mit der Linearität des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\lambda f + \mu g](s) &= \int_0^\infty (\lambda f(t) + \mu g(t))e^{-st}dt \\ &= \lambda \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \mu \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= \lambda \mathcal{L}[f](s) + \mu \mathcal{L}[g](s)\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. $\square$

(2) *Verschiebungssatz.* Ist $f(t) = e^{-at}g(t)$, so ist $F(s) = G(s+a)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty g(t)e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty g(t)e^{-(s+a)t}dt = G(s+a) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. $\square$

(3) Ableitungsregel. Ist $F = \mathcal{L}[f]$, so gilt

a) $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$,

b) $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$,

c) $\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j}\frac{d^jf(0)}{dt^j}$.

Wie wir sehen werden, ist diese Eigenschaft der Hauptgrund wieso Laplacetransformationen bei Differenzialgleichungen nützlich sind.

Beweis:

a) Mit $\frac{d}{dt}e^{-st} = -se^{-st}$ und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) &= \int_0^\infty \frac{df}{dt}(t)e^{-st}dt \\ &= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

b) Durch wiederholtes Anwenden von Resultat (a), erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right](s) &= s\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](s) - \frac{df}{dt}(0) \\ &= s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

c) Wir nehmen an, dass das Resultat für $n \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen, dass es dann auch für $n+1$ gilt. Zusammen mit (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^{n+1}f}{dt^{n+1}}\right](s) &= s\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right](s) - \frac{d^n f}{dt^n}(0) \\ &= s\left(s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j}\frac{d^j f(0)}{dt^j}\right) - \frac{d^n f}{dt^n}(0) \\ &= s^{n+1}F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j}\frac{d^j f(0)}{dt^j} - \frac{d^n f}{dt^n}(0) \\ &= s^{n+1}F(s) - \sum_{j=0}^{n} s^{n-j}\frac{d^j f(0)}{dt^j}\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist die Aussage auch für $n+1$ richtig. Andererseits wissen wir aus (a) und (b), dass das Resultat für $n = 1$ und 2 korrekt ist und damit impliziert das Gezeigte, dass das Resultat auch für $n = 3$ richtig ist. Iterativ folgt, dass das Resultat für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

□

(4) Faltungssatz. Die Faltung zweier Funktionen $f, g \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')\,dt'.$$

Der Faltungssatz besagt, dass

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s),$$

für alle $f, g \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gilt, wobei $F = \mathcal{L}[f]$ und $G = \mathcal{L}[g]$. Diese Eigenschaft ist vor allem nützlich, um die inverse Laplacetransformierte eines Produktes auszurechnen, wenn die inversen Laplacetransformierten der Faktoren bekannt sind.

Beweis: Mit dem Satz von Fubini und der Substitution $u = t - t'$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-t')g(t')dt'\right) e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(t')f(t-t')g(t')dt'\right) e^{-st}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty H(t-t')f(t-t')e^{-st}dt \right) g(t')dt' \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{t'}^\infty f(t-t')e^{-st}dt \right) g(t')dt' \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)e^{-s(u+t')}du \right) g(t')dt' \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)e^{-su}du \right) g(t')e^{-st'}dt' \\
&= F(s) \int_0^\infty g(t')e^{-st'}dt' = F(s)G(s)
\end{aligned}
$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, wobei wir die Relation

$$
\mathbf{1}_{[0,t]}(t') = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \le t' \le t \\ 0, & \text{wenn } t' > t \end{cases} = H(t-t')
$$

benutzt haben und H die Heaviside-Funktion aus Beispiel 7.C bezeichnet. □

(5) Zweite Ableitungsregel.

$$
f(t) = t^k g(t) \implies F(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} G(s).
$$

Beweis: Mit $\frac{d^k}{ds^k} e^{-st} = (-t)^k e^{-st}$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} G(s) &= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\
&= (-1)^k \int_0^\infty g(t) \frac{d^k}{ds^k} e^{-st}dt \\
&= (-1)^k (-1)^k \int_0^\infty t^k g(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)
\end{aligned}
$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. □

(6) Zweiter Verschiebungssatz. Sei $a > 0$.

$$
\mathcal{L}^{-1}[e^{-sa}F(s)] = H(t-a)f(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & t \ge a, \\ 0, & t < a \end{cases}
$$

Beweis: Mit der Substitution $u = t - a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[H(t-a)f(t-a)\right](s) &= \int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-sa}F(s)\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ und damit folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 7.D. In diesem Beispiel zeigen wir, dass die Laplacetransformierten von $f(t) = \sin(at), g(t) = \cos(at)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[g](s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Die Laplacetransformierte von e^{iat} ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{iat}](s) &= \int_0^\infty e^{iat}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(ia-s)t}dt \\ &= \frac{1}{ia-s}e^{(ia-s)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-ia} \\ &= \frac{(s+ia)}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s}{a^2+s^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

für alle $s \geq 0$. Andererseits ist die linke Seite aufgrund der Linearität der Laplacetransformation und $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mathcal{L}[e^{iat}](s) = \mathcal{L}[\cos(at)](s) + i\mathcal{L}[\sin(at)](s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(at)](s) &= \mathrm{Re}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s)\right) = \frac{s}{a^2+s^2}, \\ \mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s)\right) = \frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, wobei $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

$f(t)$	$F(s)$
$t^n \qquad (n=0,1,\dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a} \qquad (s>a)$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$H(t-a) \qquad (a>0)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a) \qquad (a>0)$	e^{-as}

Tabelle 1. Tabelle der Laplacetransformationen

7.4. **Anwendung auf gewöhnliche Differenzialgleichungen.** Bevor wir Laplacetransformationen auf partiellen Differenzialgleichungen studieren, betrachten wir den einfacheren Fall der gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Mit dieser Methode lassen sich viele einfache lineare Differenzialgleichungen lösen, die in den Anwendungen vorkommen. Diese Differenzialgleichungen kann man auch mit anderen bekannten Methoden lösen (Exponentialansatz, Variation der Konstanten). Die Lösung durch Laplacetransformation hat den Vorteil einer gewissen Automatisierung des Lösungsprozesses. Bei Anfangswertproblemen erlaubt ausserdem die erste Ableitungsregel das Einsetzen der Anfangsbedingungen schon bei der Lösung der Gleichung.

Diese Aspekte wollen wir jetzt an einigen Beispielen illustrieren. Das allgemeine Rezept ist: “1. Schreibe das Problem als ein Problem für die Laplacetransformierte, 2. Löse das Problem für die Laplacetransformierte, 3. Finde die inverse Laplacetransformierte der Lösung”

Beispiel 7.E. Betrachte das Anfangswertproblem mit Parameter a:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = t, \\ &x(0) = a \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Laplacetransformierte der Funktion $x(t)$ mit $X(s)$. Nach der Ableitungsregel ist $\mathcal{L}[dx/dt] = sX(s) - x(0) = sX(s) - a$. Die Laplacetransformierte von t ist $1/s^2$. Also erhält man mit der Linearität von $\mathcal{L}$ die Gleichung für X:

$$sX(s) - a + 2X(s) = \frac{1}{s^2},$$

mit Lösung

$$X(s) = \frac{1}{s+2}\left(a + \frac{1}{s^2}\right).$$

Nach Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$X(s) = \left(a + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2}.$$

Genauer: Da $(s+2)s^2$ nur die Nullstellen -2 und 0 (zweifach) hat, machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{(s+2)s^2} = \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s} + \frac{d}{s^2}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $(s+2)s^2$, so erhalten wir

$$1 = bs^2 + cs(s+2) + d(s+2) = (b+c)s^2 + (d+2c)s + 2d$$

und damit folgt $d = 1/2, c = -1/4, b = 1/4$. Also ist $X(s)$ gegeben durch

$$X(s) = \frac{a}{s+2} + \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} = \left(a + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2}.$$

Wir finden die inverse Laplacetransformierte $x(t)$ indem wir die Linearität von $\mathcal{L}^{-1}$ und die Tabelle verwenden:

$$x(t) = \left(a + \frac{1}{4}\right)e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}.$$

Beispiel 7.F. Wir lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) - x(t) = e^t, \\ &x(0) = \dot{x}(0) = 1 \end{aligned}$$

(Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach t). Es bezeichne wieder $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$. Nach der Ableitungsregel hat man (mit den gegebenen Anfangsbedingungen) $\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2X(s) - s - 1$. Das Anfangswertproblem für $x(t)$ wird zur Gleichung

$$s^2X(s) - s - 1 - X(s) = \frac{1}{s-1}$$

für $X(s)$. Also haben wir (Partialbruchzerlegung)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2-1}\left(\frac{1}{s-1}+s+1\right) \\ &= \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}+\frac{1}{s-1} \\ &= \frac{1}{2(s-1)^2}+\frac{3}{4(s-1)}+\frac{1}{4(s+1)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatz und der Tabelle können wir daraus die Rücktransformierte $x(t)$ bestimmen:

$$x(t) = \frac{t}{2}e^t + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

Das ist die Lösung des Anfangswertproblems.

7.5. **Der schwach gedämpfte harmonische Oszillator.** Wir untersuchen hier ein Beispiel, wo der Faltungssatz das physikalische Prinzip der Kausalität ausdrückt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Systems mit einem Freiheitsgrad, das sich in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtpunkts und unter dem Einfluss einer äusseren Kraft bewegt, ist

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - 2k\dot{x}(t) + g(t), \qquad \omega, k > 0.$$

Dabei ist $x(t)$ die Abweichung von der Gleichgewichtslage. Man kann sich darunter ein an eine Feder gebundenes Teilchen vorstellen, das sich in der Nähe der Gleichgewichtslage bewegt. Die linke Seite ist die Beschleunigung, die rechte die Kraft dividiert durch die Masse: der erste Term ist proportional zum Abstand von der Gleichgewichtslage und kommt von der Federkraft; der zweite Term ist ein Reibungsterm, der proportional zur Geschwindigkeit ist. Die äussere, zeitabhängige, Kraft ist Masse$\times g(t)$.

Wir betrachten den Fall der *schwachen Dämpfung*, wo die *Dämpfungskonstante* k die Ungleichung

$$k < \omega$$

erfüllt. Die Fälle der starken ($k > \omega$) und kritischen ($k = \omega$) Dämpfung können mit derselben Methode studiert werden, und sind als Übung überlassen.

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das System sich anfänglich in Ruhe in der Gleichgewichtslage befindet. Also haben wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)+2k\dot{x}(t)=g(t), \qquad \omega,k>0.\\ &x(0)=\dot{x}(0)=0\end{aligned}$$

Hier ist $g(t)$ eine gegebene Funktion. Im Studium der Resonanzen ist zum Beispiel $g(t)=\epsilon\sin(\omega_0 t)$ eine kleine periodische Störung des Systems mit Kreisfrequenz ω_0. Wir wollen aber hier den Fall einer allgemeinen gegebenen Funktion $g(t)$ betrachten.

Sei wieder $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$ und es bezeichne $G(s)$ die Laplacetransformierte von $g(t)$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[\ddot{x}+\omega^2x+2k\dot{x}](s)=\mathcal{L}[g](s).$$

D.h. $X(s)$ erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned}&s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+\omega^2X(s)+2k(sX(s)-x(0))\\ &=(s^2+\omega^2+2ks)X(s)=G(s).\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{1}{s^2+2ks+\omega^2}G(s)\\ &=\frac{1}{(s+k)^2+\omega^2-k^2}G(s)\end{aligned}$$

Da $k<\omega$ ist $\omega^2-k^2>0$. Wir setzen

$$\bar{\omega}=\sqrt{\omega^2-k^2}$$

und damit erhalten wir

$$X(s)=\frac{1}{(s+k)^2+\bar{\omega}^2}G(s).$$

Die inverse Laplacetransformierte des ersten Faktors in $X(s)$ ist

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+k)^2+\bar{\omega}^2}\right]=e^{-kt}\frac{\sin(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}},$$

(Verschiebungssatz, Tabelle). Also erhalten wir die Lösung durch den Faltungssatz:

$$x(t)=\int_0^t h(t-t')g(t')dt', \qquad h(t)=e^{-kt}\frac{\sin(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}}, \qquad \bar{\omega}=\sqrt{\omega^2-k^2}.$$

Die Funktion $h(t)$ heisst *Einflussfunktion* oder *Greensche Funktion*: $h(t-t')$ gibt den Einfluss der äusseren Störung $g(t')$ zur Zeit t' auf die Lösung zur Zeit t. Da die Integration auf dem Intervall $0\le t'\le t$

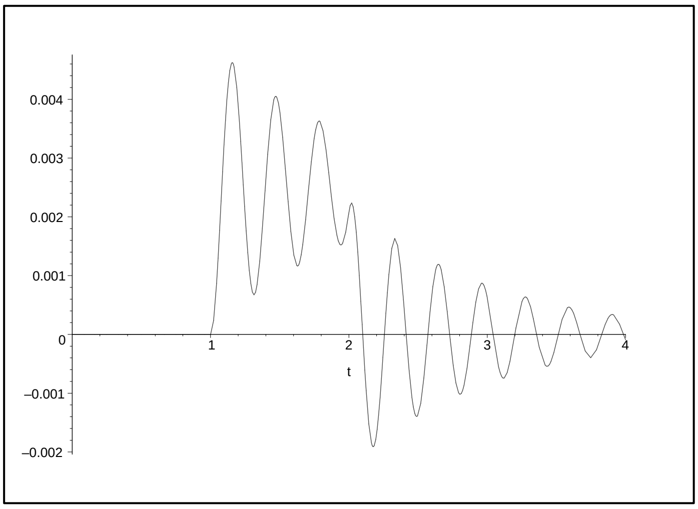


Abbildung 5. Der gestossene Oszillator

ist, beinflusst die Störung zur Zeit t' nur $x(t)$ zu *späteren* Zeiten t, ein Ausdruck des Kausalitätsprinzips.

Zum Beispiel sei

$$g(t) = \begin{cases} a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $0 < t_0 < t_1$. Mit anderen Worten, wir legen einem anfänglich ruhenden Oszillator zur Zeit t_0 eine Kraft Masse$\times a$ an, die zur Zeit t_1 wieder ausgeschaltet wird. Um die Formel zu vereinfachen, schreiben wir $x(t) = \int_0^t h(t-t')g(t')dt'$ mit Hilfe der Heaviside Funktion als $\int_0^\infty H(t-t')h(t-t')g(t')dt'$. Mit unserer Wahl von g erhalten wir dann

$$\begin{aligned} x(t) &= a\int_{t_0}^{t_1} H(t-t')h(t-t')dt' \\ &= a\int_{t_0}^{t_1} H(t-t')e^{-k(t-t')}\frac{\sin(\bar\omega(t-t'))}{\bar\omega}dt'. \end{aligned}$$

Dieses Integral kann explizit ausgewertet werden, am Besten auf einem Computer, wo gleich die einleuchtende grafische Darstellung der Lösung erzeugt werden kann. Auf Abb. 5 ist die Lösung für $\bar\omega = 20, k = 1, a = 1$ dargestellt, wobei die Kraft zwischen $t_0 = 1$ und $t_1 = 2$ angelegt wird.

7.6. **Greensche Funktion und Dirac-Deltafunktion.** Wir haben im vorigen Abschnitt den Fall einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differenzialgleichung mit Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ betrachtet. Der inhomogene Term $g(t)$ ist eine Funktion der Zeit, die (bis auf Proportionalität) die Interpretation einer äusseren, zeitabhängigen Kraft hat. Die Lösung hat die Form $x(t) = \int_0^t h(t-t')g(t')dt'$, mit Greenscher Funktion $h(t-t')$. Die Bedeutung der Greenschen Funktion wird klar, wenn wir den Grenzfall eines infinitesimal kurzen Stosses betrachten. Um dies zu beschreiben, legen wir zur Zeit $t_0 > 0$ eine Kraft für eine sehr kurze Zeitdauer ϵ an, dafür mit einer grossen Intensität $1/\epsilon$:

$$g(t) = g_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & t_0 < t < t_0 + \epsilon. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Lösung ist dann $x(t) = 0$ für $t < t_0$, und für $t > t_0 + \epsilon$,

$$x(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} h(t-t')dt' \to h(t-t_0), \qquad \epsilon \to 0.$$

Wir wollen hier kurz überprüfen, dass $x(t)$ in der Tat gegen $h(t-t_0)$ konvergiert. Sei $\rho > 0$. Da $s \mapsto h(t-t_0-s)$ eine stetige Funktion ist, können wir ein $\delta > 0$ wählen sodass $|h(t-t_0-s) - h(t-t_0)| < \rho$ für alle s mit $|s| < \delta$ gilt. Wählen wir $\epsilon < \delta$, dann folgt

$$\begin{aligned} |x(t) - h(t-t_0)| &= \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} h(t-t')\,dt' - h(t-t_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} (h(t-t') - h(t-t_0))dt' \right| \\ &\le \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} |h(t-t') - h(t-t_0)|dt' \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |h(t-t_0-s) - h(t-t_0)|ds \\ &< \frac{\rho}{\epsilon}\epsilon = \rho, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $t' = t_0 + s$ verwendeten. Da $\rho > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir die gewünschte Aussage. Also ist $h(t-t_0)$ die Lösung für $t > t_0$, wenn g eine während einer infinitesimal kleinen Zeit unendlich grosse angelegte Kraft ist:

$$g(t) = \delta(t-t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(t).$$

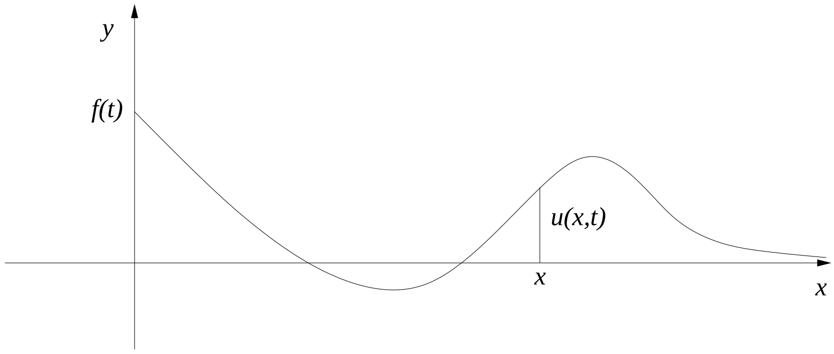


Abbildung 6. Wellengleichung auf einer Halbachse

Dieser Limes existiert strikt gesprochen nicht. Er hat aber als verallgemeinerte Funktion einen Sinn, wie wir sehen werden. Die Haupteigenschaft der *Dirac-Deltafunktion* δ ist

$$\int_a^b \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0),$$

wenn t_0 im Intervall (a,b) liegt. Insbesondere ist die Laplacetransformierte von $\delta(t-t_0)$ $(t_0>0)$:

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}dt = e^{-st_0}.$$

7.7. **Eine Anwendung auf partielle Differenzialgleichungen.** Wir betrachten ein langes Seil, das an einem Ende befestigt ist und am anderen Ende bewegt werden kann. Das Seil sei anfänglich längs der positiven x-Achse gespannt und in Ruhe; die Position des beweglichen Endes sei bei $x=0$. Die y-Koordinaten des Seils bei $x=0$ sei durch eine vorgegebene Funktion $f(t)$ der Zeit mit $f(0)=0$ beschrieben. Bei kleinen Bewegungen kann man annehmen, dass das Seil zur Zeit t am Ort x durch die Funktion $y=u(x,t)$ gegeben ist, wobei u die Wellengleichung erfüllt. Wir interessieren uns für die Bewegung des Seils in der Umgebung des beweglichen Punktes, also können wir das Seil als unendlich lang idealisieren (Abb. 6).

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

In Formeln haben wir ein Anfangs- und Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$: Die PDG ist die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad c > 0.$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,$$

(die Höhe über die x-Achse und die Geschwindigkeit verschwinden zur Zeit $t = 0$). Die Randbedingungen sind

$$u(0,t) = f(t), \qquad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Die letzte Bedingung besagt, dass das andere Ende befestigt ist. Wir führen eine Laplacetransformation bezüglich der Zeit t durch, setzen also

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt.$$

Nach der Ableitungsregel ist $\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$. Die beiden letzten Terme verschwinden wegen der Anfangsbedingungen. Die Wellengleichung wird also zu

>Visualisierung

$$\frac{s^2}{c^2} U(x,s) - U_{xx}(x,s) = 0.$$

Das ist für jedes feste s eine gewöhnliche Differenzialgleichung für U. Die allgemeine Lösung lautet:

$$U(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}.$$

Da $u(x,t) \to 0$ für $x \to \infty$, gilt auch $U(x,s) \to 0$ für $x \to \infty$ und $s > 0$. Also muss $A(s) = 0$ sein für alle $s > 0$ gelten. Die andere Randbedingung ist

$$U(0,s) = F(s) = \mathcal{L}[f].$$

Also ist $B(s) = F(s)$. Es gilt also

$$U(x,s) = F(s)e^{-sx/c}.$$

Die inverse Laplacetransformation erhalten wir mit dem zweiten Verschiebungssatz:

$$u(x,t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right) f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{c}\right), & x < ct, \\ 0, & x > ct. \end{cases}$$

Bemerkung. Diese Lösung kann man auch aus der allgemeinen d'Alembert Lösung der Wellengleichung bestimmen, was als Übung empfohlen wird.

8. Die Laplace-Gleichung

Wir haben bis jetzt vor allem zeitabhängige Phänomene studiert. Sie werden typischerweise durch Anfangswertprobleme gegeben. Wir wenden uns jetzt zeitunabhängigen Phänomenen zu, in denen andere Klassen von PDG und andere Typen von Problemen, typischerweise Randwertprobleme vorkommen. Typische Beispiele von zeitunabhängigen Problemen werden unter anderem von der Elektrostatik und der Magnetostatik geliefert. Die Grundgleichungen der Elektrostatik besagen, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$ den Gleichungen[4]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{20}$$

genügt, wobei $\rho(\mathbf{x})$ die Ladungsdichte bezeichnet und beschreibt wie viel Ladung pro Volumen um den Punkt $\mathbf{x}$ enthalten ist. Damit ist die Ladung in einem Bereich D gegeben durch

$$Q = \int_D \rho(\mathbf{x})\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Wir erinnern, dass die Rotation und die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert sind durch

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Also handelt es sich bei Gleichung (20) um zwei PDG 1. Ordnung für das elektrische Feld $\mathbf{E}$. Die Funktion deren Gradient das elektrische Feld beschreibt, nennen wir das elektrostatische Potenzial u,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}). \tag{21}$$

Mit dieser Definition ist die erste Gleichung in (20) automatisch erfüllt, denn es gilt

$$\operatorname{rot}(\nabla v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{pmatrix} = 0$$

[4] Der Faktor vor ρ hängt von der Wahl der Einheiten ab: In Gauss-Einheiten (cgs-System) ist er 4π und in SI-Einheit $1/\epsilon_0$, wobei ϵ_0 die sogenannte "Permeabilität des Vakuums" ist.

für jedes Skalarfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Aus der zweiten Gleichung in (20), Gleichung (21) und

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\nabla u)_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \triangle u$$

folgt, dass das elektrostatische Potenzial die Poisson-Gleichung

$$\triangle u = -4\pi\rho$$

löst. In der Tat haben wir

$$4\pi\rho = \operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \nabla u = -\triangle u.$$

Insbesondere erfüllt das Potenzial u in einem Bereich, wo es keine Ladungen gibt, die *Laplace-Gleichung*

$$\triangle u = 0.$$

Das *Dirichlet-Problem* für die Poisson-Gleichung ist ein Randwertproblem auf einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) mit (glattem) Rand ∂D

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned} \tag{22}$$

Die vorgegebene Funktion g entspricht in der Elektrostatik dem elektrostatischen Potenzial (Spannung) auf dem Rand, f entspricht bis auf einen Skalierungsfaktor der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ und die Lösung u beschreibt, wie sich das Potenzial im Inneren verhält. Aus dieser physikalischen Interpretation, erwartet man, dass das Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung besitzt, was man auch beweisen kann.

Beweis der Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass u_1, u_2 zwei verschiedene Lösung von (22) sind und definieren die Funktion $u = u_1 - u_2$. Dann gilt $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \partial D$ und

$$\triangle u(\mathbf{x}) = \triangle u_1(\mathbf{x}) - \triangle u_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0$$

für alle $\mathbf{x} \in D$. Also ist u eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D. \end{aligned}$$

Mit der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\nabla u) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n u\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = |\nabla u|^2 + u\triangle u\end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}0 &= \int_D u(\mathbf{x})\triangle u(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n\\ &= \int_D \operatorname{div}(u(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}))\,dx_1\cdots dx_n - \int_D |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,dx_1\cdots dx_n.\end{aligned}$$

Mit dem Divergenzsatz von Gauss und $u(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \partial D$ erhalten wir

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial D} u(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})\,dA(\mathbf{y}) - \int_D |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,dx_1\cdots dx_n\\ &= -\int_D |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,dx_1\cdots dx_n,\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{n}$ das Einheitsnormalenfeld und dA das infinitesimale Flächenelement der Oberfläche ∂D bezeichnen. Also gilt $\int_D |\nabla u|^2 dx_1\cdots dx_n = 0$, woraus $\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ folgt. Da D zusammenhängend ist, folgt $u = \text{const}$. In der Tat finden wir da D zusammenhängend ist für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ eine Kurve $\gamma\colon [0,1] \to D$ mit $\gamma(0) = \mathbf{x}, \gamma(1) = \mathbf{y}$. Damit folgt aus dem Fundamentalsatz der Analysis und der Kettenregel

$$\begin{aligned}u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}u(\gamma(t))\,dt\\ &= \int_0^1 \nabla u(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Andererseits verschwindet u auf dem Rand ∂D, und damit folgt $u \equiv 0$. □

Wir behandeln zuerst einen Spezialfall, den wir schon mit der Methode der Separation der Variablen lösen konnten.

8.1. **Die Poisson-Formel.** Wir betrachten das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe mit Radius a in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned}&u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, && x^2+y^2 \le a^2,\\ &u(x,y) = g(x,y), && x^2+y^2 = a^2,\end{aligned}$$

wobei g eine auf dem Kreis $x^2+y^2=a^2$ gegebene Funktion ist. Wir führen nun Polarkoordinaten ein, d.h. $(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $0\le r\le a, \varphi\in[0,2\pi]$. Wir setzen

$$\begin{cases} u(x,y)=v(r,\varphi) & \text{für} \quad x^2+y^2\le a^2 \\ g(x,y)=h(\varphi) & \text{für} \quad x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

für Funktionen $h\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ und $v\colon [0,a]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\varphi)=\cos\varphi, & \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\cos\varphi = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi)=\sin\varphi, & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\cos\varphi)=-r\sin\varphi, & \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} &= -r\frac{\partial}{\partial \varphi}\sin\varphi = -r\cos\varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\sin\varphi)=r\cos\varphi, & \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} &= r\frac{\partial}{\partial \varphi}\cos\varphi = -r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Mit $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{x}{r}, && \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}=0, && \frac{\partial y}{\partial r}=\frac{y}{r}, && \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=0, \\ &\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-y, && \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}=-x, && \frac{\partial y}{\partial \varphi}=x, && \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}=-y. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) =& \frac{\partial}{\partial r}u(x,y) = u_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}+u_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial r} \\ =& u_x(x,y)\frac{x}{r}+u_y(x,y)\frac{y}{r} = \frac{1}{r}\left(u_x(x,y)x+u_y(x,y)y\right), \\ v_{rr}(r,\varphi) =& \frac{\partial^2}{\partial r^2}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}+u_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\ =& u_{xx}(x,y)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + u_{xy}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} + u_x(x,y)\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \\ &+ u_{yy}(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + u_{yx}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + u_y(x,y)\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \\ =& u_{xx}(x,y)\frac{x^2}{r^2}+2u_{xy}(x,y)\frac{xy}{r^2}+u_{yy}(x,y)\frac{y^2}{r^2} \\ =& \frac{1}{r^2}\left(u_{xx}(x,y)x^2+2u_{xy}(x,y)xy+u_{yy}(x,y)y^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) =& \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(u_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial\varphi} + u_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) \\
=& u_{xx}(x,y)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + u_{xy}(x,y)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + u_x(x,y)\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} \\
&+ u_{yx}(x,y)\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + u_{yy}(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + u_y(x,y)\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} \\
=& u_{xx}(x,y)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + 2u_{xy}(x,y)\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + u_x(x,y)\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} \\
&+ u_{yy}(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + u_y(x,y)\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} \\
=& u_{xx}(x,y)y^2 - 2u_{xy}(x,y)xy - u_x(x,y)x \\
&+ u_{yy}(x,y)x^2 - u_y(x,y)y
\end{aligned}$$

Mit $u_{xx} + u_{yy} = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} =& (u_{xx}x^2 + 2u_{xy}xy + u_{yy}y^2) + (u_x x + u_y y) \\
&+ (u_{xx}y^2 - 2u_{xy}xy - u_x x + u_{yy}x^2 - u_y y) \\
=& u_{xx}x^2 + u_{yy}y^2 + u_{xx}y^2 + u_{yy}x^2 \\
=& (x^2+y^2)(u_{xx}+u_{yy}) = 0.
\end{aligned}$$

Das Dirichlet-Problem für das Potenzial $v(r,\varphi)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
& r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = 0. \quad 0 \le r \le a, \\
& v(a,\varphi) = h(\varphi).
\end{aligned}$$

Die Separation der Variablen $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ führt auf

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0.$$

Teilen wir die erhaltene Gleichung durch $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, dann folgt

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const.}$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für Φ

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

Linear unabhängige Lösungen für $\lambda > 0$ sind $\Phi = e^{i\sqrt{\lambda}\varphi}$, $e^{-i\sqrt{\lambda}\varphi}$. Wir stellen jetzt die Forderung, dass $v(r,\varphi+2\pi) = v(r,\varphi)$, da beide

Seiten das Potenzial am gleichen Punkt darstellen. Diese Periodizität ist nur erfüllt, wenn $\sqrt{\lambda}$ eine ganze Zahl ist. Also muss gelten

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}.$$

$n = 0$ ist nicht erlaubt, weil wir $\lambda > 0$ annahmen. Für $\lambda = 0$ erhält man $\Phi'' = 0$ und damit folgt $\Phi(\varphi) = a\varphi + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Diese Funktion kann aber nur dann die Periodizitätsbedingung erfüllen, wenn $a = 0$ und damit gilt $\Phi(\varphi) = b$. Wenn $\lambda < 0$, erhält man als Fundamentallösungen $\Phi = e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}, e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$, jedoch sind diese Funktionen nicht $2\pi-$periodisch und damit ist $\lambda < 0$ nicht möglich. Wir erhalten

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}, & \text{wenn } n \neq 0, \\ A_0', & \text{wenn } n = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung für R lautet dann

$$r^2 R'' + rR' = n^2 R.$$

Im Fall $n = 0$ löst R die Gleichung

$$0 = rR'' + R' = \frac{d}{dr}(rR')$$

und deswegen

$$rR'(r) = C_0',$$

woraus folgt dass

$$R'(r) = \frac{C_0'}{r}.$$

Wir erhalten

$$R_0(r) = C_0' \ln(r) + B_0'.$$

Mit der Bedingung $R_0(0) \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$R_0(r) = B_0'.$$

Andererseits erhalten wir für $n \neq 0$ mit dem Potenzansatz $R = r^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) die Gleichung

$$\begin{aligned} n^2 r^\alpha &= r^2 \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} \\ &= \alpha(\alpha - 1) r^\alpha + \alpha r^\alpha = \alpha((\alpha - 1) + 1) r^\alpha = \alpha^2 r^\alpha \end{aligned}$$

und damit gilt $\alpha = \pm n$. Zu jedem $n \neq 0$ gibt es also zwei Lösungen und zwar

$$R_n(r) = r^n, \, r^{-n}.$$

Aus der Bedingung $R(0) < \infty$ folgt

$$R_n(r) = \begin{cases} r^n, & \text{wenn } n > 0 \\ r^{-n}, & \text{wenn } n < 0. \end{cases}$$

Damit ist die allgemeine Lösung für $n \neq 0$ gegeben durch

$$R_n(r) = r^{|n|}.$$

Wir haben somit gezeigt, dass die Funktionen

$$v_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) r^{|n|}, & \text{wenn } n \neq 0, \\ A_0, & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

die Laplace-Gleichung lösen. Hier haben wir $A_0 = A_0' B_0'$ gesetzt.

Aufgrund der Linearität des Laplace-Operators gilt das Superpositions-Prinzip und die allgemeine Lösung ist damit von der Form

$$\begin{aligned} v(r,\varphi) &= A_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}} (A_n e^{in\varphi} + B_n e^{-in\varphi}) r^{|n|} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} r^{|n|}, \end{aligned}$$

wobei wir $C_n = A_n + B_{-n}$ für $n \neq 0$ und $C_0 = A_0$ gesetzt haben. Die Randbedingung ist dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n a^{|n|} e^{in\varphi} = h(\varphi).$$

Also sind die Koeffizienten C_n dadurch bestimmt, dass $C_n a^{|n|}$ *die Fourier-Koeffizienten c_n von h* sind. Wir können die Lösung schreiben als:

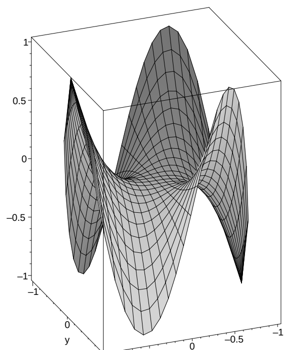
$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^{|n|} e^{in\varphi}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\, e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall, wo h von der Form $h(\varphi) = \cos(3\varphi)$ ist und $a = 1$ gilt. Es gilt

$$h(\varphi) = \frac{1}{2} e^{i3\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i3\varphi}.$$

Also ist $c_3 = c_{-3} = 1/2$ und sonst $c_n = 0$. Wir erhalten

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{2} r^3 e^{i3\varphi} + \frac{1}{2} r^3 e^{-i3\varphi} = r^3 \frac{e^{i3\varphi} + e^{-i3\varphi}}{2} = r^3 \cos(3\varphi).$$



Eine Integraldarstellung, die die Lösung durch die Randbedingung ausdrückt, erhält man nach Einsetzen der Formel für c_n in die Formel für v. Nach Vertauschung von Summe und Integral, bekommt man

$$v(r,\varphi)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\varphi'}e^{in\varphi}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}\right]h(\varphi')d\varphi'.$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern heisst Poisson-Kern $K(r,\varphi,\varphi')$. Wir können ihn ausrechnen, in dem wir die (komplexe) geometrische Reihe summieren. Wir erhalten

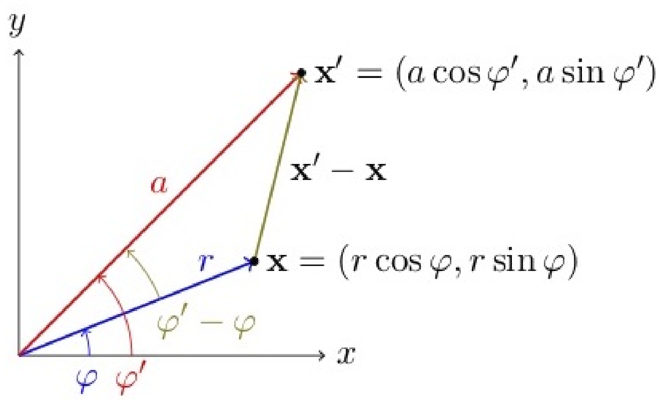
$$\begin{aligned}
K(r,\varphi,\varphi') &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\varphi'}e^{in\varphi}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(\varphi-\varphi')}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}+\sum_{n=0}^{\infty}e^{-in(\varphi-\varphi')}\left(\frac{r}{a}\right)^{|n|}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}\right)^{n}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-e^{i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}}+\frac{1}{1-e^{-i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}+1-e^{i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}}{(1-e^{i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a})(1-e^{-i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a})}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2-\frac{r}{a}(e^{i(\varphi-\varphi')}+e^{-i(\varphi-\varphi')})}{1-e^{i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}-e^{-i(\varphi-\varphi')}\frac{r}{a}+\left(\frac{r}{a}\right)^2}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')}{1-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{a}\right)^2}-1\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')-1+2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{a}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1-2\frac{r}{a}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{a}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ra\cos(\varphi-\varphi')+r^2}.
\end{aligned}$$

Das Resultat ist

Die Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf der Kreisscheibe mit Radius a ist gegeben durch die Poisson-Formel

$$\begin{aligned} v(r,\varphi) &= \int_0^{2\pi} K(r,\varphi,\varphi')h(\varphi')d\varphi', \\ K(r,\varphi,\varphi') &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ra\cos(\varphi-\varphi')+r^2}. \end{aligned}$$

Wir können diese Formel auch in den ursprünglichen kartesischen Koordinaten ausdrücken:



Aus der Skizze sehen wir, dass der Winkel zwischen $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}$ gerade $\varphi' - \varphi$ ist. Da das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bezeichnet, erhält man

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^2 &= |\mathbf{x}'|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}'|^2 - 2|\mathbf{x}'||\mathbf{x}|\cos(\varphi'-\varphi) + |\mathbf{x}|^2 \\ &= a^2 - 2ar\cos(\varphi-\varphi') + r^2. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\partial D}\frac{a^2-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}g(\mathbf{x}')d\ell(\mathbf{x}').$$

Hier ist $d\ell(\mathbf{x}') = a d\varphi'$ das Längeelement auf dem Kreis.

Die Poisson-Formel kann für beliebige Dimension des Raumes verallgemeinert werden. Wir beschränken uns auf drei Dimensionen und geben die Poisson-Formel ohne Beweis:

Die Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf der dreidimensionalen Kugel $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\mathbf{x}| \leq a\}$ mit Radius a, ist gegeben durch die Poisson-Formel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int_{\partial D} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} g(\mathbf{x}')d\sigma(\mathbf{x}'),$$

wobei $d\sigma(\mathbf{x}')$ das Oberflächenelement auf der Kugeloberfläche ist.

8.2. **Mittelwertprinzip.** Eine einfache Folge aus der Poisson-Formel ist das Mittelwertprinzip. In 2 Dimensionen besagt es: Falls $\triangle u = 0$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ gilt und $K_R(\mathbf{x})$ eine Kreisscheibe von Radius R um $\mathbf{x}$ in D ist, so gilt

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K_R(\mathbf{x})} u(\mathbf{x}')d\ell(\mathbf{x}').$$

Allgemein gilt in n Dimensionen das folgende Resultat:

Mittelwertprinzip *Ist $\triangle u = 0$ auf einer abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$, so ist der Wert von u an der Stelle $\mathbf{x} \in D$ gleich dem Mittelwert von u auf der Oberfläche jeder $n-$dimensionalen Kugel in D mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$.*

8.3. **Maximumprinzip.** Aus dem Mittelwertprinzip leiten wir das Maximumprinzip her. Hierbei handelt es sich um ein sehr allgemeines Prinzip, welches für viele verschiedene Typen von PDG gilt.

Maximumprinzip *Sei $\triangle u = 0$ auf einer beschränkten abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmenge D in $\mathbb{R}^n$. Dann wird das Maximum von u auf dem Rand angenommen:*

$$\max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\} = \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\}.$$

Beweis. Da D abgeschlossen und beschränkt ist, folgt dass u sein Maximum in D annimmt. Wir müssen also nur zeigen, dass das Maximum bereits auf dem Rand angenommen wird. Wir setzen $M = \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\}$. Sei $\mathbf{x}_0 \in D$ sodass $u(\mathbf{x}_0) = M$ gilt. Ist $\mathbf{x}_0 \in \partial D$, dann bleibt nichts mehr zu beweisen. Also können wir annehmen, dass $\mathbf{x}_0$ ein innerer Punkt von D ist, d.h. es gibt ein $r > 0$ sodass $K_r(\mathbf{x}) \subset D$ gilt. Wir können eine Kugel $K_R(\mathbf{x}_0) \subset D$ um $\mathbf{x}_0$ wählen, die den Rand ∂D in mindestens einem Punkt $\mathbf{x}_1$ berührt. Nach dem Mittelwertprinzip ist $M = u(\mathbf{x}_0)$ der Mittelwert von $u(\mathbf{x})$ auf der Kugeloberfläche $\partial K_R(\mathbf{x}_0)$. Aber das ist nur dann möglich ist, wenn $u = M$ auf $\partial K_R(\mathbf{x}_0)$. Also hat man insbesondere $M = u(\mathbf{x}_1)$ und damit wird das Maximum bereits auf dem Rand angenommen. □

Erfüllt u die Gleichung $\triangle u = 0$, so auch $-u$. Aus dem Maximumprinzip für $-u$ folgt also das Minimumprinzip für u, denn es gilt

$$\max\{-u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\} = -\min\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in D\}.$$

Also wird das Minimum von u auf dem Rand angenommen, und wenn $\triangle u = 0$ auf der beschränkten abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmenge D, erhält man

$$\min\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\} \le u(\mathbf{x}) \le \max\{u(\mathbf{x}),\, \mathbf{x} \in \partial D\} \tag{23}$$

für alle $\mathbf{x} \in D$.

8.4. **Stabilität.** Aus dem Maximumprinzip folgt die Stabilität des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung auf einer beschränkten abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$: Die Lösung des Dirichlet-Problems ändert sich wenig, wenn wir die Randdaten g wenig ändern. Seien nämlich u_1, u_2 Lösungen von $\triangle u = f$ mit Randbedingungen $u_1 = g_1$ bzw. $u_2 = g_2$ auf ∂D. Wir nehmen an, dass g_1 und g_2 sich wenig unterscheiden, d.h.

$$|g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})| \le \epsilon, \qquad \mathbf{x} \in \partial D,$$

für eine kleine Zahl $\epsilon > 0$. Dann ist $u = u_1 - u_2$ die Lösung des Dirichlet-Problems $\triangle u = 0$ mit Randdaten $g = g_1 - g_2$. Aus (23) folgt dann $\min g \le u(\mathbf{x}) \le \max g$, also

$$|u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})| \le \epsilon, \qquad \mathbf{x} \in D.$$

Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung ist also wohl gestellt.

8.5. **Poisson-Gleichung, Green-Funktion, Deltafunktion.** Wir betrachten hier die Poisson-Gleichung (inhomogene Laplace-Gleichung)

$$\triangle u = f,$$

wobei f eine gegebene Funktion ist. In der Elektrostatik ist f proportional zur Ladungsdichte. Aus der Linearität des Laplace-Operators folgt das Superpositionsprinzip: Aus $\triangle u_1 = f_1$, $\triangle u_2 = f_2$ folgt $\triangle(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$. Durch wiederholte Anwendung dieses Prinzips erhält man dann: Aus $\triangle u_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $f = \sum_{i=1}^n f_i$ folgt $\triangle \sum_{i=1}^n u_i = f$. Nach dem Superpositionsprinzip genügt es dann, die Poisson-Gleichung für eine Punktladung zu lösen. Eine kontinuierliche Ladungsdichte stellen wir uns als Superposition von unendlich vielen Punktladungen vor. Was ist aber die Ladungsdichte einer Punktladung, und wie löst man die Gleichung für eine Punktladung? Wir betrachten zuerst den einfacheren eindimensionalen Fall.

8.6. **Die Dirac-Deltafunktion.** Zur Beschreibung der Ladungsdichte einer in 0 sitzenden Punktladung der totalen Ladung 1, führte der Physiker P. A. M. Dirac eine Funktion $\delta(x)$ ein, die überall verschwindet ausser in 0 und die Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$ besitzt. Eine nützliche Definition dieser Funktion ist als Grenzwert: $\delta(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_\epsilon(x)$, wobei

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & |x| < \epsilon/2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion δ_ϵ erfüllt $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1$ und verschwindet ausser in einer kleinen Umgebung von 0 (für $\epsilon > 0$ klein). Die Deltafunktion (und dieser Grenzwert) existiert nicht im klassischen Sinne, muss stattdessen mathematisch als *verallgemeinerte Funktion* verstanden werden. Dies bedeutet, dass sie nur "unter dem Integral" Sinn macht. Für jede glatte Funktion ϕ gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0)$$

Dies ist die mathematisch rigorose Definition der Deltafunktion: Sie wird als Zuordnung $\phi \mapsto \phi(0)$ aufgefasst. Allgemeiner sind *verallgemeinerte Funktionen* (auch Distributionen genannt) lineare Abbildungen, die jeder glatten Funktion eine Zahl zuordnen. Eine gewöhnliche Funktion f wird mit der verallgemeinerte Funktion $\phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\, dx$ identifiziert. Der Grenzwert $\delta = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_\epsilon$ ist dann wie folgt zu verstehen:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)\phi(x)\, dx = \phi(0) \tag{24}$$

Allgemeiner können wir die *verschobene Deltafunktion* $\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x - x_0)$ für festes x_0 betrachten. Mit der Substitution $y =$

$x - x_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\phi(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x-x_0)\phi(x)\,dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(y)\phi(y+x_0)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\phi(y+x_0)\,dy\\ &= \phi(x_0),\end{aligned}$$

Wir wenden uns dem dreidimensionalen Fall zu. Die dreidimensionale Deltafunktion $\delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist durch die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,dx_1dx_2dx_3 = \phi(\mathbf{0}) \tag{25}$$

definiert. Fasst man das Integral über $\mathbb{R}^3$ als dreifaches Integral auf, so können wir $\delta(\mathbf{x})$ als Produkt von eindimensionalen Deltafunktionen $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ interpretieren. Die verschobene dreidimensionale Deltafunktion $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ erfüllt

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})\,dx_1dx_2dx_3 =\\ \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3)\phi(\mathbf{x})\,dx_1dx_2dx_3 =\\ \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,dx_1dx_2dx_3 = \phi(\mathbf{y})\end{gathered} \tag{26}$$

und beschreibt eine Punktladung im Punkt $\mathbf{y}$. Ähnlich kann diese Definition in beliebiger Dimension formuliert werden.

8.7. **Das Coulomb-Potenzial.** Wir kommen auf die Poisson-Gleichung $\triangle u = f$ zurück. Wir betrachten zuerst den Fall einer Punktladung im Ursprung $\mathbf{0}$ und setzen also $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$:

$$\triangle u(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \tag{27}$$

Es ist wegen der Rotationssymmetrie des Problems naheliegend, eine Lösung $u(\mathbf{x}) = v(r)$ zu suchen, die nur vom Abstand $r = |\mathbf{x}|$ zum Ursprung abhängt. Da die Deltafunktion ausserhalb des Ursprungs verschwindet, haben wir die Gleichung $\triangle u(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \neq 0$. Es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{3} x_j^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3} x_j^2}} = \frac{x_i}{r}$$

für alle $\mathbf{x} \neq 0$. Mit der Quotientenregel und der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}
\triangle u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v(r) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_r(r)\frac{x_i}{r}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(v_{rr}(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v_r(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}\right) \\
&= v_{rr}(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{r^2} + v_r(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{r - x_i\frac{x_i}{r}}{r^2} \\
&= v_{rr}(r)\frac{|\mathbf{x}|^2}{r^2} + v_r(r)\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= v_{rr}(r) + v_r(r)\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\right) = v_{rr}(r) + \frac{2}{r}v_r(r).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

(28) $$v_{rr}(r) + \frac{2}{r}v_r(r) = 0, \qquad r \neq 0.$$

Wir haben eine gewöhnliche Differenzialgleichung der Ordnung 2 und erwarten deshalb, dass sie zwei linear unabhängige Lösungen hat. Wenn $v_r = 0$, dann $v(r) = const.$, und v löst die Gleichung (28). Wenn $v_r > 0$, dann können wir Gleichung (28) durch v_r dividieren und erhalten

$$0 = \frac{v_{rr}}{v_r} + \frac{2}{r} = \frac{d}{dr}\ln(v_r) + \frac{2}{r}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\ln(v_r(r)) = -2\ln(r) + A$$

für eine Konstante $A \in \mathbb{R}$ und deswegen

$$v_r(r) = \frac{B}{r^2}$$

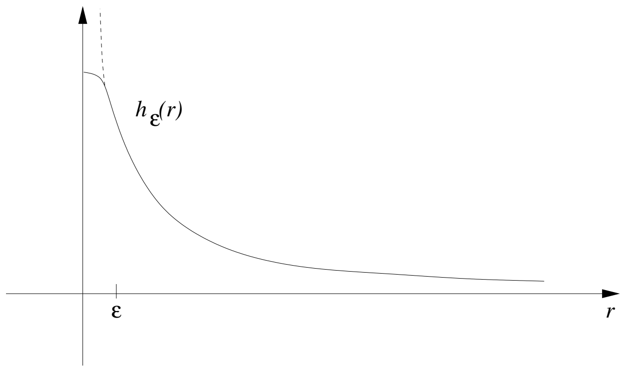


Abbildung 7. Eine Approximation zur Funktion $1/r$

für eine Konstante $B \in \mathbb{R}$. Integrieren wir die erhaltene Gleichung nochmals, folgt

$$v(r) = -\frac{B}{r} + C$$

für Konstanten $B, C \in \mathbb{R}$. Also sind die zwei linear unabhängigen Lösungen $v = 1$ und $v = 1/r$. Transformieren wir die zweite Lösung in $\mathbf{x}-$Koordinaten zurück, dann erhalten wir

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

als Lösung der Laplace-Gleichung für $\mathbf{x} \neq 0$. Um eine Lösung von (27) zu finden müssen wir $\triangle u(\mathbf{x})$ im Ursprung ausrechnen. Bei der ersten Lösung haben wir $\triangle 1 = 0$. Bei der zweiten Lösung ist wegen der Singularität von $1/|\mathbf{x}|$ bei $\mathbf{x} = 0$ die Rechnung delikater und wir müssen diese Lösung im Sinne der verallgemeinerten Funktionen verstehen. Dafür betrachten wir $1/|\mathbf{x}|$ als Grenzwert für $\epsilon \to 0$ von glatten Funktionen $h_\epsilon(|\mathbf{x}|)$, die mit $1/|\mathbf{x}|$ für $|\mathbf{x}| \geq \epsilon$ übereinstimmen, siehe Abb. 7. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \triangle h_\epsilon$ proportional zu δ ist. Also rechnen wir ($\triangle u = \operatorname{div}(\nabla u)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \triangle h_\epsilon(|\mathbf{x}|)\phi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\{|\mathbf{x}|\leq\epsilon\}} \triangle h_\epsilon(|\mathbf{x}|)\phi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\simeq \int_{\{|\mathbf{x}|\leq\epsilon\}} \triangle h_\epsilon(|\mathbf{x}|)\phi(\mathbf{0}) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{\{|\mathbf{x}|=\epsilon\}} \nabla h_\epsilon(|\mathbf{x}|) \cdot \mathbf{n}\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{\{|\mathbf{x}|=\epsilon\}} \nabla h_\epsilon(|\mathbf{x}|) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\, d\omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{\{|\mathbf{x}|=\epsilon\}} \nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{\{|\mathbf{x}|=\epsilon\}} -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\, d\omega \\
&= \phi(\mathbf{0}) \int_{\{|\mathbf{x}|=\epsilon\}} -\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\, d\omega \\
&= -\phi(\mathbf{0}) \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = -4\pi\phi(\mathbf{0}).
\end{aligned}
$$

Erklärung der einzelnen Schritte: Erstens ist $h_\epsilon(|\mathbf{x}|) = 1/|\mathbf{x}|$ für $|\mathbf{x}| > \epsilon$, woraus folgt, dass $\triangle h_\epsilon(|\mathbf{x}|)$ für $|\mathbf{x}| > \epsilon$ verschwindet. Ist ϵ klein, so können wir $\phi(\mathbf{x})$ durch $\phi(\mathbf{0})$ für $|\mathbf{x}| \leq \epsilon$ approximieren . Eine genauere Untersuchung zeigt, dass der Fehler, den wir bei dieser Approximation machen für $\epsilon \to 0$ gegen Null strebt. Dann wenden wir den Gaussschen Divergenzsatz und erhalten ein Integral über die Oberfläche $|\mathbf{x}| = \epsilon$ einer Kugel von Radius ϵ und bezeichnen das infinitesimale Oberflächenelement mit $d\omega$. Im Integrand kommt die Richtungsableitung $\nabla h_\epsilon \cdot \mathbf{n}$ in Richtung des normalen Einheitsvektor $\mathbf{n}$ vor, welcher gegeben ist durch $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. Wir benutzten, dass $h_\epsilon(|\mathbf{x}|) = 1/|\mathbf{x}|$ auf der Oberfläche $\{|\mathbf{x}| = \epsilon\}$ gilt. Anschliessend benutzen wir die Kettenregel um $\nabla\frac{1}{|\mathbf{x}|}$ zu berechnen und erhalten

$$
\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\nabla|\mathbf{x}| = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.
$$

Es folgt $\triangle\frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta(\mathbf{x})$, oder

$$
\triangle\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right) = \delta(\mathbf{x})
$$

Durch Verschiebung des Nullpunktes erhalten wir auch das Potenzial, das von einer Punktladung in einem anderen Punkt erzeugt wird:

$$
\triangle\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').
$$

Die Poisson-Gleichung für allgemeines f lösen wir mit dem Superpositionsprinzip, in dem wir f als "Summe" von Punktladungen auffassen:

$$
f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') f(\mathbf{x}')\, dx_1' dx_2' dx_3'.
$$

Dies ist eine Version von (26). Wir erhalten dann

$$-\triangle \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}')\, dx_1' dx_2' dx_3' = f(\mathbf{x}).$$

Wir fassen das Resultat zusammen, indem wir $f = -4\pi\rho$, wie in der Elektrostatik schreiben.

Eine Lösung der Poisson-Gleichung in drei Dimensionen

$$\triangle u(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}),$$

mit gegebener (glatter, im Unendlichen schnell genug gegen Null strebender) Ladungsdichte ρ ist

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}')\, dx_1' dx_2' dx_3'.$$

Das Coulomb-Potenzial $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ *ist eine Lösung der Poisson-Gleichung mit einer Punktladung in $\mathbf{x}'$:*

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Wir bemerken, dass das Coulomb-Potenzial das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

im Punkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ erzeugt und damit ist die induzierte Kraft einer Punktladung mit Ladung $Q = 1$ am Ort $\mathbf{x}'$ auf eine Ladung q am Ort $\mathbf{x}$ gegeben durch

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}.$$

Also haben wir damit die Coulomb-Kraft erhalten, weshalb man $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ Coulomb-Potenzial nennt. Man bemerke, dass die Lösung der Poisson-Gleichung nicht eindeutig ist: Wir können eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $\triangle u = 0$ hinzufügen. Die angegebene Lösung ist dadurch charakterisiert, dass sie für $|\mathbf{x}| \to \infty$ gegen 0 strebt. Die Leserin oder der Leser soll sich mit Hilfe des Maximumprinzips überzeugen, dass keine andere Lösung diese Eigenschaft besitzt.

9. Methode der Charakteristiken

Bis jetzt haben wir nur *lineare* Differenzialgleichungen betrachtet, meistens mit konstanten Koeffizienten. Mit der Methode der Charakteristiken lernen wir, eine grosse Klasse von linearen und quasilinearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung zu lösen.

Wir betrachten zuerst den Fall von zwei unabhängigen Variablen.

Definition. Eine PDG erster Ordnung für $u = u(x,t)$ heisst *quasilinear* falls sie die Form

$$a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x = c(x,t,u),$$

besitzt mit gegebenen Funktionen a, b, c.

Lineare PDG erster Ordnung sind ein Spezialfall: Für zwei unabhängige Variablen haben sie die Form

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = c_1(x,t) + c_2(x,t)u.$$

Beispiele.

(1) $u_t + u_x = u + 1$ ist linear.
(2) $xu_t + \sin(t)u_x = \cos(x+t)$ ist linear.
(3) $u_t + uu_x = 0$ ist quasilinear.
(4) $2u_t + u^2u_x + \cos(x)\cos(u) = 0$ ist quasilinear.
(5) $u_t + u_x^2 = 0$ ist nicht quasilinear.


Sofia Kovalevskaya
1850–1891

Wir betrachten das Anfangswertproblem für quasilineare PDG. Dazu zitieren wir den grundlegenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz *für kleine Zeiten*, einen Spezialfall des Satzes von Cauchy–Kovalevskaya.

Satz 9.1. *Sei $a(x,t,u) \neq 0$. Das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} a(x,t,u)u_t + b(x,t,u)u_x &= c(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned} \tag{29}$$

hat für jede gegebene (differenzierbare) Funktion f eine eindeutige Lösung $u(x,t)$, die im Bereich $\{(x,t) \,|\, t < T_0(x)\}$ für eine gewisse Funktion $T_0 \colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, definiert ist.

Im Folgenden wollen wir diese Lösung bestimmen. Wir werden sehen, dass sie i. A. tatsächlich nicht für alle t definiert ist.

9.1. **Ein einfaches Beispiel.** Wir betrachten das einfache Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der PDG $u_t + u_x$ kann mit derselben Methode gefunden werden, die wir bei der eindimensionalen Wellengleichung angewendet haben: Wir führen wie in der Herleitung der Formel von D'Alembert die Variablen $\xi = x - t, \quad \eta = x + t$ ein und setzen $u(x,t) = v(\xi,\eta)$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} 0 = u_t(x,t) + u_x(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} v(\xi,\eta) + \frac{\partial}{\partial x} v(\xi,\eta) \\ &= v_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_\xi(\xi,\eta)\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta(\xi,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= -v_\xi(\xi,\eta) + v_\eta(\xi,\eta) + v_\xi(\xi,\eta) + v_\eta(\xi,\eta) \\ &= 2v_\eta(\xi,\eta) \end{aligned}$$

und damit löst v die Gleichung

$$v_\eta(\xi,\eta) = 0.$$

Wir erhalten

$$v(\xi,\eta) = F(\xi)$$

für eine gewisse Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit ist u gegeben durch

$$u(x,t) = v(x-t, x+t) = F(x-t).$$

Aufgrund der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ erhalten wir $F(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsfunktion $f(x)$:

$$u(x,t) = f(x-t).$$

Diese Lösung ist *konstant* entlang jeder der Geraden $x = t + a$, $a \in \mathbb{R}$. Der Wert im Punkt (x,t) ist folglich der Wert der Anfangsfunktion f im Punkt, wo die Gerade durch (x,t) die x-Achse kreuzt (S. Abb. 8).

Die Idee der Methode der Charakteristiken besteht darin, eine Familie von Kurven (Charakteristiken) in der (x,t) Ebene zu finden entlang welcher die Lösung sich einfach verhält. In diesem einfachen Beispiel sind die Charakteristiken die Geraden $x = t + a$. Entlang dieser Charakteristiken ist u konstant; im allgemeinen Fall wird u nicht konstant sein, sondern die Lösung einer *gewöhnlichen* Differenzialgleichung. Die Methode der Charakteristiken reduziert also das Lösen einer PDG auf das Problem, gewöhnliche Differenzialgleichungen zu lösen.

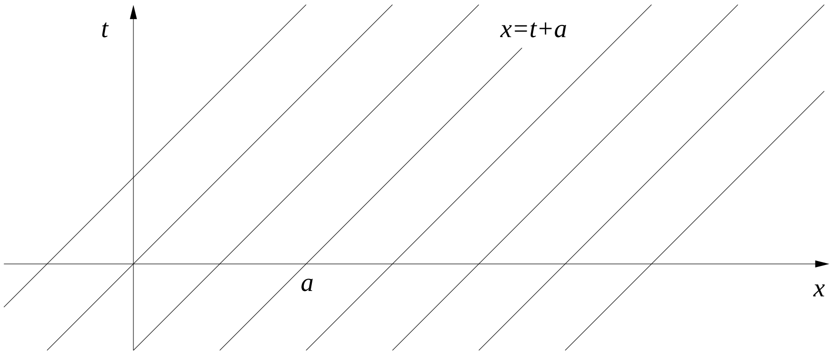


Abbildung 8. Charakteristiken für $u_t + u_x = 0$

9.2. **Die allgemeine quasilineare PDG mit zwei unabhängigen Variablen.** Wir wollen also Kurven $x = x(t)$ in der (x, t)-Ebene finden, entlang welcher die Lösungen der PDG (29) sich einfach verhalten. Zuerst dividieren wir durch a. Wir betrachten also Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} &u_t + d(x,t,u)u_x = e(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Wir parametrisieren die (zu bestimmende) Kurve $x = x(t)$ durch die Zeit t und betrachten den Wert $z(t)$ von u enlang der Kurve:

$$z(t) = u(x(t), t).$$

Die Kurve soll dabei so gewählt werden, dass die PDG für u eine gewöhnliche Differenzialgleichung für z impliziert. Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{dz(t)}{dt} = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t)\frac{dx(t)}{dt}$$

Falls $x(t)$ die Gleichung

$$\frac{dx(t)}{dt} = d(x(t), t, z(t)) \tag{30}$$

erfüllt, dann folgt aus der PDG für u, dass

$$\frac{dz(t)}{dt} = e(x(t), t, z(t)). \tag{31}$$

Der Wert der Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems entlang der Kurven $x = x(t)$ erfüllt mit der Gleichung der Kurve also das System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (30),(31). Findet man eine solche Kurve, die durch jeden Punkt x_0 auf der x-Achse geht, so kennt man die Lösung $u(x,t)$ überall. Also suchen wir für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (30), (31), mit Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \qquad z(0) = z_0 = u(x(0), 0) = f(x_0)$$

Die Lösung $u(x(t), t)$ im Punkt $(x(t), t)$ ist dann $z(t)$. Die so konstruierte Lösung ist in allen Punkten (x, t) definiert, die auf einer eindeutigen Charakteristik liegen.

In unserem einfachen Beispiel ist das System von Gleichungen

$$\dot{x}(t) = d(x(t), t, z(t)) = 1, \qquad \dot{z}(t) = e(x(t), t, z(t)) = 0,$$

mit Lösung $x(t) = t + x_0$, $z(t) = z_0 = f(x_0)$. Die Lösung ist durch die Relation $u(t + x_0, t) = f(x_0)$ bestimmt. Setzt man $x = t + x_0$, so erhält man die bekannte Lösung $u(x,t) = f(x - t)$.

9.3. **Algorithmus.** Die obige Überlegung führt auf ein Rezept, um die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &u_t + d(x,t,u)u_x = e(x,t,u), \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned}$$

zu bestimmen:

(1) Für jedes x_0 löse man das System

$$\dot{x}(t) = d(x(t), t, z(t)), \tag{32}$$

$$\dot{z}(t) = e(x(t), t, z(t)), \tag{33}$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0 = f(x_0)$.

(2) Die Lösung ist implizit durch die Gleichung

$$u(x(t), t) = z(t)$$

gegeben.

(3) Um $u(x,t)$ zu bestimmen, finde man x_0, so dass für die Lösung von (32), (33) mit dieser Anfangsbedingung $x(t) = x$.

Jede durch t parametrisierte Kurve $t \mapsto (t, x(t), z(t))$, die das System (32), (33) erfüllt, heisst *Charakteristik*. Auch ihre Projektion $t \mapsto (t, x(t))$ auf die x-t-Ebene wird manchmal Charakteristik genannt.

Beispiel 9.A.

$$\begin{aligned} &u_t + x u_x = x, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), && t = 0. \end{aligned}$$

Hier ist $d(x,t,z) = x, e(x,t,z) = x$. Also sind die Gleichungen für Charakteristiken sind

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad \dot{z}(t) = x(t),$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = f(x_0)$. Die Lösung der ersten Gleichung ist also $x(t) = x_0 e^t$. Wir setzen sie in die zweite Gleichung ein:

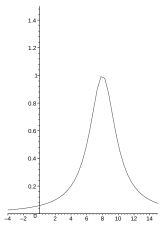
$$\dot{z}(t) = x_0 e^t, \quad \text{also} \quad z(t) = x_0 e^t + C.$$

Die Anfangsbedingung $z(0) = f(x_0)$ ist erfüllt, falls $C = f(x_0) - x_0$. Also sind die Gleichungen für die Charakteristiken gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^t, \\ z(t) &= x_0(e^t - 1) + f(x_0). \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $u(x,t) = x_0(e^t - 1) + f(x_0)$, wobei x_0 durch $x = x(t) = x_0 e^t$ als Funktion von x, t bestimmt wird. Es folgt, dass $x_0 = xe^{-t}$, und die Lösung ist:

$$u(x,t) = x(1 - e^{-t}) + f(xe^{-t}).$$



>Visualisierung

Beispiel 9.B.

$$\begin{aligned} &u_t - uu_x = 0, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $d(x,t,z) = -z$ und $e(x,t,z) = 0$. Die Gleichungen für die Charakteristiken sind:

$$\dot{x}(t) = -z(t), \qquad \dot{z}(t) = 0.$$

Die Lösung mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $z(0) = f(x_0)$ ist

$$x(t) = x_0 - f(x_0)t, \qquad z(t) = f(x_0).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also implizit durch

$$u(x,t) = f(x_0), \qquad x = x_0 - f(x_0)t$$

gegeben. Wenn die Anfangsbedingung z.Bsp durch $f(x) = x$ gegeben ist, dann hat man $x = x_0(1-t)$, und deswegen $x_0 = x/(1-t)$, was

$$u(x,t) = \frac{x}{1-t} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad t \in [0,1)$$

ergibt. Allerdings konnten wir hier eine explizite Lösung nur so leicht finden, weil die gegebene Anfangsbedingung eine sehr einfache Form hat. Ausserdem sieht man, dass die Lösung nur für $t < 1$ existiert. Für eine allgemeine Anfangsbedingung f kann man die Gleichung $x = x_0 - f(x_0)t$ nicht notwendigerweise explizit nach x_0 auflösen. Man kann sie aber dazu verwenden, um den Graph $z = u(x,t)$ der Lösung bei jedem festen t zu zeichnen. Fassen wir nämlich x_0 als Parameter auf, so ist

$$x = x_0 - f(x_0)t, \qquad z = f(x_0)$$

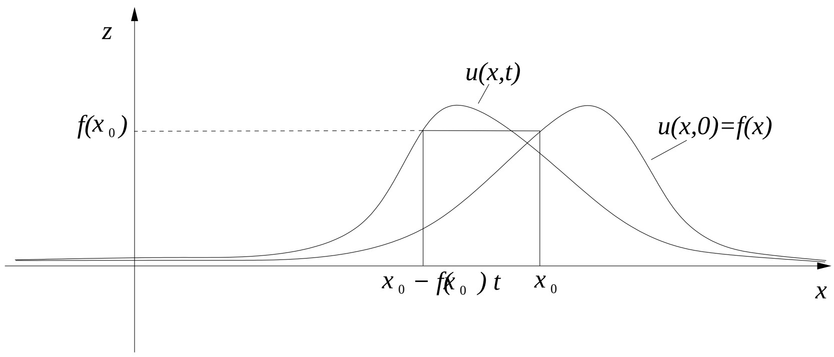


ABBILDUNG 9. Konstruktion des Graphs der Lösung bei gegebenem t (hier $t \simeq 0.75$) im Beispiel 9.B. Der zu einem Parameterwert x_0 gehörende Punkt im Graph hat Koordinaten $(x_0 - f(x_0)t, f(x_0))$

eine parametrische Darstellung des Graphs der Lösung. Es ergibt sich die Konstruktion in Abb. 9.

Wir sehen an diesem Beispiel, dass die parametrische Darstellung nur für kleine t der Graph einer Funktion ist. Wenn t grösser als eine gewisse Zeit t_c wird, erhält man eine Kurve in der (x, z) Ebene, die nicht zu einer Funktion gehört. Dies zeigt wieder, dass die Lösung nur für Zeiten $t < t_c$ existiert.

Beispiel 9.C.

$$\begin{aligned} &u_t + (1 + u)u_x = u^2, \quad t \geq 0, \\ &u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

Man hat

$$d(x, t, z) = 1 + z, \quad e(x, t, z) = z^2.$$

Also sind die Gleichungen für die Charakteristiken

$$\dot{x}(t) = 1 + z(t), \qquad \dot{z}(t) = z^2(t)$$

Wir lösen zuerst die zweite Gleichung mit Anfangsbedingung $z(0) = z_0$ mit der Methode der Separation der Variablen (der Theorie der *gewöhnlichen* Differenzialgleichungen): Wir schreiben $\dot{z}$ als $\frac{dz}{dt}$, dann wird die gewöhnliche Differentialgleichung für $z(t)$ nach Multiplikation mit dt zu

$$dz/z^2 = dt.$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz}{z^2} = \int_0^t ds$$

und damit gilt

$$-\frac{1}{z(t)} = t - \frac{1}{z_0},$$

wobei wir $z(0) = z_0$ verwendet haben. Wir erhalten

$$z(t) = \frac{z_0}{1 - tz_0}.$$

Nach Einsetzen in die erste Gleichung und Integration erhalten wir $x(t) = x_0 + t - \ln(1 - tz_0)$. Also sind die Gleichungen für Charakteristiken

$$x(t) = x_0 + t - \ln(1 - t\,f(x_0)), \qquad z(t) = \frac{f(x_0)}{1 - t\,f(x_0)}.$$

Wir sehen, dass hier die Charakteristiken selbst nicht für alle t sondern nur für kleine t (solange $tf(x_0) < 1$) definiert und differenzierbar sind. Die Lösung des Anfangswertproblem ist also

$$u(x,t) = \frac{f(x_0)}{1 - t\,f(x_0)},$$

wobei x_0 implizit durch die Gleichung

$$x = x_0 + t - \ln(1 - t\,f(x_0)) \tag{34}$$

bestimmt wird.

Beispiel 9.D. Wir betrachten das vorherige Beispiel mit einer spezifischen Anfangsbedingung.

$$\begin{aligned} &u_t + (1+u)u_x = u^2, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = e^{-x}. \end{aligned}$$

In diesem Fall wird (34) zu

$$x = x_0 + t - \ln(1 - te^{-x_0})$$

und damit gilt

$$\ln(1 - te^{-x_0}) = x_0 + t - x.$$

Wendet man die Exponentialfunktion auf diese Gleichung an, so erhält man

$$(1 - te^{-x_0}) = e^{x_0}e^{t-x}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit e^{x_0}, dann folgt

$$e^{x_0} - t = (e^{x_0})^2 e^{t-x}$$

Also löst $y = e^{x_0}$ die Gleichung

$$y^2 e^{t-x} - y + t = 0.$$

Die Nullstellen sind gegeben durch

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4te^{t-x}}}{2e^{t-x}}.$$

Da diese Gleichung insbesondere für $t = 0$ gelten muss, folgt

$$y = e^{x_0} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4te^{t-x}}}{2e^{t-x}},$$

denn mit einem Minus würde der Zähler in $t = 0$ verschwinden. Es folgt

$$x_0 = x - t + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4te^{-x+t}})}{2}\right).$$

Die Lösung ist dann

$$u(x,t) = \frac{f(x_0)}{1 - tf(x_0)} = \frac{e^{-x_0}}{1 - te^{-x_0}} = \frac{1}{e^{x_0} - t} = \frac{1}{\frac{e^{x-t}(1+\sqrt{1-4te^{t-x}})}{2} - t}$$
$$= \frac{2}{e^{x-t}(1 + \sqrt{1 - 4te^{-x+t}}) - 2t}.$$

10. Klassifikation

Wie wir an Beispielen gesehen haben, kommen partielle Differenzialgleichungen in verschiedenen Arten von Problemen vor. Als grobe Unterteilung können wir zunächst PDG, die zu zeitunabhängigen Problemen gehören, von PDG, die zu zeitabhängigen Problemen gehören, unterscheiden. Wie wir hier sehen werden, gehören typischerweise zur ersten Klasse *elliptische* PDG, z. B. die Laplace-Gleichung, und zur zweiten Klasse *hyperbolische* PDG, z. B. die Wellengleichung, oder *parabolische* PDG, z. B. die Wärmeleitungsgleichung. Die verschiedene Typen von PDG haben mathematisch verschiedene Eigenschaften, die auf unterschiedliches Verhalten der Lösungen führen.

10.1. **Klassifikation der linearen PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.** Wir betrachten den Fall einer linearen PDG 2. Ordnung für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen. Eine solche Gleichung hat die allgemeine Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{x,y} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0. \tag{35}$$

Hier sind die Koeffizienten $A = A(x, y), \dots G = G(x, y)$ gegebene Funktionen von zwei Variablen.

Definition. Die PDG (35) heisst

elliptisch, falls $AC - B^2 > 0$.
parabolisch, falls $AC - B^2 = 0$.
hyperbolisch, falls $AC - B^2 < 0$.

Beispiel 10.A. Die Wellengleichung $c^{-2}u_{xx} - u_{yy} = 0$ ($A = c^{-2}$,$C = -1$, $B = 0$), oder in anderen Koordinaten $u_{xy} = 0$ (siehe 1.3), ist hyperbolisch.

Beispiel 10.B. Die Wärmeleitungsgleichung $u_x - u_{yy} = 0$ hat $A = B = 0$, $C = -1$, also sie ist parabolisch.

Beispiel 10.C. Die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ($A = C = 1$, $B = 0$) und die allgemeinere Poisson-Gleichung sind elliptische partielle Differenzialgleichungen.

Bemerkungen

(1) Bei dieser Klassifikation zählt nur das *Hauptsymbol* $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$, das die Terme mit den Ableitungen höchster Ordnung (hier 2) beinhaltet.

(2) Die Grösse $AC - B^2$ ist die Determinante der symmetrische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Sind $m_{11} = A, m_{12} = m_{21} = B, m_{22} = C$ die Matrixelemente dieser Matrix, und setzt man $x_1 = x, x_2 = y$, so ist das Hauptsymbol $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} m_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

(3) Sind die Koeffizienten A, B, C nicht konstant, sondern Funktionen, die von x und y nicht trivial abhängen, so kann es vorkommen, dass die PDG verschiedenen Charakter in verschieden Punkten hat: Zum Beispiel ist die PDG $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ elliptisch für $x > 0$, parabolisch für $x = 0$ und hyperbolisch für $x < 0$.

(4) Die Namensgebung wurde in Anlehnung an die Klassifikation von Kegelschnitten gewählt: Falls A, B, C nicht alle null sind, dann ist eine durch die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gegebene glatte Kurve in der xy-Ebene eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem, ob $AC - B^2$ positiv, null oder negativ ist. In der linearen Algebra betrachtet man die zugehörige quadratische Form

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine solche quadratische Form heisst

-) positiv definit, falls $Q(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$
-) negativ definit, falls $Q(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$
-) positiv semidefinit, falls $Q(x, y) \geq 0$ für alle (x, y)
-) negativ semidefinit, falls $Q(x, y) \leq 0$ für alle (x, y)
-) indefinit, falls $Q(x, y)$ positive und negative Werte annimmt.

Ein wichtiger Satz der linearen Algebra besagt, dass

(i) $AC - B^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q$ ist positiv oder negativ definit
(ii) $AC - B^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q$ ist semidefinit aber nicht definit
(iii) $AC - B^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q$ ist indefinit

Weiter kann man zeigen, dass sich durch eine lineare Koordinatentransformation $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ der Typ (i)–(iii) der quadratischen Form nicht ändert, und jede quadratische Form auf eine Normalform gebracht werden kann:

(i) Für $AC-B^2>0$: $Q(x',y')=(x')^2+(y')^2$ oder $Q(x',y')=-(x')^2-(y')^2$

(ii) Für $AC-B^2=0$: $Q(x',y')=(x')^2$ oder $Q(x',y')=-(x')^2$

(iii) Für $AC-B^2<0$: $Q(x',y')=(x')^2-(y')^2$.

Beispiel

$$\begin{aligned} x^2+4xy+y^2 &= (x+2y)^2-4y^2+y^2 \\ &= (x+2y)^2-3y^2 \\ &= (x')^2-(y')^2 \end{aligned}$$

für $x'=x+2y$ und $y'=\sqrt{3}y$.

Eine wichtige Eigenschaft der obigen Klassifikation ist die *Invarianz unter Koordinatentransformationen*: Eine Transformation der unabhängigen Variablen x,y führt eine PDG in eine neue PDG über, die genau dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist, wenn die ursprüngliche PDG elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist. Wir verifizieren dies für *lineare* Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned} x' &= ax+by, \\ y' &= cx+dy. \end{aligned}$$

Wir setzen $u(x,y)=v(x',y')$, dann folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = a\frac{\partial v}{\partial x'}+c\frac{\partial v}{\partial y'} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = b\frac{\partial v}{\partial x'}+d\frac{\partial v}{\partial y'}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial v}{\partial x'}+c\frac{\partial v}{\partial y'}\right) = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right)+c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right) \\
&= a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)+c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\frac{\partial y'}{\partial x}\right) \\
&= a\left(a\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\right)+c\left(a\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right) \\
&= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}+2ac\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}+c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial v}{\partial x'}+d\frac{\partial v}{\partial y'}\right) = b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right)+d\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\frac{\partial y'}{\partial x}\right) + d\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)\\
&= b\left(a\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\right) + d\left(a\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right)\\
&= ab\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + (ad+bc)\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + cd\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial v}{\partial x'} + d\frac{\partial v}{\partial y'}\right) = b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right) + d\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)\\
&= b\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\frac{\partial y'}{\partial y}\right) + d\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\\
&= b\left(b\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + d\frac{\partial^2 v}{\partial y'\partial x'}\right) + d\left(b\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + d\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right)\\
&= b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + 2bd\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + d^2\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} =& A\left(a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + 2ac\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right)\\
&+ 2B\left(ab\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + (ad+bc)\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + cd\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right)\\
&+ C\left(b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + 2bd\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + d^2\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\right)\\
=& \left(Aa^2 + 2Bab + Cb^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\\
&+ (2Aac + 2B(ad+bc) + 2Cbd)\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}\\
&+ (Ac^2 + 2Bcd + Cd^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\\
=& \left(Aa^2 + 2Bab + Cb^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\\
&+ 2(Aac + B(ad+bc) + Cbd)\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}\\
&+ (Ac^2 + 2Bcd + Cd^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}\\
=& A'\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + 2B'\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'} + C'\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir

$$\begin{aligned} A' &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 \\ B' &= Aac + B(ad+bc) + Cbd \\ C' &= Ac^2 + 2Bcd + Cd^2 \end{aligned}$$

gesetzt haben. Wir zeigen nun, dass die Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann als

$$M' = HMH^t \quad \text{mit} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ H^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} HMH^t &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Aa+Bb & Ac+Bd \\ Ba+Cb & Bc+Cd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Aa^2 + Bab + Bab + Cb^2 & Aac + Bad + Bbc + Cbd \\ Aac + Bbc + Bad + Cbd & Ac^2 + Bcd + Bcd + Cd^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Aa^2 + 2Bab + Cb^2 & Aac + B(ad+bc) + Cbd \\ Aac + B(ad+bc) + Cbd & Ac^2 + 2Bcd + Cd^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist das Hauptsymbol der PDG in den neuen Variablen gegeben durch die Matrix

$$M' = HMH^t, \quad \text{mit} \quad H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, H^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det M' = \det H \det M \det H^t = (\det H)^2 \det M,$$

wobei wir $\det H^t = \det H$ benutzt haben. Also haben $\det M$ und $\det M'$ das gleiche Vorzeichen.

Bei nichtlinearen Koordinatentransformationen zeigt man, dass das Hauptsymbol sich ebenfalls so transformiert, wobei aber H die Jacobische Matrix der Transformation ist.

11. Balkengleichungen

Die Balkentheorie beschreibt, wie sich Balken unter verschiedenen Belastungen verhalten. Wir betrachten einen schmalen Balken der Länge L, dessen Längsachse sich im unbelasteten Zustand horizontal entlang der x-Achse erstreckt, so dass sich das linke Ende im Ursprung befindet und das rechte Ende bei $x = L$.

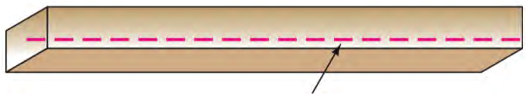


Abbildung 10. Balken ohne Belastung.

Die Verformung des Balkens unter Belastung wird durch die Biegelinie $u(x)$ beschrieben, wobei wir annehmen, dass die positive u-Richtung nach oben zeigt; d.h. wir haben $u(x) > 0$, wenn sich der deformierte Balken an der Stelle x über der x-Achse befindet, und $u(x) < 0$, wenn er an der Stelle x unterhalb der x-Achse liegt.

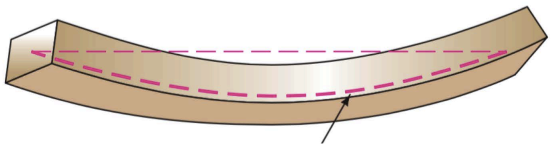


Abbildung 11. Deformierter Balken. Untere gestrichelte Linie ist die Biegelinie u.

Wir betrachten zuerst statische Balken, welche sich in einem Kräfte-Gleichgewicht befinden und sich deshalb nicht bewegen. In diesem Fall hängt die Biegelinie $u(x)$ nicht von der Zeit ab und ist durch eine gewöhnliche Differenzialgleichung gegeben. Anschliessend untersuchen wir den dynamischen Fall, in dem der Balken beschleunigt wird. Die Biegelinie $u(x, t)$ ist dann zeitabhängig und wird durch eine PDG bestimmt.

11.1. Statische Balken.

11.1.1. *Euler–Bernoulli Balkengleichung.* Die klassische Biegetheorie beschreibt die Verformung eines statischen Balkens, auf den an der Stelle x eine orthogonale Kraft $q(x)$ pro Längeneinheit wirkt, durch die *Euler–Bernoulli Balkengleichung*

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E(x)I(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right) = q(x).$$

Gemäss unserer Konvention bedeutet $q(x) < 0$, dass eine Last von oben auf den Balken drückt, wohingegen $q(x) > 0$ bedeutet, dass eine Kraft von unten wirkt. $E(x)I(x)$ ist die Biegesteifigkeit, welche sich als Produkt aus dem Elastizitätsmodul $E(x)$ und dem Flächenträgheitsmoment $I(x)$ ergibt. Im Allgemeinen hängt $E(x)$ von der Materialbeschaffenheit in x und $I(x)$ von der Form des Querschnitts des Balkens an der Stelle x ab. Wir konzentrieren uns im Folgenden aber auf homogene Balken, für welche $E(x) \equiv E$ und $I(x) \equiv I$ beide konstant sind. Dann reduziert sich die Euler–Bernoulli Balkengleichung auf die folgende lineare Differenzialgleichung vierter Ordnung:

$$EIu''''(x) = q(x).$$

Um sie eindeutig zu lösen, braucht man vier Randbedingungen. Die Form der Randbedingungen hängt davon ab, ob und wie der Balken an den Enden festgemacht ist. Es gibt drei Grundarten:

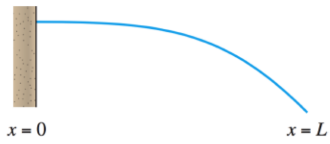
(i) Eingespannt in 0: $u(0) = u'(0) = 0$.
Eingespannt in L: $u(L) = u'(L) = 0$.
(ii) Gelenkig gelagert in 0: $u(0) = u''(0) = 0$.
Gelenkig gelagert in L: $u(L) = u''(L) = 0$.
(iii) Frei in 0: $u''(0) = u'''(0) = 0$.
Frei in L: $u''(L) = u'''(L) = 0$.

Beispiele.

(1) An beiden Enden eingespannt: $u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0$

(2) An beiden Enden gelenkig gelagert: $u(0) = u''(0) = u(L) = u''(L) = 0$

(3) Am einen Ende eingespannt und am anderen Ende frei (z.Bsp. ein Sprungbrett oder Flügel): $u(0) = u'(0) = u''(L) = u'''(L) = 0$.



Beispiel 11.A (Drei-Punkte Balkenbiegung Problem). Wir betrachten einen Balken der Länge L, der an den beiden Enden gelenkig gelagert ist und an der Stelle $x_0 \in (0, L)$ von einer Last mit der Kraft $F > 0$ nach unten gedrückt wird.

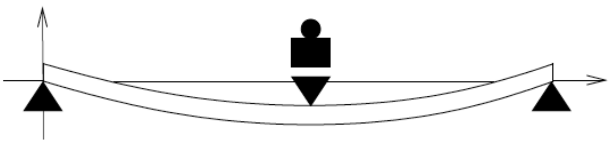


Abbildung 12. Drei-Punkte Balkenbiegung Problem

Die Biegelinie erfüllt dann die Gleichung

$$EIu''''(x) = -F\delta(x - x_0)$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$u(0) = u''(0) = u(L) = u''(L) = 0,$$

wobei δ die Dirac-Deltafunktion ist.

Dieses Problem kann man direkt durch Integration lösen. Nehmen wir z.Bsp. $L = 2$ und $F = EI = x_0 = 1$ an, dann hat man

$$u''''(x) = -\delta(x - 1). \tag{36}$$

Also erfüllt die dritte Ableitung

$$u'''(x) = c_1 - \int_0^x \delta(y - 1)dy = c_1 - H(x - 1),$$

wobei H die Heaviside Funktion ist. Wegen der Randbedingung $u''(0) = 0$ ist

$$u''(x) = \int_0^x \{c_1 - H(y - 1)\}\, dy = c_1 x - H(x - 1)(x - 1).$$

Wegen $u''(2) = 0$ hat man

$$0 = u''(2) = 2c_1 - H(2 - 1)(2 - 1) = 2c_1 - 1,$$

woraus folgt $c_1 = 1/2$. Also kriegt man mit $u(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= c_2 + \int_0^x \left\{ \frac{y}{2} - H(y-1)(y-1) \right\} dy \\
&= c_2 + \frac{x^2}{4} - H(x-1)\frac{(x-1)^2}{2}, \\
u(x) &= \int_0^x \left\{ c_2 + \frac{y^2}{4} - H(y-1)\frac{(y-1)^2}{2} \right\} dy \\
&= c_2 x + \frac{x^3}{12} - H(x-1)\frac{(x-1)^3}{6}.
\end{aligned}$$

Die letzte Randbedingung $u(2) = 0$ gibt

$$0 = u(2) = 2c_2 + \frac{8}{12} - \frac{1}{6} = 2c_2 + \frac{1}{2},$$

Also hat man $c_2 = -1/4$, und die Biegelinie ist gegeben durch

$$u(x) = -\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} - H(x-1)\frac{(x-1)^3}{6}.$$

Alternativ kann man dieses Problem auch per Laplacetransformation lösen. Die Funktion $u(x)$ ist durch das Problem zwar nur für $x \in [0, L]$ definiert. Wir können sie aber für alle $x \geq 0$ fortsetzen so dass sie überall die Gleichung (36) erfüllt. Dann können wir die Laplacetransformierte

$$U(s) = \int_0^\infty u(x) e^{-sx} dx$$

einführen. Mit der Ableitungsregel wird die Gleichung $u''''(x) = -\delta(x-1)$ zu

$$s^4 U(s) - s^3 u(0) - s^2 u'(0) - s u''(0) - u'''(0) = -e^{-s}.$$

Wir wissen, dass $u(0) = u''(0) = 0$. Wenn wir $u'(0)$ und $u'''(0)$ mit c_1 und c_2 bezeichnen, dann haben wir

$$s^4 U(s) - c_1 s^2 - c_2 = -e^{-s} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} - \frac{e^{-s}}{s^4}.$$

Weil $\mathcal{L}[x^n] = n!/s^{n+1}$ kriegt man mit dem zweiten Verschiebungssatz durch Laplace-Rücktransformation

$$u(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{6} - H(x-1)\frac{(x-1)^3}{6}.$$

Ähnlich wie vorher, leitet man aus den Randbedingungen $u(2) = u''(2) = 0$ her, dass $c_1 = -1/4$ und $c_2 = 1/2$. Also

$$u(x) = -\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} - H(x-1)\frac{(x-1)^3}{6}.$$

11.1.2. *Balken auf elastischer Unterlage.* Als Nächstes betrachten wir einen Balken, der horizontal auf einer elastischen Unterlage liegt, welche eine Gegenkraft proportional zur Durchbiegung des Balkens erzeugt.

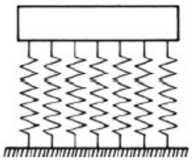


Abbildung 13. Idealisierter elastischer Untergrund. Jede Feder hat Federkonstante k.

Wenn eine Kraft $w(x) \leq 0$ pro Längeneinheit auf den Balken wirkt, ist die Biegelinie durch die Gleichung

$$EIu''''(x) = w(x) - ku(x)$$

gegeben, wobei $k > 0$ eine Proportionalitätskonstante ist, die von der Beschaffenheit des Untergrunds abhängt.

Beispiel 11.B Wir untersuchen nun eine Balken auf einer elastischen Unterlage, auf den an der Stelle $x_0 \in (0, L)$ eine Last von oben mit der Kraft $F > 0$ wirkt. Die Biegelinie $u(x)$ erfüllt dann

$$EIu''''(x) + ku(x) = -F\delta(x - x_0). \tag{37}$$

Da die beiden Enden frei sind, hat man

$$u''(0) = u'''(0) = u''(L) = u'''(L) = 0.$$

Wie oben nehmen wir an, $L = 2$, $F = EI = x_0 = 1$ und betrachten die Laplacetransformierte $U(s) = \int_0^\infty u(x)e^{-sx}dx$. Mit der Ableitungsregel wird die Gleichung (37) zu

$$s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) - su''(0) - u'''(0) + kU(s) = -e^{-s}.$$

Da $u''(0) = u'''(0) = 0$, haben wir

$$s^4U(s) - s^3u(0) - s^2u'(0) + kU(s) = -e^{-s}$$

und damit folgt

$$U(s) = \frac{s^3 u(0) + s^2 u'(0) - e^{-s}}{s^4 + k}.$$

Wir nennen $u(0) = c_1$, $u'(0) = c_2$, $k = 4\alpha^4$ und benutzen

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4 + 4\alpha^4}\right] = \frac{1}{4\alpha^3}\{\cosh(\alpha x)\sin(\alpha x) - \sinh(\alpha x)\cos(\alpha x)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{s^4 + 4\alpha^4}\right] = \frac{1}{2\alpha}\{\sinh(\alpha x)\cos(\alpha x) + \cosh(\alpha x)\sin(\alpha x)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3}{s^4 + 4\alpha^4}\right] = \cosh(\alpha x)\cos(\alpha x).$$

Mit dem zweiten Verschiebungssatz gibt das

$$\begin{aligned} u(x) = {} & c_1 \cosh(\alpha x)\cos(\alpha x) + \frac{c_2}{2\alpha}\left(\sinh(\alpha x)\cos(\alpha x) + \cosh(\alpha x)\sin(\alpha x)\right) \\ & - \frac{H(x-1)}{4\alpha^3}\{\cosh(\alpha(x-1))\sin(\alpha(x-1)) \\ & \qquad - \sinh(\alpha(x-1))\cos(\alpha(x-1))\}\,. \end{aligned}$$

Jetzt bleibt nur noch, die Konstanten c_1 und c_2 so zu wählen, dass die Biegelinie $u''(2) = u'''(2) = 0$ erfüllt. Das macht man am besten numerisch auf einem Rechner. Z.Bsp kriegt man dann

a) für $k = 4\alpha^4 = 4$: $c_1 = -0.0919$ und $c_2 = -0.0731$,
b) für $k = 4\alpha^4 = 2$: $c_1 = -0.2148$ und $c_2 = -0.0779$.

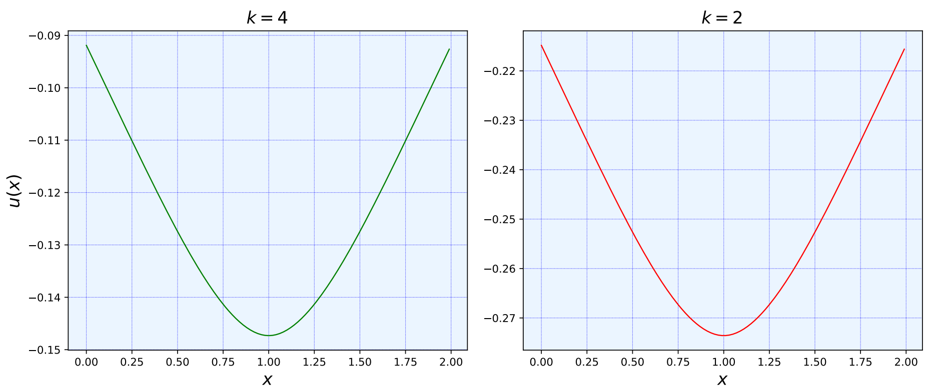


ABBILDUNG 14. Numerische Berechnung der Biegelinie u auf einem Rechner für $k = 4$ bzw. $k = 2$.

11.2. **Dynamische Balken.** Die klassische Theorie beschreibt die Dynamik von homogenen Balken durch die PDG

$$\rho u_{tt}(x,t) + b u_t(x,t) + EI u_{xxxx}(x,t) = q(x,t).$$

Sie wird zum Beispiel benutzt, um Balkenschwingungen zu berechnen. Das Problem hängt jetzt nicht nur vom Ort $x \in [0,L]$ sondern auch von der Zeit $t \geq 0$ ab. Dabei ist

- $\rho > 0$ die Masse des Balkens pro Lägeneinheit,
- $b \geq 0$ eine Dämpfungskonstante und
- $q(x,t)$ eine zeitabhängige externe Kraft pro Längeneinheit an der Stelle x, die orthogonal auf den Balken einwirkt.

Beispiel 11.C (Vibrierender Balken). Als Beispiel betrachten wir einen homogenen Balken der Länge $L = 1$ im Grenzfall $b = 0$, in dem es keine Dämpfung gibt. Wir nehmen an, der Balken ist an beiden Enden gelenkig gelagert und wird am Anfang aus der Gleichgewichtslage gebracht. Für $t > 0$ wirken dann aber keine weiteren externen Kräfte mehr auf ihn ein.

Die Biegelinie $u(x,t)$ erfüllt dann die folgende lineare PDG vierter Ordnung

$$u_{tt}(x,t) + \alpha^2 u_{xxxx}(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha^2 = \frac{EI}{\rho}.$$

Die Randbedingungen sind

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0,$$

und weil es eine PDG ist, braucht man auch noch Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = g(x)$$

für gegebene Funktionen $f, g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche die Randbedingungen

$$f(0) = f''(0) = f(1) = f''(1) = g(0) = g''(0) = g(1) = g''(1) = 0$$

erfüllen.

Wir machen den Separations-Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$. Durch Einsetzen in die PDG erhalten wir

$$X(x)T''(t) + \alpha^2 X''''(x)T(t) = 0,$$

was nach Division durch $X(x)T(t)$

$$\alpha^2 \frac{X''''(x)}{X(x)} = \lambda = -\frac{T''(t)}{T(t)}$$

für eine Konstante λ gibt. Weil wir keine Dämpfung angenommen haben, erwarten wir, dass der Balken hin und her schwingt. Deshalb nehmen wir $\lambda > 0$ an. Es gibt dann ein $\omega > 0$ so dass $\lambda = \omega^2$, und die Gleichung für $T(t)$ wird

$$T''(t) = -\omega^2 T(t),$$

welche die allgemeine Lösung

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

hat. Die zugehörige Gleichung für $X(x)$ ist

$$X''''(x) = \frac{\lambda}{\alpha^2} X(x) = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 X(x).$$

Da es eine gewöhnliche Differenzialgleichung vierter Ordnung ist, erwarten wir, dass sie vier linear unabhängige Lösungen hat. Aber man kann leicht nachprüfen, dass

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right), \quad \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right), \quad \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right), \quad \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right)$$

vier linear unabhängige Lösungen sind. Also ist die allgemeine Lösung von der der Form

$$C\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right) + E\cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right) + F\sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right).$$

Wegen der Randbedingungen $u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0$ hat man $C + E = 0$ und $-C + E = 0$, woraus folgt, dass $C = E = 0$.

Die Randbedingungen $u(1,t) = u_{xx}(1,t) = 0$ geben dann

$$D\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}\right) + F\sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}\right) = 0$$

sowie

$$-D\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}\right) + F\sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}\right) = 0,$$

woraus man $F = 0$ erhält. Um eine nichtriviale Lösung zu erhalten, wählen wir $D = 1$. Dann muss $\sqrt{\omega/\alpha} = n\pi$ für eine natürliche Zahl $n = 1, 2, \ldots$ sein. Also $\omega = \alpha(n\pi)^2$, und wir erhalten die Lösungen

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)\left\{a_n\cos(\alpha(n\pi)^2 t) + b_n\sin(\alpha(n\pi)^2 t)\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Jetzt können wir eine allgemeine Lösung per Superposition erzeugen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left\{a_n\cos(\alpha(n\pi)^2 t) + b_n\sin(\alpha(n\pi)^2 t)\right\}.$$

Per Konstruktion erfüllt sie die PDG und die Randbedinungen. Wir müssen nur noch die Koeffizienten a_n und b_n so wählen, dass die Anfangsbedingungen gelten. Weil die Funktionen f und g die Randbedingungen erfüllen, können sie zu 2-periodischen, 2-mal stetige differenzierbaren, ungeraden Funktionen $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ erweitert werden, und man hat

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x),$$
$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha(n\pi)^2 \sin(n\pi x)$$

für alle $x \in [0,1]$. Aus der allgemeinen Formel für die Koeffizienten von Sinus-Reihen kriegt man dann

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{\alpha(n\pi)^2}\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)dx.$$

Im Spezialfall, wo der Balken am Anfang gemäss $f(x) = \sin(m\pi x)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ausgelenkt und dann einfach losgelassen wird ($g(x) = 0$), hat man $a_n = \delta_{mn}$ und $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Die Vibration des Balkens ist dann durch

$$u(x,t) = \sin(m\pi x)\cos\left(\alpha(m\pi)^2 t\right)$$

gegeben.

Wir erinnern uns, dass die Schwingung einer an den Stellen 0 und 1 bei 0 festgehaltenen Saite die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$$

mit den Randbedingungen $v(0,t) = v(1,t) = 0$ erfüllt, und für die Anfangsbedingungen

$$v(x,0) = \sin(m\pi x), \quad v_t(x,0) = 0$$

durch

$$v(x,t) = \sin(m\pi x)\cos(cm\pi t)$$

gegeben ist.

Literatur

[1] R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations,* Prentice Hall, 1998

[2] M. D. Greenberg, *Advanced engineering mathematics,* Prentice Hall 1998, Kap. 17-20

[3] N. Hungerbühler, *Einführung in partielle Differentialgleichungen für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler,* vdf 1997

[4] J. Ockendon, S. Howison, A. Lacey and A. Movchan *Applied partial differential equations*, Oxford University Press, 1999

[5] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, *Introduction to partial differential equations and applications*, Dover, 1986