Überprüfen der Normalverteilungsannahme

(Kap. 4.4.6)

Daten $x_1, x_2, \dots, x_n$
aufgefasst als Realisierungen von
$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ i.i.d.}$$

Modell-Verteilung: $X_i \sim$ kum. Vert.fkt. F

z.B.: $X_i \sim \mathcal{N}(1, 1.5)$

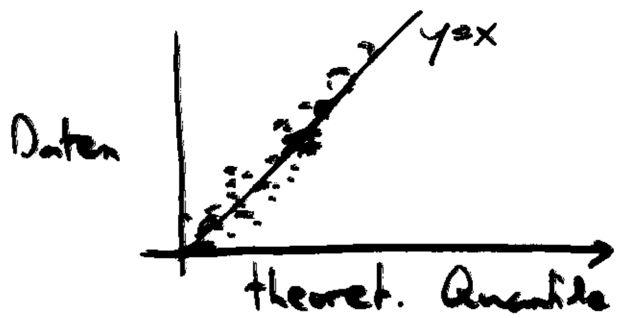
oder $X_i \sim \mathrm{Exp}(2.8)$

grafische Überprüfung:

Q-Q Plot: plotte
empirische Quantile (y-Achse)
gegen $\underbrace{\text{theoretische Quantile}}_{F^{-1}(\alpha)}$ (x-Achse)

für $\alpha = \frac{0.5}{n}, \frac{1.5}{n}, \dots, \frac{n-0.5}{n}$

$\rightsquigarrow$ empirische Quantile = Beobachtungen



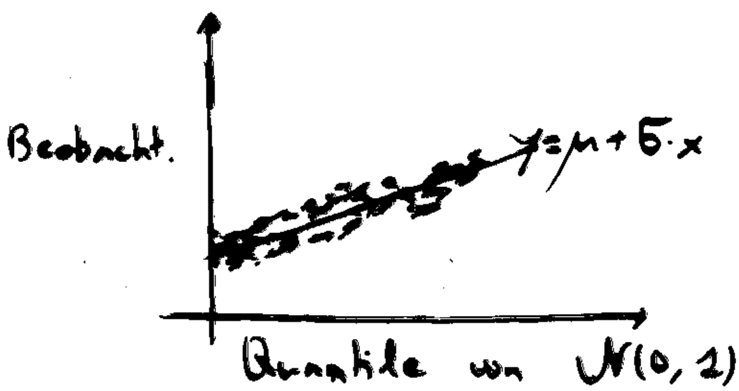
Normal-Plot:

ist ein Q-Q Plot wo Modell-Verteilung $= \mathcal{N}(0,1)$

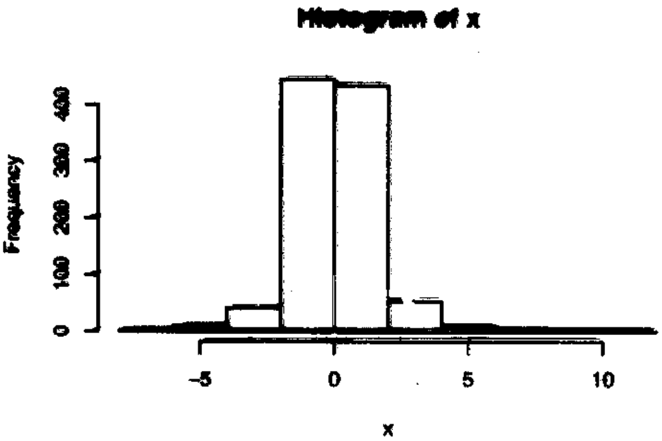
Faktum: falls wahre Verteilung von X_i
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

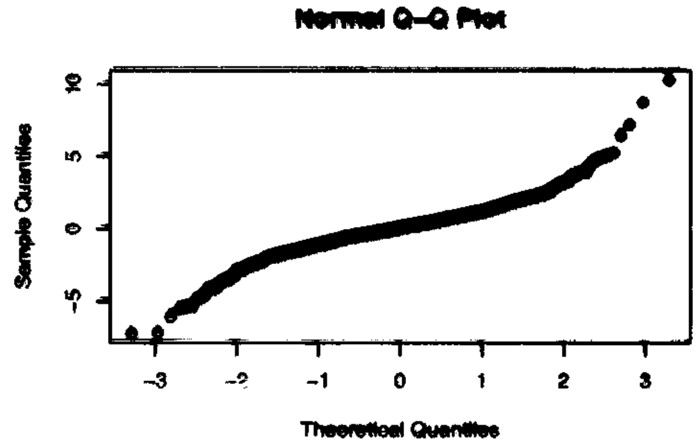
$\longrightarrow$ Normal-Plot liefert approximativ
eine Gerade

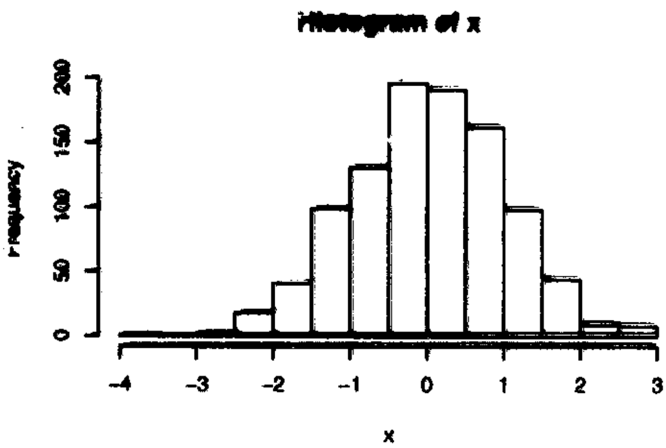
$$y = \mu + \sigma \cdot x$$

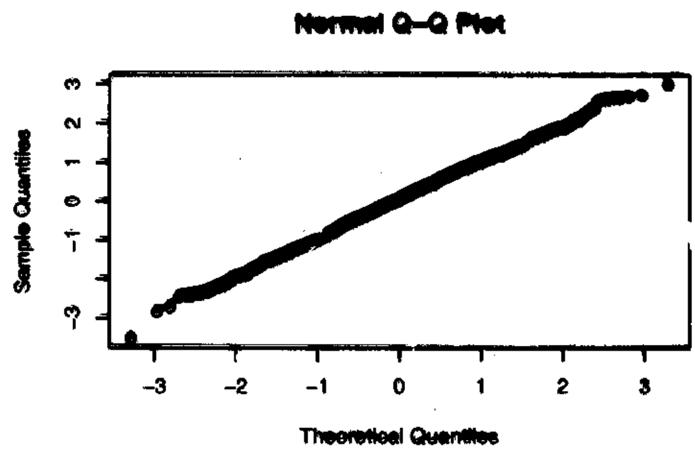


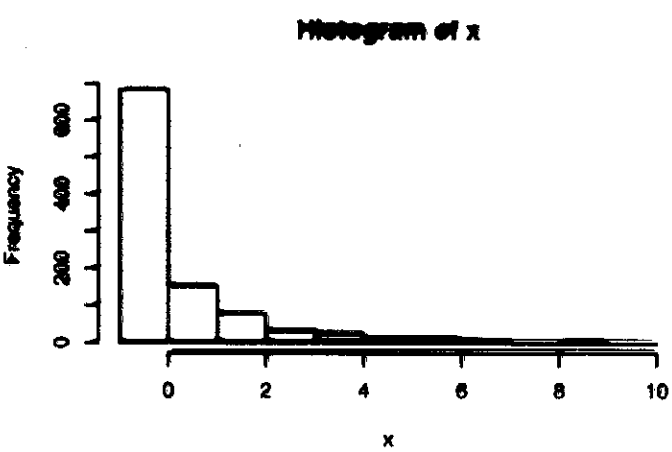
langschwänzig

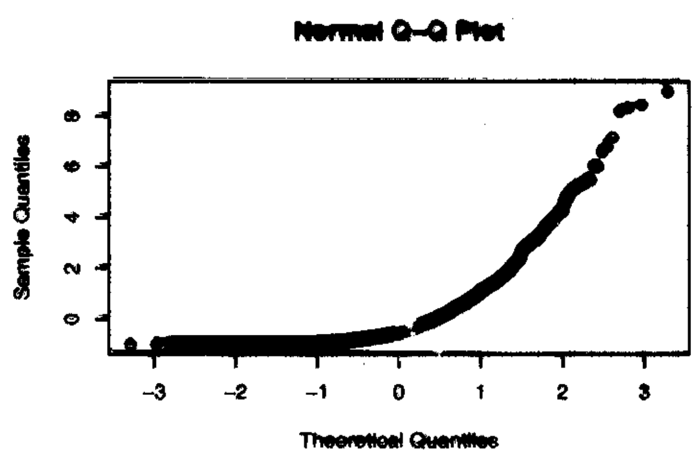


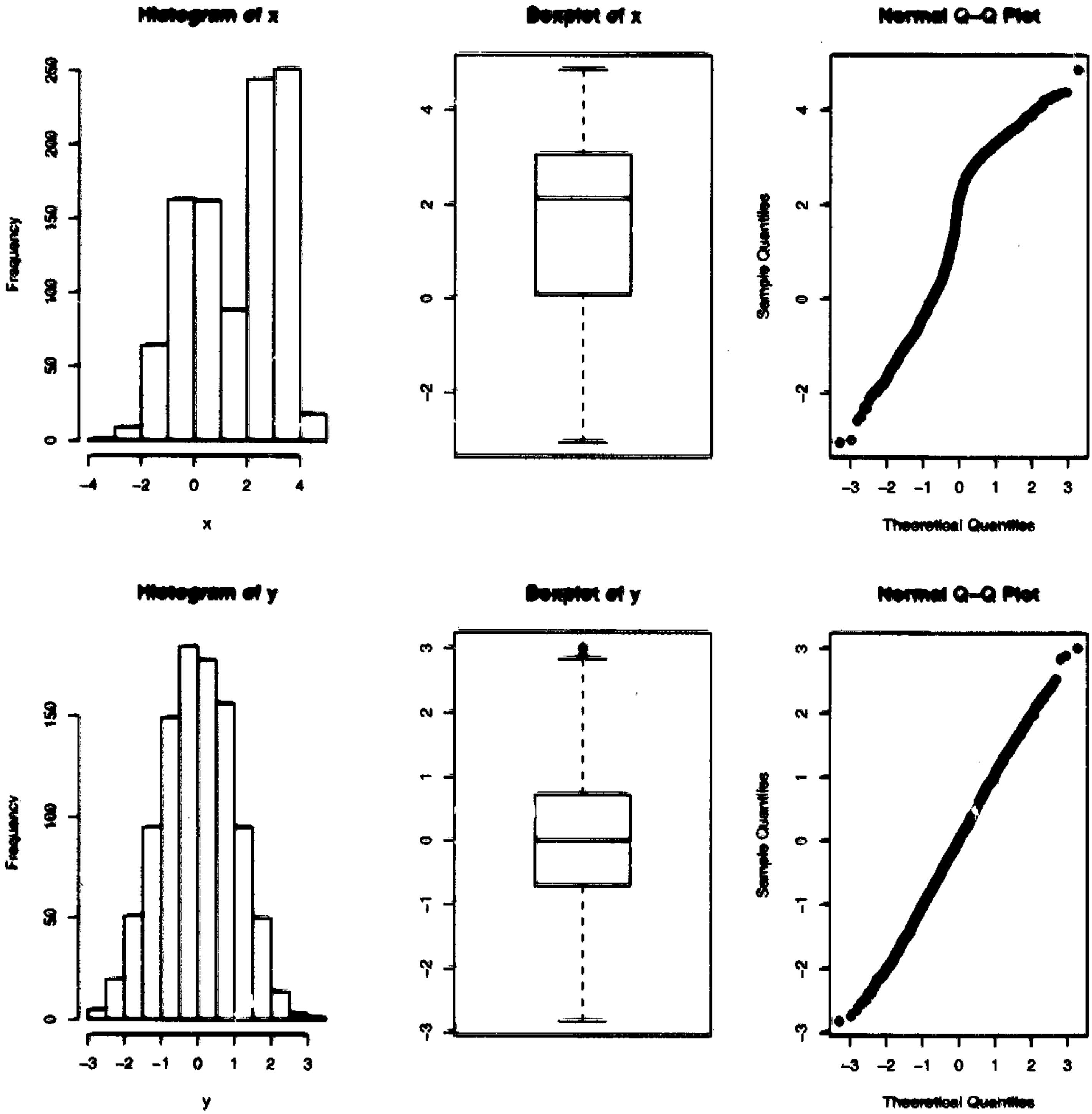











Histogram of x
Boxplot of x
Normal Q–Q Plot
Frequency
x
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Histogram of y
Boxplot of y
Normal Q–Q Plot
Frequency
y
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles

Bsp. Bremswege von 10 Testfahrzeugen mit je 2 Reifentypen

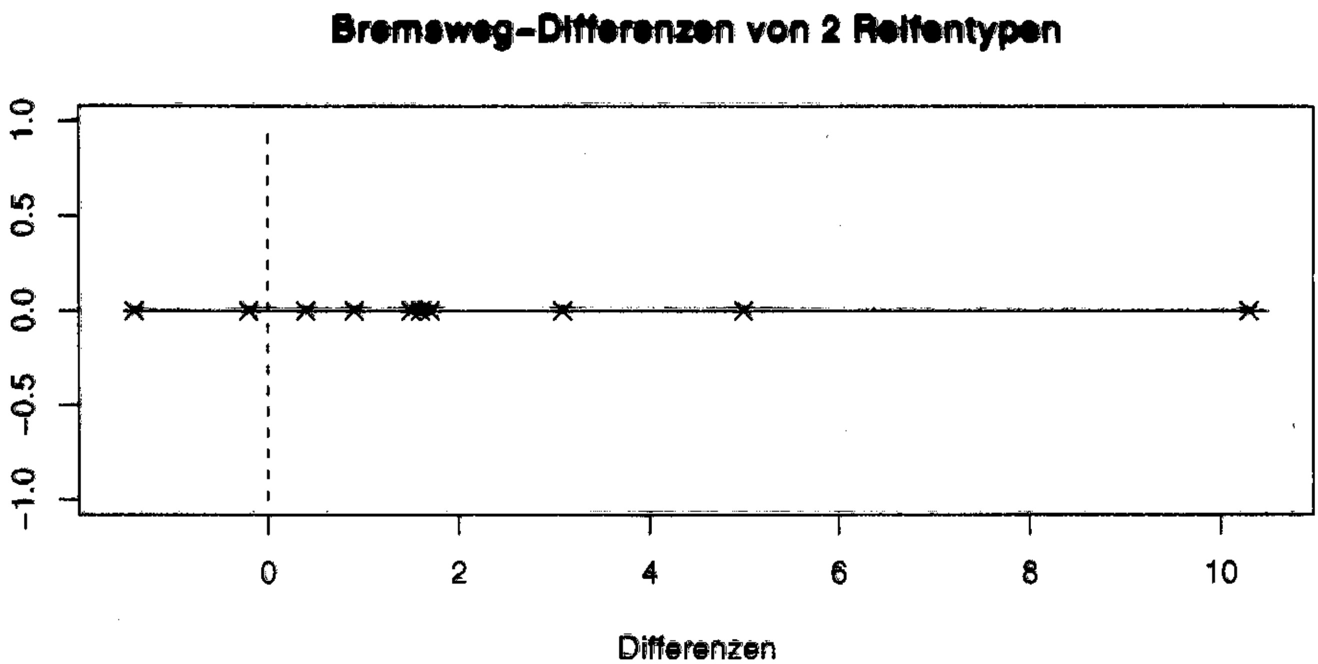
i	Typ A	Typ B	Differenz
1	44.5	44.9	0.4
2	55.0	54.8	-0.2
3	⋮	⋮	⋮
⋮			-1.4
			1.7
10	49.2	50.7	1.5
		mittlere Diff.	2.29

(i) Ist Typ A besser als B? ⟶ 1-seitiger Test

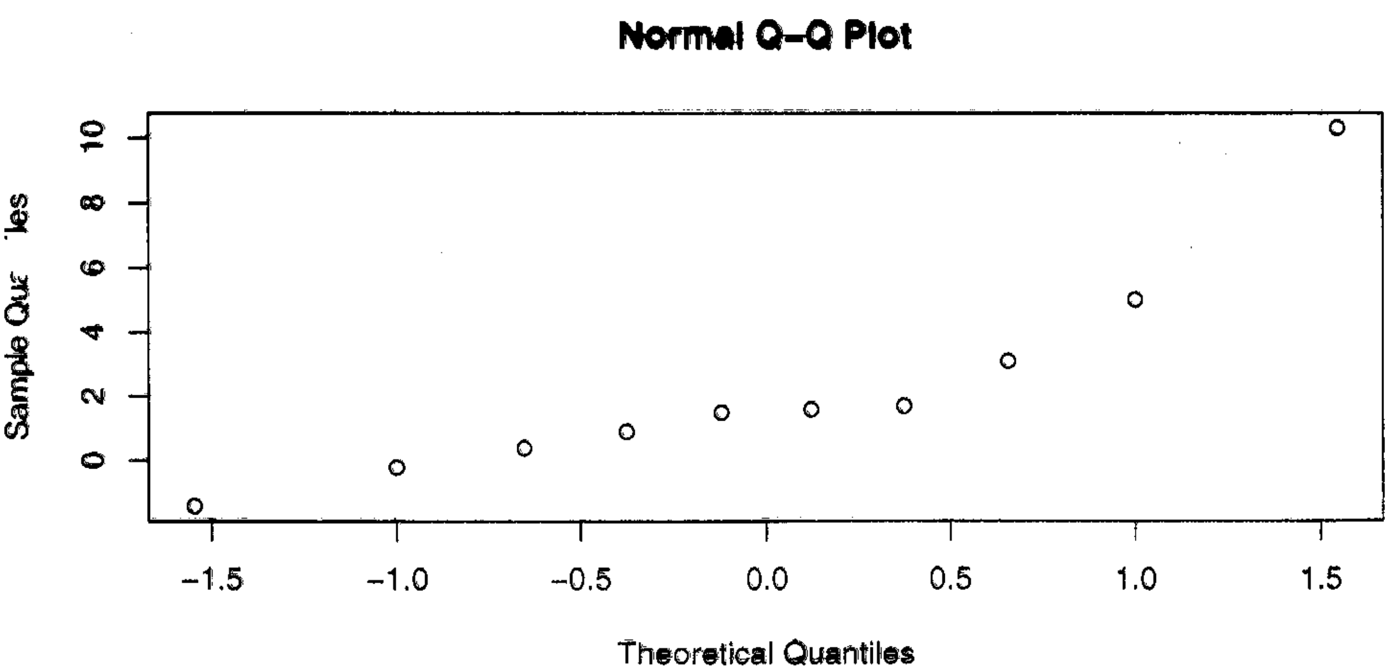
(ii) Besteht Unterschied zwischen Typ A und B? ⟶ 2-seitiger Test für Differenzen

Bei: (ii).			P-Wert
t-Test	nicht signifikant	bei $\alpha = 0.05$	0.057
Vorzeichen-Test	"	"	0.1094
Wilcoxon-Test	ist signifikant	"	0.029

H_0 wird belassen



Bremsweg-Differenzen von 2 Reifentypen
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0
2
4
6
8
10
Differenzen



Normal Q-Q Plot
10
8
6
4
2
0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
Theoretical Quantiles

Macht eines Tests

$$\textbf{Fehler 1. Art} = \text{fälschliches Verwerfen von } H_0, \text{ obschon } H_0 \text{ stimmt}$$

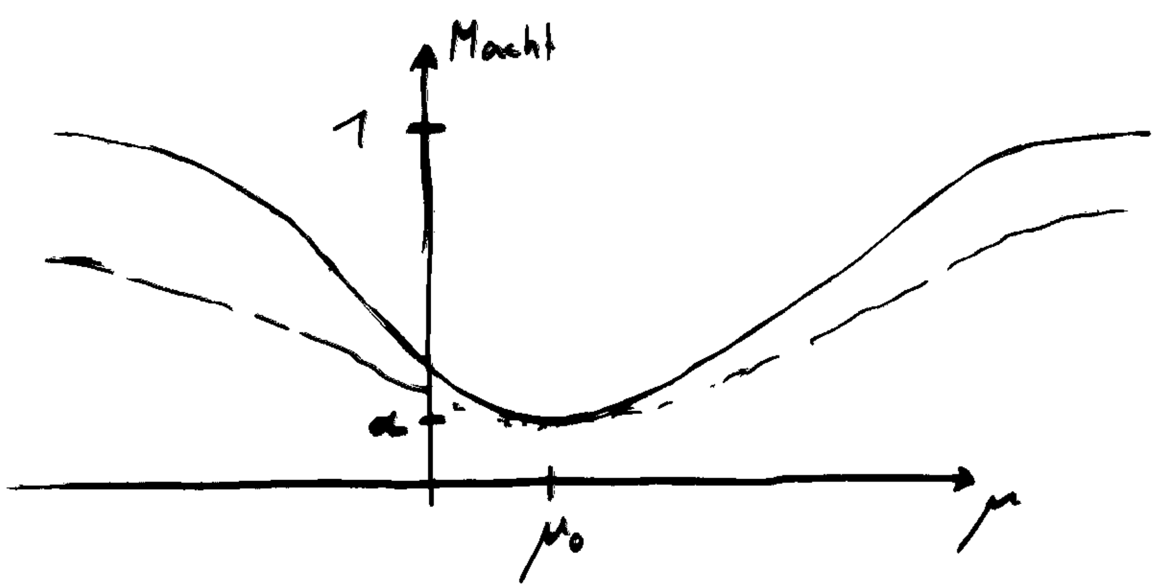
$$\mathbf{P}[\text{Fehler 1. Art}] = \alpha$$

$$\textbf{Fehler 2. Art}(\mu) = \text{fälschliches Beibehalten von } H_0, \text{ falls } \mu (\in H_A) \text{ stimmt}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Macht}(\mu) &= 1 - \mathbf{P}[\text{Fehler 2. Art}(\mu)] \\ &= \mathbf{P}[\text{Verwerfen von } H_0 \text{ falls } \mu \text{ stimmt}] \\ &= \mathbf{P}_\mu[T \in \underbrace{K}_{\text{Verw.bereich}}] \end{aligned}$$

Macht(μ) =
Chance, dass man richtigerwiese $\mu(\in H_A)$ entdeckt

Macht(μ) ist eine Kurve



Diskussion Vorzeichen-Test

Vorteile:

- Vorzeichen-Test gilt bei beliebiger Verteilung der X_i's
- bessere Macht als t-Test bei nicht-normlaverteilten Daten

  Bem: für t-Test gilt wegen ZGS immer noch:

  $\mathbb{P}[\text{Fehler 1. Art}] \approx \alpha$

Nachteil:

Grössenordnung von $|X_i - \mu_0|$ geht *nicht* in Test-Statistik ein
$\rightsquigarrow$ Informationsverlust

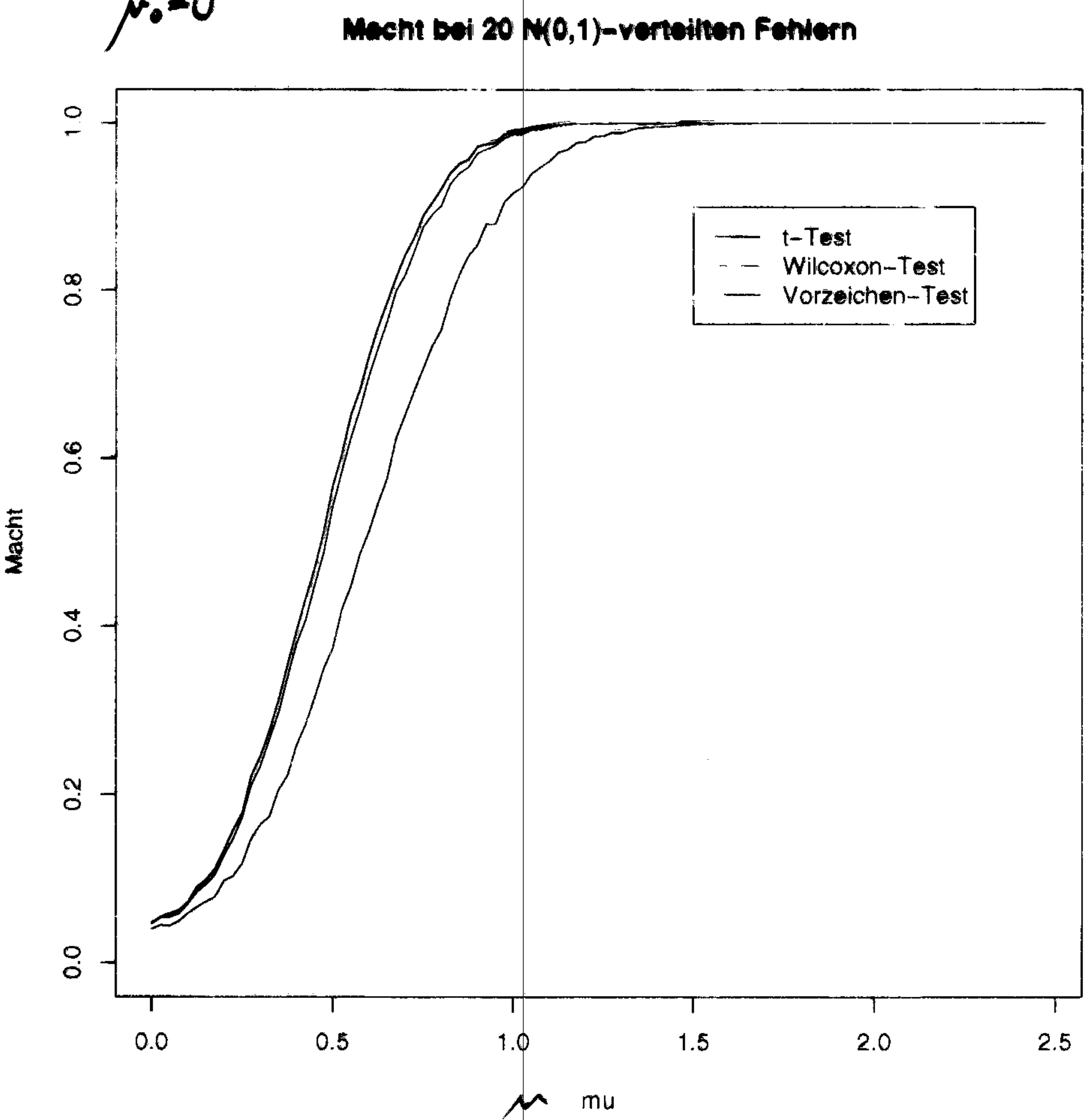
$\rightsquigarrow$ noch nicht "optimale Macht"

Diskussion Wilcoxon-Test

- Wilcoxon-Test gilt bei symmetrischer Verteilung der X_i's um μ
- nur leicht sub-optimal bzgl. Macht bei exakter Normalverteilung
- oftmals viel bessere Macht als t-Test bei bereits kleiner Abweichung von der Normalverteilung

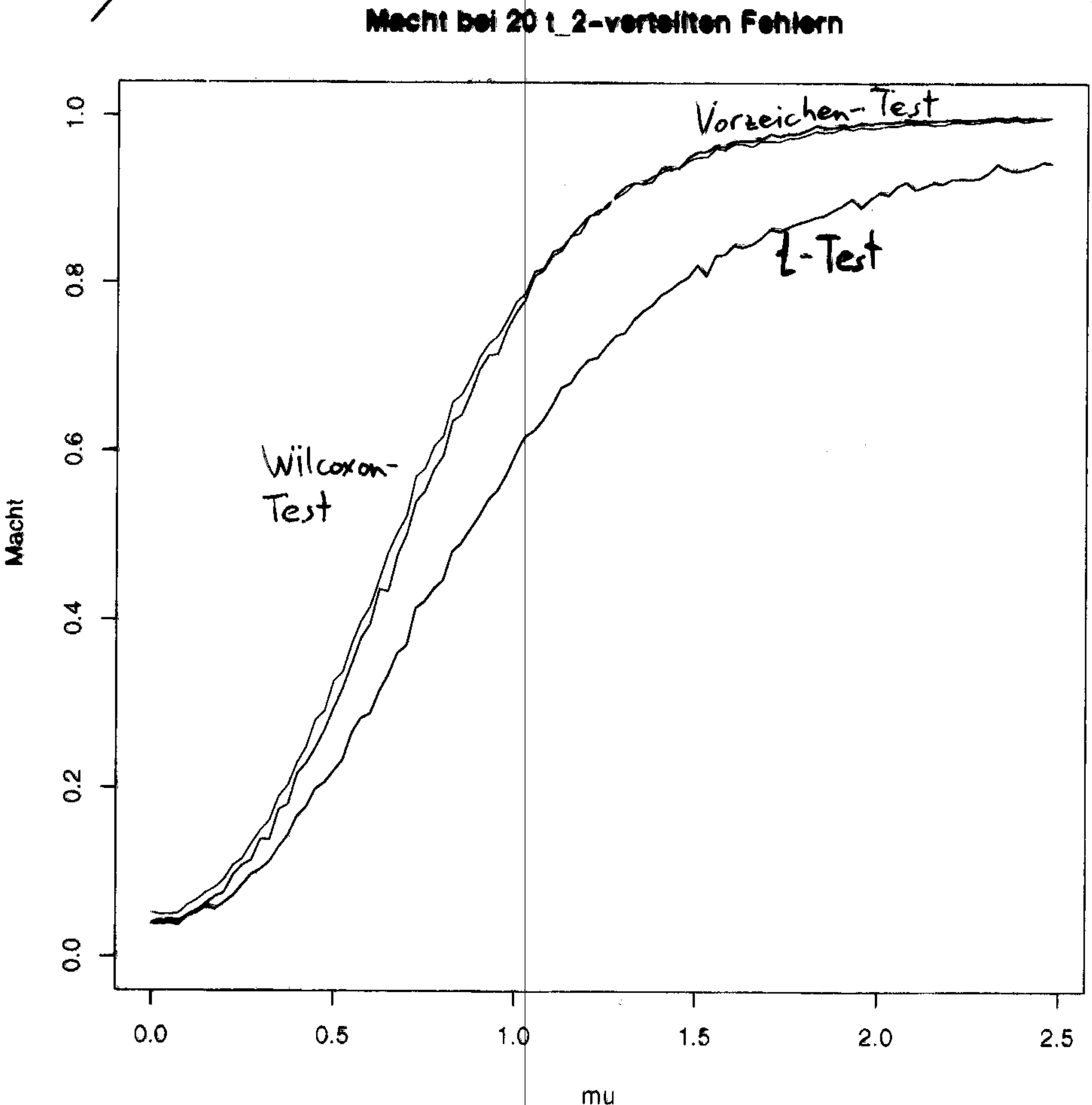
$\rightsquigarrow$ Wilcoxon-Test ist in der Praxis [illegible]

$\mu_0 = 0$

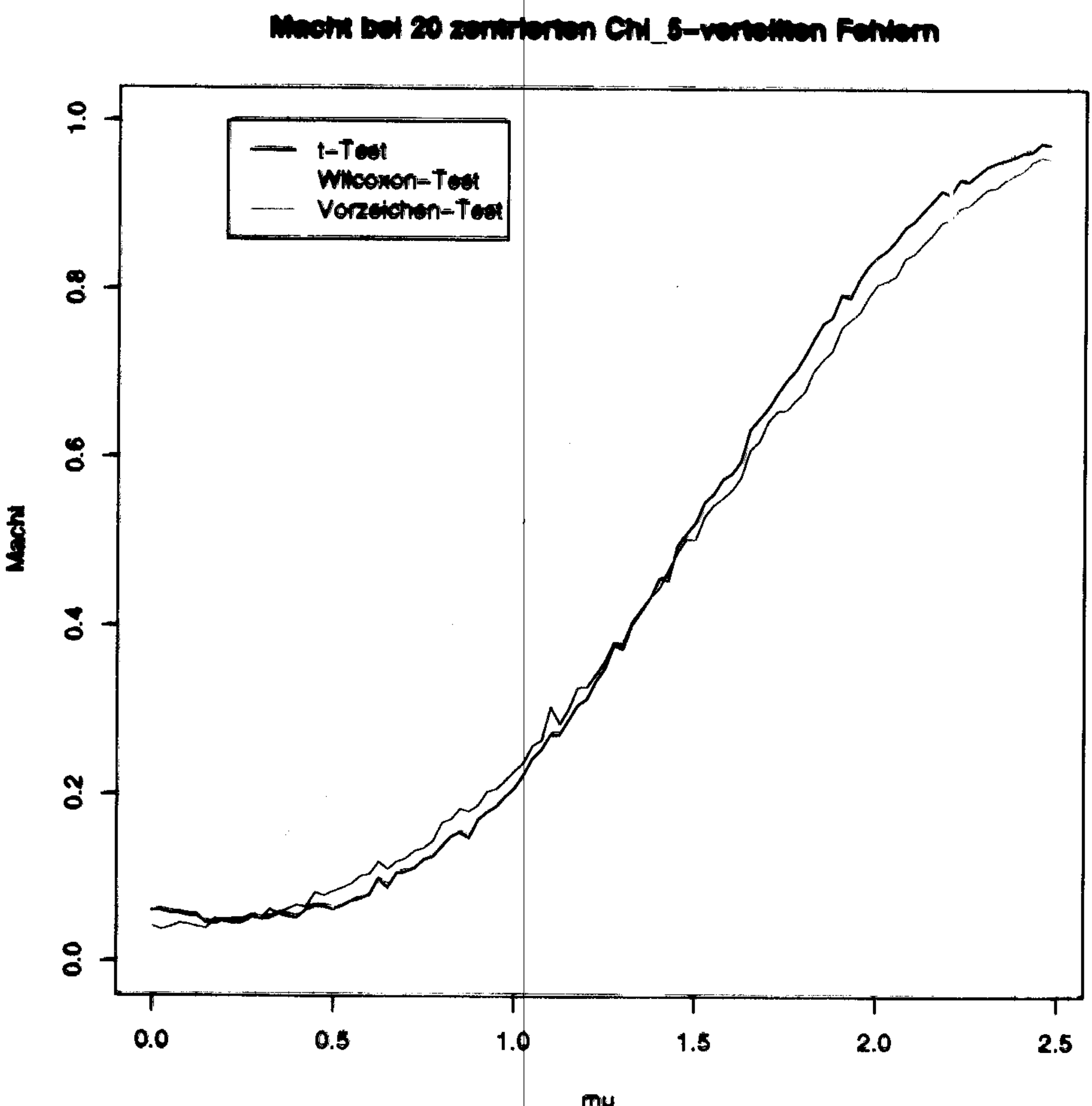


Macht bei 20 N(0,1)-verteilten Fehlern
t-Test
Wilcoxon-Test
Vorzeichen-Test
Macht
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
μ mu

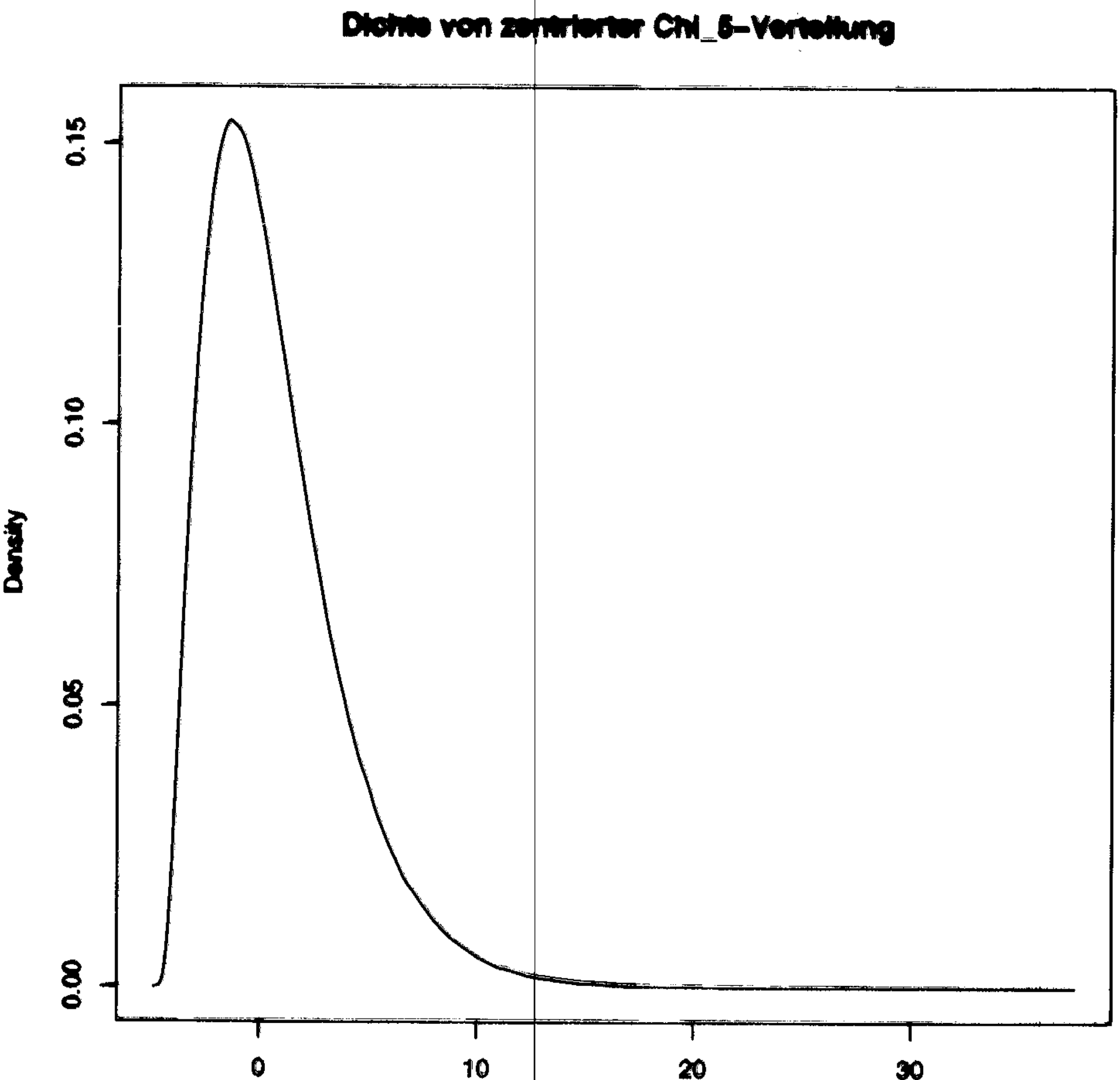
$\mu_0 = 0$



Macht bei 20 t_2-verteilten Fehlern
Vorzeichen-Test
t-Test
Wilcoxon-Test
Macht
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
mu



Macht bei 20 zentrierten Chi_5-verteilten Fehlern
t-Test
Wilcoxon-Test
Vorzeichen-Test
Macht
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
mu


Dichte von zentrierter Chi_5-Verteilung
Density
0.00
0.05
0.10
0.15
0
10
20
30