spectral density estimator

Spektraldichte - Schätzer

$$\hat{f}_n(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} w_k \, I_n(\lambda_j - \lambda_k) \quad , \quad \lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$$

$$w_k = K\left(\frac{k}{m}\right) \cdot \frac{1}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} & K : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad K(x) = K(-x) \\ & \int_{-1}^{1} K(x)\,dx = 1 \end{aligned}\right\}$$

$K(\cdot)$ symmetr.
probability density
W.-keitsdichte
on
auf $[-1, 1]$

Then: If stationary and regularity conditions hold
Dann: Falls $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationär und "genügend regulär"

and
und $m = m(n) \longrightarrow \infty$, $\frac{m(n)}{n} \longrightarrow 0$

$$\frac{2\pi j}{n} \longrightarrow \lambda \in (0, \pi) \quad , \quad \frac{2\pi j'}{n} \longrightarrow \lambda' \in (0, \pi)$$

$$\lambda' \neq \lambda$$

$$\mathbb{E}[\hat{f}_n(\lambda_j)] \longrightarrow f(\lambda)$$

$$m \operatorname{Var}(\hat{f}_n(\lambda_j)) \longrightarrow f(\lambda)^2 \int_{-1}^{1} K^2(x)\,dx$$

$$m \operatorname{Cov}(\hat{f}_n(\lambda_j), \hat{f}_n(\lambda_k)) \longrightarrow 0$$

optimal which has best rate for
Optimales m, welches beste Rate für $\mathbb{E}[(\hat{f}_n(\lambda_j) - f(\lambda_j))^2]$
erzielt ist

$$m = m(n) = C(f, f'')\, n^{4/5}$$

if exists and
falls $f''(\lambda_j)$ existiert und $\neq 0$