Minimale Standard-Identitäten für Lie-Algebren

Manuel Pastorini

20. Dezember 2000

Zusammenfassung

1950 zeigten Amitsur und Levitzki

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma n} = 0$$

für $n \geq 2d, x_i \in M_d(K)$. Dies ist auch minimal, für $n = 2d - 1$ gilt die Identität nicht.

Für gewisse Teilräume gilt die Identität schon in kleineren Graden, beispielsweise in so_d für $n = 2d - 2$. Hier werde ich ein Gegenbeispiel für $n = 2d - 3$ angeben. Für $\mathrm{sp}_{2\ell}$ wird dagegen gezeigt, daß hier $n = 4\ell$ der minimale Grad ist, in dem diese Identität gilt. Damit ist für alle klassischen einfachen Lie-Algebren der minimale Grad bestimmt, in dem diese Identität gilt.

Desweiteren wird die Identität

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) [[\cdots [y, x_{\sigma 1}], \cdots], x_{\sigma n}] = 0$$

betrachtet, wobei $[a, b] := ab - ba$ der Kommutator zweier Matrizen ist. Da die adjungierte Darstellung einer einfachen Lie-Algebra treu ist und $\dim \mathrm{sl}_d = d^2 - 1$, gilt diese Identität in sl_d für $n = 2(d^2 - 1)$. Diese Abschätzung ist allerdings sehr grob; ich werde zeigen, daß die Identität für $n = 4d - 4$, aber nicht für $4d - 5$ gilt.

Weiter wird gezeigt, daß diese Identität in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ im Grad $8\ell - 8$ und in so_d im Grad $4d - 12$ gilt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Bezeichnungen und grundlegende Bemerkungen

Die (assoziative) Algebra der $d \times d$-Matrizen über einem Körper K wird mit M_d oder $M_d(K)$ bezeichnet. Mittels $[x, y] := xy - yx$ ist sie eine Lie-Algebra und wird dann auch mit gl_d bezeichnet. Sei sl_d die Unter-Lie-Algebra der Matrizen mit Spur 0.

Für eine Matrix $a \in M_d$ bezeichne a^t die transponierte Matrix. Für eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\ell}$, wobei $a, b, c, d \in M_\ell$ sind, sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d^t & -b^t \\ -c^t & a^t \end{pmatrix}$. Die Abbildung $x \mapsto x^t$ und $x \mapsto x^s$ sind Antihomomorphismen (d.h. $(xy)^t = y^t x^t$ und $(xy)^s = y^s x^s$) der Ordnung 2, und die Mengen der Matrizen $x \in \mathrm{gl}_d$ mit $x^t = -x$ bzw. $x^s = -s$ bilden Unter-Lie-Algebren, die mit so_d bzw. sp_d bezeichnet werden.

Die symmetrische Gruppe in n Variablen heißt S_n. Für $\sigma \in S_n$ sei $\mathrm{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen.

Großbuchstaben werden für Variablen verwendet, während kleine Buchstaben für Matrizen verwendet werden. Mit $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ bezeichnen wir den Polynomring in den nicht kommutierenden Variablen $X_1, \ldots, X_n$.

Sofern keine Unklarheiten zu befürchten sind, steht $\underline{X}$ für $X_1, \ldots, X_n$.

Das Polynom

$$A_n(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma n}$$

wird als assoziatives Standard-Polynom vom Grad n bezeichnet und die Gleichung $A_n(\underline{x}) = 0$ als assoziative Standard-Identität.

Entsprechend wird

$$L_n(X_1, \ldots, X_n, Y) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) [[\cdots [Y, X_{\sigma 1}], \cdots], X_{\sigma n}]$$

als Standard-Lie-Polynom vom Grad n und die Gleichung $L_n(\underline{x}, y) = 0$ als Standard-Lie-Identität bezeichnet.

Bemerkung 1.1. Gilt eine dieser Identitäten im Grad n, so gilt sie auch im Grad $n+1$, und daher auch in allen höheren Graden. Dies sieht man, indem man die auftretenden Summanden nach $\sigma(n+1)$ ordnet.

Bemerkung 1.2. In dieser Arbeit wird K stets ein Körper der Charakteristik 0 sein. Die angegebenen Identitäten gelten dann auch für einen Körper beliebiger Charakteristik, allerdings sind dort die Grade nicht notwendigerweise minimal, da die Ergebnisse in den angegebenen Gegenbeispielen nicht unbedingt von 0 verschieden sind.

Für $1 \leq i, j \leq d$ sei $e_{i,j} \in M_d$ die Matrix mit dem Eintrag 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und allen anderen Einträgen 0. Weiter sei $b_{i,j} := e_{i,j} - e_{j,i}$. Offenbar ist $\{e_{i,j} | 1 \leq i, j \leq d\}$ eine Basis von M_d und $\{b_{i,j} | 1 \leq i < j \leq d\}$ eine Basis von so_d.

Für $1 \leq i \leq d$ sei entsprechend $e_i \in K^d$ der Spaltenvektor mit dem Eintrag 1 an der i-ten Stelle und allen anderen Einträgen 0.

Für eine Matrix, die nur in einer Zeile oder Spalte von 0 verschiedene Einträge hat, wird der Index dieser Zeile oder Spalte auch als der Zeilenindex bzw. der Spaltenindex der Matrix bezeichnet.

Lemma 1.3. Es gilt

(a) $e_{i,j}e_{k,\ell} = \begin{cases} e_{i,\ell} & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(b) $e_{i,j}b_{k,\ell} = e_{i,j}(e_{k,\ell} - e_{\ell,k}) = \begin{cases} e_{i,\ell} & \text{falls } j = k, \\ -e_{i,k} & \text{falls } j = \ell, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) sowie für $i < j$ und $k < \ell$

$$b_{i,j}b_{k,\ell} = (e_{i,j} - e_{j,i})b_{k,\ell} = \begin{cases} e_{i,\ell} & \text{falls } j = k, \\ -e_{i,k} & \text{falls } j = \ell, i \neq k, \\ -e_{j,\ell} & \text{falls } i = k, j \neq \ell, \\ e_{j,k} & \text{falls } i = \ell, \\ -e_{i,i} - e_{j,j} & \text{falls } i = k, j = \ell, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Offensichtlich. □

Kapitel 2

Assoziative Standard-Identität für so_d

In M_d gilt die assoziative Standard-Identität im Grad $n = 2d$, nicht aber in kleineren Graden. Für gerades d zeigt Kostant [2], daß in so_d die assoziative Identität $A_n(\underline{x}) = 0$ für $n = 2d-2$ gilt. In diesem Kapitel zeigen wir für d beliebig, daß die Identität für $n = 2d - 3$ nicht gilt. Das angegebene Gegenbeispiel findet sich auch bei Rowen [7], der auch für ungerades d zeigt, daß $A_{2d-2}(\underline{x}) = 0$ in so_d gilt.

Lemma 2.1. Sei $n \geq 2$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{so}_d$ paarweise verschiedene Matrizen der Form $b_{i,j}$. Für $1 \leq k \leq d$ sei weiter $u(k)$ die Anzahl derjenigen dieser Matrizen, bei denen die k-te Zeile von 0 verschieden ist. Dann gilt (für passend gewähltes i und j):

$$x_1 \cdots x_n = \begin{cases} 0 \text{ oder } \pm e_{i,i} & \text{falls keine der } u(1), \ldots, u(d) \text{ ungerade sind.} \\ 0 \text{ oder } \pm e_{i,j} & \text{falls } u(i) \text{ und } u(j) \text{ ungerade, aber alle anderen } u(k) \\ & \text{gerade sind. Dann ist } i \neq j. \\ 0 & \text{falls mehr als zwei der } u(1), \ldots, u(d) \text{ ungerade sind.} \end{cases}$$

Beweis: Diese Tatsachen folgen für $n = 2$ aus Lemma 2.1(c), wobei der vorletzte Fall nicht auftritt, da die x_i paarweise verschieden sind. Für $n > 2$ folgen sie per Induktion aus Lemma 2.1(b). □

Proposition 2.2. Sei $d \geq 2$. Für $1 \leq i \leq d - 2$ sei

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{1,2}, \\ x_{2i} &= b_{1,i+2}, \\ x_{2i+1} &= b_{2,i+2}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$A_{2d-3}(\underline{x}) = \begin{cases} (-1)^{d/2-1}(d-1)!b_{1,2} & \text{falls } d \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{d+1}{2}}\big((d-1)!(e_{1,1}+e_{2,2}) \\ \qquad + 2(d-2)!(e_{3,3} + \cdots + e_{d,d})\big) & \text{falls } d \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Für $d = 2$ ist die Behauptung offenbar erfüllt. Sei nun $d > 2$.

1. Schritt: Sei $T_\sigma(\underline{x}) = x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(2d-3)}$ das zu σ gehörende Monom in A_{2d-3}. Weiter sei $\tilde{S}_{2d-3}$ die Menge aller $\sigma \in S_{2d-3}$, so daß $T_\sigma(\underline{x})$ von 0 verschieden ist. Ab jetzt sei stets $\sigma \in \tilde{S}_{2d-3}$.

Mit $n = 2d-3$ und $u(i)$ wie in Lemma 2.1 ist $u(1) = u(2) = d-1$ und $u(i) = 2$ für $3 \leq i \leq d$. Daher gilt:

$$T_\sigma(\underline{x}) = \begin{cases} \pm e_{1,2} \text{ oder } \pm e_{2,1} & \text{falls } d \text{ gerade} \\ \pm e_{1,1}, \ldots \text{ oder } \pm e_{d,d} & \text{falls } d \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2. Schritt: Zu jeder Permutation σ konstruieren wir folgendermaßen induktiv eine Folge $s^\sigma \in \{1, \ldots, d\}^{2d-2}$:

Der Index der eindeutig bestimmten Zeile, in der $x_{\sigma 1} x_{\sigma 2}$ einen von 0 verschiedenen Eintrag hat, sei s_0^σ. Für $1 \leq k \leq 2d-3$ hat $x_{\sigma k}$ in genau zwei Spalten einen von 0 verschiedenen Eintrag. Wegen $\sigma \in \tilde{S}_{2d-3}$ ist der Index der einen dieser Spalten s_{k-1}^σ, der Index der anderen sei s_k^σ. Insbesondere ist $T_\sigma(\underline{x}) = \pm e_{s_0, s_{2d-3}}$.

Diese Folge hat folgende Eigenschaften:

- Für $1 \leq k \leq 2d-3$ ist $s_{k-1}^\sigma \neq s_k^\sigma$.
- Es gibt genau ein $1 \leq k \leq 2d-3$ mit

  $$\begin{array}{ccccc} \text{entweder} & s_{k-1}^\sigma = 1 & \text{und} & s_k^\sigma = 2 \\ \text{oder} & s_{k-1}^\sigma = 2 & \text{und} & s_k^\sigma = 1, \end{array}$$

  nämlich $\sigma^{-1} 1$.
- Ist $1 \leq k \leq 2d-4$ und $3 \leq s_k^\sigma \leq d$, so gilt

  $$\begin{array}{ccccc} \text{entweder} & s_{k-1}^\sigma = 1 & \text{und} & s_{k+1}^\sigma = 2 \\ \text{oder} & s_{k-1}^\sigma = 2 & \text{und} & s_{k+1}^\sigma = 1. \end{array}$$
- Ist d gerade, so sind $s_0^\sigma, s_{2d-3}^\sigma \in \{1, 2\}$ und jede der Ziffern $3, \ldots, d$ kommt genau einmal vor, und die Ziffern 1 und 2 kommen jeweils genau $\frac{d}{2}$-mal vor.

  Ist d ungerade, so gilt $s_0^\sigma = s_{2d-3}^\sigma$ und in $\{s_k^\sigma | k \geq 1\}$ kommt jede der Ziffern $3, \ldots, d$ genau einmal, und die Ziffern 1 und 2 jeweils genau $\frac{d-1}{2}$-mal vor.

Die ersten drei dieser Eigenschaften folgen direkt aus der Konstruktion. Da die Ziffer i für $i \neq s_0^\sigma$ und $i \neq s_{2d-3}^\sigma$ offenbar genau $\frac{u(i)}{2}$-mal vorkommen muß, folgt die letzte Eigenschaft aus dem 1. Schritt.

3. Schritt:
Behauptung: Zu jeder Folge $s \in \{1, \ldots, d\}^{2d-2}$ mit diesen Eigenschaften gibt es genau ein $\sigma \in \tilde{S}_{2d-3}$ mit $s = s^\sigma$.
Begründung: Definiert man σ durch

$$\sigma k = \begin{cases} 1 & \text{falls } s_{k-1} = 1 \text{ und } s_k = 2, \\ & \text{oder } s_{k-1} = 2 \text{ und } s_k = 1, \\ 2i & \text{falls } s_{k-1} = 1 \text{ und } s_k = i+2, \\ & \text{oder } s_{k-1} = i+2 \text{ und } s_k = 1, \\ 2i+1 & \text{falls } s_{k-1} = 2 \text{ und } s_k = i+2, \\ & \text{oder } s_{k-1} = i+2 \text{ und } s_k = 2, \end{cases}$$

für $1 \leq k \leq 2d-3$, so ist σ auf Grund der gegebenen Eigenschaften von s wohldefiniert, es gilt $s = s^\sigma$ und dies ist das einzige solche σ.

4. Schritt: In diesem Schritt wird die Anzahl solcher Folgen bestimmt.

Hierfür sei zunächst $s_0 = 1$ oder $s_0 = 2$ vorgegeben. Da die Ziffern 1 und 2 immer abwechselnd auftreten, kann dann nur noch die Reihenfolge der $d-2$ Ziffern $3 \leq i \leq d$ und die Position, an der 1 und 2 direkt auf einander folgen, variieren. Hierfür gibt es offenbar $(d-1)!$ Möglichkeiten.

Ist $3 \leq s_0 \leq d$, so ist $s_1 = 1$ oder $s_1 = 2$. In beiden Fällen gibt es jeweils $(d-2)!$ Möglichkeiten für die Reihenfolge der Ziffern $\{3, \ldots, d\} \setminus \{s_0\}$ und die Position, an der die Ziffern 1 und 2 direkt aufeinander folgen.

Für ungerades d gibt es daher für $s_0 = 1$ oder $s_0 = 2$ jeweils $(d-1)!$, und für $3 \leq s_0 \leq d$ jeweils $2(d-2)!$ Folgen mit den oben genannten Eigenschaften.

5. Schritt:
Sei k die Position mit $s_{k-1}, s_k \in \{1,2\}$, und $\alpha \in \{\pm 1\}$ mit $T_\sigma(\underline{x}) = \alpha e_{s_0, s_{2d-3}}$.
Behauptung:
Ist $s_0 = 1$, so ist k ungerade und es gilt $\alpha = (-1)^{d+\frac{k-1}{2}}$.
Ist $s_0 = 2$, so ist k ungerade und es gilt $\alpha = (-1)^{d+\frac{k+1}{2}}$.
Ist $3 \leq s_0 \leq d$ und $s_1 = 1$, so ist k gerade und es gilt $\alpha = (-1)^{\frac{k}{2}}$.
Ist $3 \leq s_0 \leq d$ und $s_1 = 2$, so ist k gerade und es gilt $\alpha = (-1)^{\frac{k}{2}+1}$.

Begründung:
Ist $1 \leq i \leq k-1$ und $s_0 \in \{1,2\}$, so gilt: $s_i \in \{1,2\} \Leftrightarrow i$ gerade. Ist $3 \leq s_0 \leq d$ so gilt entsprechend: $s_i \in \{1,2\} \Leftrightarrow i$ ungerade. Daher muß k im ersten Fall ungerade, im zweiten Fall gerade sein.

Das Vorzeichen hängt davon ab, wie oft in Lemma 1.3(b) der zweite Fall auftritt. Dies ist für $1 \leq i \leq d-2$ jeweils für genau eine der beiden Matrizen x_{2i} und x_{2i+1} der Fall. Daher erhält man den Anteil $(-1)^d$ am Vorzeichen. Nach dem 2. Schritt treten die Fälle mit $3 \leq s_0 \leq d$ allerdings nur für ungerades d auf.

Für die Matrix $x_1 = b_{1,2}$ tritt der zweite Fall in Lemma 1.3 (b) genau dann auf, wenn $s_{k-1} = 2$ und $s_k = 1$ ist. Dies gilt aber genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&k \equiv 3 \pmod 4 &&\text{falls } s_0 = 1,\\
&k \equiv 1 \pmod 4 &&\text{falls } s_0 = 2,\\
&k \equiv 0 \pmod 4 &&\text{falls } 3 \leq s_0 \leq d \text{ und } s_1 = 1,\\
&k \equiv 2 \pmod 4 &&\text{falls } 3 \leq s_0 \leq d \text{ und } s_1 = 2.
\end{aligned}$$

6. Schritt: Behauptung: Ist k wie im vorigen Schritt, und σ die zu s gehörende Permutation, so gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}+\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor} & \text{falls } s_0 = 1,\\ (-1)^{\frac{k-1}{2}+\lfloor\frac{d}{2}\rfloor+1} & \text{falls } s_0 = 2,\\ (-1)^{\frac{k-2}{2}+\frac{d-1}{2}} & \text{falls } 3 \leq s_0 \leq d \text{ und } s_1 = 1,\\ (-1)^{\frac{k-2}{2}+\frac{d+1}{2}} & \text{falls } 3 \leq s_0 \leq d \text{ und } s_1 = 2. \end{cases}$$

Begründung:
Seien s und t zwei Folgen mit den oben genannten Eigenschaften, und σ, τ die dazu gehörenden Permutationen.

Sei $3 \leq i \leq d, 3 \leq j \leq d$ und $i \neq j$. Ist $s_\ell = t_m = i$ und $s_m = t_\ell = j$, sowie $s_n = t_n$ für $n \neq \ell, n \neq m$, so gilt $\sigma\tau^{-1} = (2i, 2j)(2i+1, 2j+1)$. Unterscheiden sich s und t nur in den Ziffern ≥ 3, so haben also σ und τ das selbe Vorzeichen.

Sei k wie oben die Position mit $s_{k-1}, s_k \in \{1,2\}$ und ℓ die entsprechende Position für die Folge t. Ist $\ell = k+2$, sowie $s_m = t_m$ für $m \neq k, k+1$, so gilt $s_k = t_{k+1} \in \{1,2\}$ und $s_{k+1} = t_k = i \geq 3$. Daher ist $\sigma\tau^{-1} = (1, 2i)$ oder $\sigma\tau^{-1} = (1, 2i+1)$, also $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\tau)$.

Es genügt daher nun, für jeden der in der Behauptung genannten Fälle eine entsprechende Folge anzugeben, und das Vorzeichen der dazu gehörenden Permutation zu bestimmen. Betrachte im ersten Fall für d gerade die Folge:

$$s = 1, 2, 3, 1, 4, 2, \ldots, d, 2.$$

Dann ist $k = 1$, und die zugehörige Permutation ist

$$\sigma = (2\ 3)(6\ 7) \cdots (2d-6, 2d-5),$$

also gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{d}{2}-1}$.

Für ungerades d betrachte man entsprechend die Folge:

$$s = 1, 2, 3, 1, 4, 2, \ldots, d, 1.$$

Dann ist ebenfalls $k = 1$, und die zugehörige Permutation ist

$$\sigma = (2\ 3)(6\ 7) \cdots (2d-4, 2d-3),$$

und es gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}$.

Für die anderen Fälle betrachte man die Folgen:

$$\begin{aligned} s &= 2, 1, 3, 2, 4, 1, \ldots, 2, \\ s &= d, 1, 2, 3, 1, 4, 2, \ldots, d, \\ s &= d, 2, 1, 3, 2, 4, 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Die zugehörige Permutation ist im ersten Fall $\sigma = (4\ 5)(8\ 9)\cdots$. In den letzten beiden Fällen erhält man die jeweilige zugehörige Permutation aus der zu der Folge $s_1, s_2, \ldots, s_{2d-3}, s_0$ gehörenden durch Multiplikation mit $(2d-3, 2d-4, \ldots\ 2\ 1)$.

7. Schritt: Nach dem 5. und 6. Schritt ist das Vorzeichen von $\operatorname{sgn}(\sigma)T_\sigma(\underline{x})$

$$\begin{array}{ll} (-1)^{d/2-1} & \text{falls } s_0 = 1, \\ (-1)^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor} & \text{falls } s_0 = 2, \\ (-1)^{\frac{d+1}{2}} & \text{falls } 3 \leq s_0 \leq d. \end{array}$$

Da also $T_\sigma(\underline{x}) = \pm T_\tau(\underline{x})$ auch $T_\sigma(\underline{x}) = T_\tau(\underline{x})$ impliziert, ist der Betrag der im 1. Schritt angegebenen Einträge jeweils die im 4. Schritt angegebene Anzahl von Möglichkeiten entsprechender Folgen. Zusammen mit den oben berechneten Vorzeichen, ergibt sich das behauptete Ergebnis. □

Kapitel 3

Assoziative Standard-Identität für $\mathrm{sp}_{2\ell}$

In $\mathrm{sp}_{2\ell} \subset M_{2\ell}$ gilt die assoziative Standard-Identität im Grad 4ℓ. In diesem Kapitel wird gezeigt, daß dies auch für $\mathrm{sp}_{2\ell}$ der minimale Grad ist, in dem diese Identität gilt.

Zunächst geben wir ein Beispiel dafür an, daß die Identität nicht im Grad $4\ell - 2$ gilt. Anschließend werden wir daraus folgern, daß auch die Identität $A_{4\ell-1}(\underline{x})$ in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ nicht gilt. Eine Schlußfolgerung dieser Art findet sich auch schon bei Kostant [2].

Proposition 3.1. Für $1 \leq i \leq \ell - 1$ sei

$$\begin{aligned} x_1 &= e_{1,\ell+1}, & x_{4\ell-2i-2} &= e_{\ell+i+1,i+1}, \\ x_{2i} &= e_{\ell+i,i+1} + e_{\ell+i+1,i}, & x_{4\ell-2i-1} &= e_{i,\ell+i+1} + e_{i+1,\ell+i}, \\ x_{2i+1} &= e_{i+1,\ell+i+1}, & x_{4\ell-2} &= e_{\ell+1,1}. \end{aligned}$$

Dann ist $x_i \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ für $1 \leq i \leq 4\ell - 2$ und es gilt: $e_1^t A_{4\ell-2}(\underline{x}) e_1 \neq 0$.

Beweis: Die Aussage $x_i \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ für $1 \leq i \leq 4\ell-2$ ist klar. Für $\ell = 1$ gilt $A_2(x_1, x_2) = e_{1,2}e_{2,1} - e_{2,1} = e_{1,1} - e_{2,2}$, also gilt auch $e_1^t A_2(x_1, x_2) e_1 \neq 0$.

Für $\ell > 1$ betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \{1, \ldots, 2\ell - 2\} &\to \{1, \ldots, 2\ell\} \\ i &\mapsto \begin{cases} i & \text{falls } i \leq \ell - 1, \\ i + 1 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi : M_{2\ell-2} &\to M_{2\ell} \\ e_{i,j} &\mapsto e_{\varphi(i),\varphi(j)}. \end{aligned}$$

Dann ist ψ injektiv, mit der Multiplikation verträglich, und es gilt $\psi(\mathrm{sp}_{2\ell-2}) \subset \mathrm{sp}_{2\ell}$.

Sei nun $\sigma \in S_{4\ell-2}$ so, daß $e_1^t x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4\ell-2)} e_1 \neq 0$ gilt. Dann muß in dieser Reihenfolge rechts von der Matrix $x_{2\ell-1} = e_{\ell,2\ell}$ eine Matrix stehen, die einen von 0 verschiedenen Eintrag in der 2ℓ-ten Zeile hat. Dies sind aber nur die Matrizen $x_{2\ell-2}$ und $x_{2\ell}$. Links von der Matrix $x_{2\ell-1}$ muß eine Matrix stehen, die in der ℓ-ten Spalte einen von 0 verschiedenen Eintrag hat, auch dies sind nur die Matrizen $x_{2\ell-2}$ und $x_{2\ell}$. Entsprechend müssen links und rechts von der Matrix $x_{2\ell}$ die beiden Matrizen $x_{2\ell-1}$ und $x_{2\ell+1}$ stehen. Daher müssen die vier Matrizen $x_{2\ell-2}, x_{2\ell-1}, x_{2\ell}$ und $x_{2\ell+1}$ direkt nebeneinander stehen, und zwar in einer der Reihenfolgen:

$$x_{2\ell-2}x_{2\ell-1}x_{2\ell}x_{2\ell+1} = e_{2\ell-1,2\ell-1}$$
$$x_{2\ell+1}x_{2\ell}x_{2\ell-1}x_{2\ell-2} = e_{\ell-1,\ell-1}$$

Durch Multiplikation von links mit Permutationen der Form $(2\ell-2, 2\ell-1, 2\ell, 2\ell+1, k)$ oder $(2\ell+1, 2\ell, 2\ell-1, 2\ell-2, k)$ für entsprechend gewählte k, erhält man aus σ eine Permutation $\tilde{\sigma} = \sigma_1\sigma_2$, so daß σ_1 die Ziffern $2\ell-2, 2\ell-1, 2\ell, 2\ell+1$ invarinat läßt und σ_2 die übrigen Ziffern. Es gilt $\sigma_2 = \mathrm{id}$ oder $\sigma_2 = (2\ell-2, 2\ell+1)(2\ell-1, 2\ell)$. Wegen $e_1^t x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4\ell-2)e_1} \neq 0$ gilt außerdem $e_1^t x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4\ell-2)e_1} = e_1^t x_{\sigma_1 1} \cdots x_{\sigma_1(2\ell-3)} x_{\sigma_1(2\ell+2)} \cdots x_{\sigma_1(4\ell-2)} e_1$. Es sei $\tau \in S_{4\ell-6}$ mit

$$\tau i = \begin{cases} \sigma_1 i & \text{falls } i < 2\ell-2, \\ \sigma_1 i - 4 & \text{falls } i > 2\ell+1. \end{cases}$$

Sind $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{4\ell-6}$ wie in der Proposition definiert, wobei man ℓ durch $\ell-1$ ersetzt, so gilt $\psi(\tilde{x}_{\tau i}) = x_{\sigma_2 i}$ für $1 \leq i \leq 4\ell-6$ und daher $e_1^t \tilde{x}_{\tau 1} \cdots \tilde{x}_{\tau(4\ell-6)} e_1 \neq 0$. Da $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) = \mathrm{sgn}(\tau)$ gilt, folgt per Induktion für alle ℓ, daß alle σ mit $e_1^t x_{\sigma 1} \cdots x_{4\ell-2} e_1 \neq 0$ gleiches Vorzeichen haben.

Da die Einträge der x_i alle nichtnegativ sind, genügt es nun also, eine Permutation σ anzugeben, mit $e_1^t x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4\ell-2)} e_1 \neq 0$. Es gilt aber $e_1^t x_1 \cdots x_{4\ell-2} e_1 = 1$. □

Satz 3.2. Es gibt $x_1, \ldots, x_{4\ell-1} \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ mit $A_{4\ell-1}(\underline{x}) \neq 0$.

Beweis: Sei $\tau = (1, 4\ell-2)(2, 4\ell-3) \cdots (2\ell-1, 2\ell)$. Dann ist $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ und für $x_1, \ldots, x_{4\ell-2} \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ gilt:

$$\begin{aligned} A_{4\ell-2}(\underline{x})^s &= \sum_{\sigma \in S_{4\ell-2}} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4\ell-2)})^s \\ &= \sum_{\sigma \in S_{4\ell-2}} \mathrm{sgn}(\sigma) x^s_{\sigma(4\ell-2)} \cdots x^s_{\sigma 1} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{4\ell-2}} \mathrm{sgn}(\sigma) x^s_{\sigma\tau 1} \cdots x^s_{\sigma\tau(4\ell-2)} \\ &= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_{4\ell-2}} \mathrm{sgn}(\sigma) x^s_{\sigma 1} \cdots x^s_{\sigma(4\ell-2)} \\ &= -A_{4\ell-2}(\underline{x}). \end{aligned}$$

Also ist $A_{4\ell-2}(\underline{x}) \in \mathrm{sp}_{2\ell}$.

Sind nun $x_1, \ldots, x_{4\ell-2} \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ so, daß $A_{4\ell-2}(\underline{x}) \neq 0$ gilt, und $x_{4\ell-1} \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ beliebig, so gilt $\mathrm{tr}\, A_{4\ell-1}(\underline{x}) = (4\ell-1)\,\mathrm{tr}(A_{4\ell-2}(\underline{x}) x_{4\ell-1})$. Da $\mathrm{sp}_{2\ell}$ halbeinfach und die

Standarddarstellung treu ist, ist die Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}_{2\ell} \times \mathrm{sp}_{2\ell} &\to K \\ (x, y) &\mapsto \operatorname{tr} xy \end{aligned}$$

nicht degeneriert, es gibt also ein $x_{4\ell-1} \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ mit $\operatorname{tr} A_{4\ell-1}(\underline{x}) \neq 0$. Für diese $\underline{x}$ ist dann aber auch $A_{4\ell-1}(\underline{x}) \neq 0$. $\square$

Kapitel 4

Standard-Lie-Identität für gl_d

In diesem und dem folgenden Kapitel soll bestimmt werden, für welches minimale n die Identität $L_n(\underline{x}, y) = 0$ in gl_d gilt. Zunächst sind einige Vorbereitungen nötig.

Wir wählen das Repräsentantensystem $S_{k,\ell}$ von $S_{k+\ell}/S_k \times S_\ell$, definiert durch

$$S_{k,\ell} := \{\sigma \in S_{k+\ell} | \sigma 1 < \cdots < \sigma k, \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)\},$$

und definieren das Polynom $B_{k,\ell} \in K\{X_1, \ldots, X_{k+\ell}, Y\}$ durch

$$B_{k,\ell}(\underline{X}, Y) := \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} X_{\sigma k} \cdots X_{\sigma 1} Y X_{\sigma(k+1)} \cdots X_{\sigma(k+\ell)}.$$

Lemma 4.1. Es gilt

$$[[\cdots[Y, X_1], \cdots], X_n] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k B_{k,n-k}(\underline{X}, Y).$$

Beweis: Per Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Behauptung $Y = Y$, also erfüllt. Gelte nun die Behauptung für $n - 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
[[\cdots[Y, X_1], \cdots], X_n] &= [[\cdots[Y, X_1], \cdots], X_{n-1}]X_n - X_n[[\cdots[Y, X_1], \cdots], X_{n-1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{k,n-k-1}(\underline{X}, Y) X_n - X_n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_{k,n-k-1}(\underline{X}, Y) \\
&= B_{0,n-1}(\underline{X}, Y) X_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k B_{k,n-k-1}(\underline{X}, Y) X_n \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k X_n B_{k,n-k-1}(\underline{X}, Y) - (-1)^{n-1} X_n B_{n-1,0}(\underline{X}, Y) \\
&= B_{0,n}(\underline{X}, Y) + (-1)^n B_{n,0}(\underline{X}, Y) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\left(B_{k,n-k-1}(\underline{X}, Y) X_n + X_n B_{k-1,n-k}(\underline{X}, Y)\right)}_{=B_{k,n-k}(\underline{X}, Y)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k B_{k,n-k}(\underline{X}, Y).
\end{aligned}$$

$\square$

Definition: Wir definieren die Polynome $A_{k,\ell} \in K\{X_1, \ldots, X_{k+\ell}, Y\}$ durch

$$A_{k,\ell}(\underline{X}, Y) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma k} Y X_{\sigma(k+1)} \cdots X_{\sigma(k+\ell)}.$$

Offenbar sind die Polynome $A_{k,\ell}$ alternierend in den X_i und multilinear in allen Variablen, und jedes andere Polynom mit diesen Eigenschaften läßt sich eindeutig als Linearkombination der $A_{k,\ell}$ darstellen.

Die Koeffizienten $a_{k,\ell}$ seien durch folgende Darstellung definiert:

$$L_n(\underline{X}, Y) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n-k} A_{k,n-k}(X_1, \ldots, X_n, Y). \tag{4.1}$$

Lemma 4.2. Es gilt

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ und } \ell \text{ beide ungerade,} \\ (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{k+\ell}{2} \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Nach Lemma 4.1 gilt

$$L_n(\underline{X}, Y) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k B_{k,n-k}(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma n}, Y),$$

und daher

$$a_{k,\ell} A_{k,\ell}(\underline{X}, Y) = (-1)^k \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{k,\ell}(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(k+\ell)}, Y).$$

Ist nun

$$\tilde{A}_{k,\ell}(\underline{X}, Y) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma k} \cdots X_{\sigma 1} Y X_{\sigma(k+1)} \cdots X_{\sigma(k+\ell)},$$

so ist $\tilde{A}_{k,\ell} = (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} A_{k,\ell}$.

Definiert man die Koeffizienten $b_{k,\ell}$ durch

$$\sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{k,\ell}(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(k+\ell)}, Y) = b_{k,\ell} \tilde{A}_{k,\ell}(\underline{X}, Y),$$

so gilt $a_{k,\ell} = (-1)^{k+\lfloor k/2 \rfloor} b_{k,\ell} = (-1)^{k-\lfloor k/2 \rfloor} b_{k,\ell} = (-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} b_{k,\ell}$.

Es genügt also, die $b_{k,\ell}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} b_{k,\ell} \tilde{A}_{k,\ell}(\underline{X}, Y) &= \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{k,\ell}(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(k+\ell)}, Y) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_{k,\ell}} X_{\sigma\tau k} \cdots X_{\sigma\tau 1} Y X_{\sigma\tau(k+1)} \cdots X_{\sigma\tau(k+\ell)} \\ &= \sum_{\tau \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) X_{\sigma\tau k} \cdots X_{\sigma\tau 1} Y X_{\sigma\tau(k+1)} \cdots X_{\sigma\tau(k+\ell)} \\ &= \sum_{\tau \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\tau) \tilde{A}_{k,\ell}(\underline{X}, Y), \end{aligned}$$

also $b_{k,\ell} = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Da das einzige Element in $S_{k,0}$ bzw. in $S_{0,\ell}$ die Identität ist, gilt $b_{k,0} = b_{0,\ell} = 1$.

Nach der Definition von $S_{k,\ell}$ ist für jedes $\sigma \in S_{k,\ell}$ entweder $\sigma 1 = 1$ oder $\sigma(k+1) = 1$. Im ersten Fall erhält man durch die Operation von σ auf den Ziffern $2, \dots, k+\ell$ ein $\sigma_1 \in S_{k-1,\ell}$. Im zweiten Fall sei $\sigma_2 := \sigma \circ (k+1, k, \dots, 1)$. Dann gilt $\sigma_2 1 = 1$, sowie $\sigma_2 2 < \cdots < \sigma_2 k < \sigma_2(k+1)$ und $\sigma_2(k+2) < \cdots < \sigma_2(k+\ell)$. Man erhält also eine Bijektion zwischen $S_{k,\ell}$ und der disjunkten Vereinigung von $S_{k-1,\ell}$ und $S_{k,\ell-1}$, und es gilt die Rekursionsformel:

$$b_{k,\ell} = b_{k-1,\ell} + (-1)^k b_{k,\ell-1}.$$

Per Induktion zeigt man leicht

$$b_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ und } \ell \text{ beide ungerade,} \\ \binom{\lfloor \frac{k+\ell}{2} \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit für $a_{k,\ell}$ die behauptete Formel. □

Lemma 4.3. Es gilt

$$A_{k,\ell} = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_k(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma k}) Y A_\ell(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_k(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma k}) Y A_\ell(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}(\tau) X_{\sigma\tau 1}, \dots, X_{\sigma\tau k} Y \sum_{\rho \in S_\ell} \operatorname{sgn}(\rho) X_{\sigma\rho(k+1)}, \dots, X_{\sigma\rho(k+\ell)} \\
&\quad = \sum_{\substack{\sigma \in S_{k,\ell} \\ (\tau,\rho) \in S_k \times S_\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\rho) X_{\sigma\tau 1}, \dots, X_{\sigma\tau k} Y X_{\sigma\rho(k+1)}, \dots, X_{\sigma\rho(k+\ell)} \\
&\quad = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma k} Y X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)} = A_{k,\ell}(\underline{X}, Y).
\end{aligned}$$

□

Definition: Für $\ell \geq 1$ sei

$$\begin{aligned}
P_{k,\ell}(\underline{X}, Y) &= \sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\tau) A_{k+1}(X_{\tau 1}, \dots, X_{\tau k}, Y) X_{\tau(k+1)} \cdots X_{\tau(k+\ell)}, \\
Q_{k,\ell}(\underline{X}, Y) &= \sum_{\tau \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\tau) A_{k+1}(X_{\tau 1}, \dots, X_{\tau k}, (Y X_{\tau(k+1)})) X_{\tau(k+2)} \cdots X_{\tau(k+\ell)}.
\end{aligned}$$

Lemma 4.4. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_{k,\ell}(\underline{X}, Y) &= k! \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} A_{i,k+\ell-i}(\underline{X}, Y), \\
Q_{k,\ell}(\underline{X}, Y) &= k! \sum_{i=0}^{k} A_{i,k+\ell-i}(\underline{X}, Y).
\end{aligned}$$

Beweis: Da P und Q alternierend in den X_i und multilinear in allen Variablen sind, lassen sie sich als Linearkombination der $A_{i,k+\ell-i}$ darstellen. Dabei sind die Koeffizienten für $i > k$ offensichtlich 0.

Im folgenden ist σ die Permutation aus der Definition von A_{k+1} und τ die aus der Definition von P bzw. Q. Die Position, an der Y steht, ist durch $\sigma(k+1)$ bestimmt. Ist $0 \leq i \leq k$ vorgegeben, so gibt es also $k!$ Möglichkeiten für σ.

Für die Berechnung der übrigen Koeffizienten genügt es, die Koeffizienten der Monome $X_1 \cdots X_i Y X_{i+1} \cdots X_{k+\ell}$ zu betrachten.

Für P ist dann $\tau = (i+1, \ldots, k) \circ \sigma^{-1}$, der jeweilige Koeffizient also $(-1)^{k-i} k!$.

Für Q ist $\tau = \sigma^{-1}$, der jeweilige Koeffizient also $k!$. □

Wir benötigen nun noch folgenden Satz von Amitsur und Levitzki [1]. Ein schöner Beweis findet sich in [6].

Satz 4.5. (Amitsur-Levitzki) Für $x_1, \ldots, x_{2d} \in M_d$ gilt die Identität

$$A_{2d}(\underline{x}) = 0.$$

Korollar 4.6. Nach Bemerkung 1.1 gilt auch für $n \geq 2d$ und $x_1, \ldots, x_n \in M_d$ die Identität

$$A_n(\underline{x}) = 0.$$

Satz 4.7. Sei $d \geq 2$ und $n = 4d - 4$ und $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{gl}_d$. Dann gilt die Identität

$$L_n(\underline{x}, y) = 0.$$

Beweis: Nach Lemma 4.3 und Korollar 4.6 ist $A_{k,\ell}(\underline{x}, y)$ gleich 0, wenn k oder ℓ größer oder gleich $2d$ ist.

Da nach Lemma 4.2 die Koeffizienten $a_{2d-3,2d-1}$ und $a_{2d-1,2d-3}$ beide gleich 0 sind, ist $L_n(\underline{x}, y)$ also ein Vielfaches von $A_{2d-2,2d-2}$. Es genügt also, $A_{2d-2,2d-2}(\underline{x}, y) = 0$ zu zeigen.

Wegen $A_{k,4d-4-k}(\underline{x}, y) = 0$ für $k \leq 2d - 4$ gilt nach Lemma 4.4

$$P_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y) = (2d-1)!(A_{2d-3,2d-1}(\underline{x}, y) - A_{2d-2,2d-2}(\underline{x}, y) + A_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y)),$$
$$Q_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y) = (2d-1)!(A_{2d-3,2d-1}(\underline{x}, y) + A_{2d-2,2d-2}(\underline{x}, y) + A_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y)),$$

also

$$A_{2d-2,2d-2}(\underline{x}, y) = \frac{1}{2(2d-1)!}(Q_{2d-1,2d-3} - P_{2d-1,2d-3})(\underline{x}, y).$$

(Für die Definition von $P_{2d-1,2d-3}$ und $Q_{2d-1,2d-3}$ ist $d \geq 2$ notwendig.)

Nach der Definition von P und Q und Satz 4.5 ist

$$P_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y) = Q_{2d-1,2d-3}(\underline{x}, y) = 0,$$

also auch

$$A_{2d-2,2d-2}(\underline{x}, y) = 0.$$

□

Bemerkung 4.8. Da gl_1 abelsch ist, gilt hier die Identität $L_1(x, y) = 0$.

Kapitel 5

Minimalität der Standard-Lie-Identität für gl_d

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß die in Satz 4.7 angegebene Identität minimalen Grad hat.

Hierzu betrachten wir folgende Matrizen $x_i, y \in \mathrm{gl}_d$: Für $1 \leq i \leq d-2$ sei

$$\begin{aligned} y &= e_{1,1}, & x_{4i} &= e_{1,i+2}, \\ x_1 &= e_{1,1}, & x_{4i+1} &= e_{i+2,1}, \\ x_2 &= e_{1,2}, & x_{4i+2} &= e_{2,i+2}, \\ x_3 &= e_{2,1}, & x_{4i+3} &= e_{i+2,2}. \end{aligned}$$

Dies sind also die Matrizen mit dem Eintrag 1 an genau einer der im folgenden mit $*$ gekennzeichneten Stellen, und allen anderen Einträgen 0.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & 0 & * & \cdots & * \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen wird gezeigt, daß $e_2^t L_{4d-5}(\underline{x}, y) e_2 = (-1)^{d+1} \frac{2}{3}(2d-3)! d^2$ gilt.

5.1 Reduktion auf assoziative Monome

Lemma 5.1. Für $d \geq 3$ gilt:

$$L_{4d-5}(\underline{x}, y) = 4(-1)^d \binom{2d-3}{d-2} A_{2d-4,2d-1}(\underline{x}, y).$$

Beweis: Wenn k oder l größer oder gleich $2d$ ist, ist $A_{k,l}(\underline{x}, y)$ nach Lemma 4.3 und Korollar 4.6 gleich 0. Nach Gleichung (4.1) gilt daher:

$$L_{4d-5}(\underline{x}, y) = \sum_{k=2d-4}^{2d-1} a_{k,4d-5-k} A_{k,4d-5-k}(\underline{x}, y).$$

Aus dem gleichen Grund ist nach Lemma 4.4

$$\begin{aligned} P_{2d-1,2d-4}(\underline{x},y) &= -(2d-1)! \sum_{k=2d-4}^{2d-1} (-1)^k A_{k,4d-5-k}(\underline{x},y), \\ Q_{2d-1,2d-4}(\underline{x},y) &= \quad (2d-1)! \sum_{k=2d-4}^{2d-1} A_{k,4d-5-k}(\underline{x},y). \end{aligned}$$

Nach der Definition von P und Q und Satz 4.5 gilt $P_{2d-1,2d-4}(\underline{x},y) = 0$ und $Q_{2d-1,2d-4}(\underline{x},y) = 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} (2d-1)!(A_{2d-4,2d-1} + A_{2d-2,2d-3})(\underline{x},y) &= \frac{1}{2}(Q_{2d-1,2d-4} - P_{2d-1,2d-4})(\underline{x},y) = 0, \\ (2d-1)!(A_{2d-3,2d-2} + A_{2d-1,2d-4})(\underline{x},y) &= \frac{1}{2}(Q_{2d-1,2d-4} + P_{2d-1,2d-4})(\underline{x},y) = 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A_{2d-2,2d-3}(\underline{x},y) &= -A_{2d-4,2d-1}(\underline{x},y), \\ A_{2d-3,2d-1}(\underline{x},y) &= -A_{2d-1,2d-4}(\underline{x},y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da die x_i und y Matrizen der Form $e_{i,j}$ sind, gilt dies auch für ihr Produkt in einer beliebigen Reihenfolge, sofern es nicht verschwindet. Da alle Zahlen zwischen 1 und d genauso oft als Zeilenindex wie als Spaltenindex auftreten, ist das Produkt darüberhinaus eine Diagonalmatrix. Also ist auch $A_{k,4d-5-k}(\underline{x},y)$ eine Diagonalmatrix.

Es gilt $y^t = y, x_1^t = x_1$ und $x_{2i}^t = x_{2i+1}$ für $1 \le i \le 2d-3$. Sei

$$\begin{aligned} \rho &= (2\ 3)\cdots(4d-6, 4d-5) \\ \tau &= (1, 4d-5)(2, 4d-6)\cdots(2d-3, 2d-1). \end{aligned}$$

Dann gilt $x_{\rho i} = x_i^t$ und $\tau i = 4d-4-i$ für alle i, sowie $\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{2d-3} = \mathrm{sgn}(\tau)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} A_{k,4d-5-k}(\underline{x},y) &= (A_{k,4d-5-k}(\underline{x},y))^t \\ &= \Big(\sum_{\sigma \in S_{4d-5}} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma k} y x_{\sigma(k+1)} \cdots x_{\sigma(4d-5)}\Big)^t \\ &= \sum_{\sigma \in S_{4d-5}} \mathrm{sgn}(\sigma) x^t_{\sigma(4d-5)} \cdots x^t_{\sigma(k+1)} y^t x^t_{\sigma k} \cdots x^t_{\sigma 1} \\ &= \sum_{\rho\sigma\tau \in S_{4d-5}} \mathrm{sgn}(\rho\sigma\tau) x^t_{\rho\sigma\tau(4d-5)} \cdots x^t_{\rho\sigma\tau(k+1)} y x^t_{\rho\sigma\tau k} \cdots x^t_{\rho\sigma\tau 1} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{4d-5}} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(4d-5-k)} y x_{\sigma(4d-4-k)} \cdots x_{\sigma(4d-5)} \\ &= A_{4d-5-k,k}(\underline{x},y). \end{aligned}$$

Daher ist nach Lemma 4.2 und (5.1)

$$\begin{aligned}
L_n(\underline{x}, y) &= (-1)^{d-2}\binom{2d-3}{d-2} A_{2d-4,2d-1}(\underline{x}, y) + (-1)^{d-1}\binom{2d-3}{d-2} \underbrace{A_{2d-3,2d-2}}_{=-A_{2d-1,2d-4}}(\underline{x}, y) \\
&+ (-1)^{d-1}\binom{2d-3}{d-1} \underbrace{A_{2d-2,2d-3}}_{=-A_{2d-4,2d-1}}(\underline{x}, y) + (-1)^{d}\binom{2d-3}{d-1} \underbrace{A_{2d-1,2d-4}}_{=A_{2d-4,2d-1}}(\underline{x}, y) \\
&= 4(-1)^d\binom{2d-3}{d-2} A_{2d-4,2d-1}(\underline{x}, y).
\end{aligned}$$

□

5.2 Reduktion auf Folgen der Ziffern 1 und 2

Wir betrachten nur solche σ mit $x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2d-4)} y x_{\sigma(2d-3)}\cdots x_{\sigma(4d-5)} = e_{2,2}$. Sei

$$s_i^\sigma = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = 0, \\ \text{der Spaltenindex von } x_{\sigma i} & \text{falls } 1 \le i \le 2d-4, \\ 1 & \text{falls } i = 2d-3, \\ \text{der Spaltenindex von } x_{\sigma(i-1)} & \text{falls } 2d-2 \le i \le 4d-4. \end{cases}$$

Insbesondere ist $s_{2d-4}^\sigma = 1$ und $s_{4d-4}^\sigma = 2$.

Mit s^σ wird die Folge $s_0^\sigma, \ldots, s_{4d-4}^\sigma$ bezeichnet. Da die x_i paarweise verschieden sind, ist σ durch s^σ eindeutig bestimmt. Wir untersuchen nun, wie $\operatorname{sgn}(\sigma)$ von s^σ abhängt.

Sei

$$\begin{aligned}
U_\sigma &= \{i | s_{i-1}^\sigma = 1, s_{i+1}^\sigma = 1, 3 \le s_i^\sigma \le d\}, \\
O_\sigma &= \{i | s_{i-1}^\sigma = 2, s_{i+1}^\sigma = 2, 3 \le s_i^\sigma \le d\}, \\
S_\sigma &= \{i | s_{i-1}^\sigma = 1, s_{i+1}^\sigma = 2, 3 \le s_i^\sigma \le d\}, \\
F_\sigma &= \{i | s_{i-1}^\sigma = 2, s_{i+1}^\sigma = 1, 3 \le s_i^\sigma \le d\},
\end{aligned}$$

$$f_\sigma = |F_\sigma|,$$

$$\begin{aligned}
E_\sigma &= \{i | s_i^\sigma = 1\}, \\
Z_\sigma &= \{i | s_i^\sigma = 2\}.
\end{aligned}$$

Für $M_\sigma \in \{U_\sigma, O_\sigma, S_\sigma, F_\sigma\}$ sei weiter $s_M^\sigma = \{s_i^\sigma | i \in M_\sigma\}$, das heißt s_U^σ ist die Menge der Indizes $3 \le i \le d$, für die in s^σ irgendwo $\ldots, 1, i, 1, \ldots$ auftaucht. Entsprechend taucht für $i \in s_O^\sigma, i \in s_S^\sigma$ oder $i \in s_F^\sigma$ irgendwo $2, i, 2$, bzw. $1, i, 2$, bzw. $2, i, 1$ auf.

Bemerkung 5.2.

- Da für jedes $3 \le a \le d$ die Matrizen $e_{1,a}, e_{2,a}, e_{a,1}$ und $e_{a,2}$ jeweils genau einmal vorkommen, gilt offenbar $s_U^\sigma = s_O^\sigma$ und $s_S^\sigma = s_F^\sigma$.
- Aus dem selben Grund ist $\{3, \ldots, d\}$ die disjunkte Vereinigung von s_U^σ und s_F^σ.
- Desweiteren sind $O_\sigma, U_\sigma, S_\sigma$ und F_σ durch E_σ und Z_σ eindeutig bestimmt.

Lemma 5.3. Es gibt $(d-2)!f_\sigma!(d-2-f_\sigma)!$ verschiedene τ mit $E_\sigma = E_\tau$ und $Z_\sigma = Z_\tau$.

Beweis: Da s_F^τ eine beliebige f_σ-elementige Teilmenge von $\{3,\dots,d\}$ ist, gibt es hierfür $\binom{d-2}{f_\sigma}$ Möglichkeiten.

Die Abbildung $M \to s_M^\tau, i \mapsto s_i^\tau$ ist für $M = U_\tau, M = O_\tau, M = S_\tau$ und $M = F_\tau$ jeweils bijektiv, daher gibt es je $|M|!$ Möglichkeiten, diese Abbildung zu wählen. Wegen $|U_\tau| = |O_\tau| = d-2-f_\sigma$ und $|S_\tau| = |F_\tau| = f_\sigma$ ergeben sich also insgesamt

$$\binom{d-2}{f_\sigma} f_\sigma!f_\sigma!(d-2-f_\sigma)!(d-2-f_\sigma)! = (d-2)!f_\sigma!(d-2-f_\sigma)$$

Möglichkeiten für τ. □

Definition: Zu gegebenem σ sei $\rho_\sigma \in S_3$ die eindeutig bestimmte Permutation mit

$$\sigma^{-1}\rho_\sigma 1 < \sigma^{-1}\rho_\sigma 2 < \sigma^{-1}\rho_\sigma 3.$$

Die Permutation ρ_σ gibt also an, in welcher Reihenfolge die Ziffern $1, 2$ und 3 in $\sigma 1, \dots, \sigma(4d-5)$ auftreten.

Proposition 5.4. Es gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{f_\sigma}\,\mathrm{sgn}(\rho_\sigma)$.

Beweis: Wir nennen eine Folge t relevant, wenn es ein σ gibt, mit $t = s^\sigma$. Zunächst geben wir eine solche relevante Folge s^σ an, und berechnen das Vorzeichen der dazu gehörenden Permutation σ. Anschließend zeigen wir, daß man daraus durch gewisse Operationen schrittweise jede andere relevante Folge erhalten kann, und wie sich das Vorzeichen der entsprechenden Permutation dabei verhält.

Sei

$$s^\sigma = 2, 3, 1, 4, 1\,, 5\,, 1, \ \dots\ , 1\ ,\ d\ ,\ 1, 1, 1, 2\,, 1, 3\,, 2\,,\ 4\,,\ 2\,,\ 5\,,\ 2, \dots, 2, d, 2.$$

Das dazu gehörende Monom in $A_{2d-4,2d-1}$ ist

$$x_6x_5x_8x_9x_{12}x_{13}\cdots x_{4d-8}x_{4d-7}y\,x_1x_2x_3x_4x_7x_{10}x_{11}x_{14}x_{15}\cdots x_{4d-6}x_{4d-5}.$$

Behauptung: Für die entsprechende Permutation σ gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.
Begründung: Für $d = 3$ ist das Monom $x_6x_5yx_1x_2x_3x_4x_7$, es gibt neun Fehlstände, das Vorzeichen ist also $(-1)^9 = -1$.
Sei $d > 3$ und die Behauptung gelte für $d-1$. Für diesen Schritt müssen die Matrizen $x_{4d-8}, x_{4d-7}, x_{4d-6}$ und x_{4d-5} eingefügt werden. Für x_{4d-6} und x_{4d-5} kommen keine weiteren, für x_{4d-8} und x_{4d-7} kommen jeweils $2d-3$ Fehlstände hinzu, das Vorzeichen bleibt also gleich.

Andererseits ist offenbar ρ_σ die Identität und $f_\sigma = 1$. (Es gilt $F_\sigma = \{1\}$ und $s_F^\sigma = \{3\}$.) Für diese Folge gilt also die Aussage der Proposition.

In der folgenden Tabelle geben wir nun einige Möglichkeiten an, eine relevante Folge durch eine andere zu ersetzen, sowie jeweils, wie sich $\mathrm{sgn}(\sigma)$, $\mathrm{sgn}(\rho_\sigma)$ und f_σ dabei ändern. Dabei stehen a, b, c, d für Ziffern ≥ 3, die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Folgt die Ziffer 1 zweimal direkt aufeinander, so steht an dieser Stelle die Matrix x_1, da die Position von y sowieso nicht verändert werden kann (da wir ein Monom aus $A_{2d-4,2d-1}$ berechnen, steht y an der $(2d-3)$-ten Stelle). Bei der letzten Ersetzung werden wir verwenden, daß sie auch dann gültig ist, wenn die durch „|“ getrennten Abschnitte in einer anderen Reihenfolge auftreten.

Man kann jede relevante Folge schrittweise durch wiederholte Anwendung dieser Ersetzungen in die oben genannte überführen. Welche Ersetzungen man für diese Schritte genau benötigt, wird weiter unten beschrieben. Man geht in folgenden

ersetze	durch	Änderung $\mathrm{sgn}(\sigma)$	Änderung $\mathrm{sgn}(\rho_\sigma)$	Änderung $(-1)^{f_\sigma}$
$\ldots, 1, 1, a, 1, \ldots$	$\ldots, 1, a, 1, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 1, a, 2, 1, \ldots$	$\ldots, 1, a, 2, 1, 1, \ldots$	-1	-1	1
$\ldots, 1, 1, a, 2, b, 1, \ldots$	$\ldots, 1, a, 2, b, 1, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 2, a, 1, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, a, 1, \ldots$	-1	-1	1
$\ldots, 1, 2, a, 1, b, 1, \ldots$	$\ldots, 1, b, 1, 2, a, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 2, a, 1, b, 2, \ldots$	$\ldots, 1, b, 2, a, 1, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 2, a, 2, \ldots, 1, b, 1, c, 2, \ldots$	$\ldots, 1, b, 1, 2, \ldots, 1, c, 2, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, 1, a, 1, \ldots, 1, b, 2, c, 2, \ldots$	$\ldots, 2, c, 2, 1, \ldots, 1, a, 1, b, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, 1, a, 2, b, 1, \ldots$	$\ldots, 2, b, 1, a, 2, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, 1, a, 2, b, 2, \ldots$	$\ldots, 2, b, 2, 1, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 2, b, 1, \ldots, 1, c, 1, d, 2, \ldots$	$\ldots, 2, b, 1, c, 1, \ldots, 1, d, 2, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 1, b, 2, \ldots, 1, c, 2, d, 2, \ldots$	$\ldots, 1, b, 2, d, 2, \ldots, 1, a, 1, c, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 1, a, 2, b, 1, \ldots$	$\ldots, 2, a, 2, b, 1, a, 1, \ldots$	-1	1	-1
$\ldots, 1, a, 2, a, 1, b, 2, \ldots$	$\ldots, 1, a, 1, b, 2, a, 2, \ldots$	-1	1	-1
$\ldots, 1, 1, 2, \ldots, 1, a, 2, \ldots$	$\ldots, 1, a, 2, \ldots, 1, 1, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1, a, 1, \ldots$	$\ldots, 1, a, 1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, 1, 1, \ldots, 2, a, 1, \ldots$	$\ldots, 2, a, 1, \ldots, 2, 1, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, 1, 2, \ldots, 2, a, 2, \ldots$	$\ldots, 2, a, 2, \ldots, 2, 1, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 1, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, a, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 2, b, 1, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, a, 2, b, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 1, 2, \ldots, 1, b, 2, c, 2, \ldots$	$\ldots, 1, 2, c, 2, \ldots, 1, a, 1, b, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 2, b, 1, 2, \ldots$	$\ldots, 1, 2, b, 1, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 1, b, 2, 1, \ldots$	$\ldots, 2, 1, b, 2, a, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 2, 1, \ldots, 1, b, 1, c, 2, \ldots$	$\ldots, 2, 1, b, 1, \ldots, 1, c, 2, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, 1, a, 2, 1, 2, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, 1, a, 2, \ldots$	-1	-1	1
$\ldots, 1, 2, a, 1, 1, b, 2, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, 1, b, 2, a, 1, \ldots$	-1	-1	1
$\ldots, 1, 2, 1, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, 1, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 2, 1, 1, 2, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, 1, a, 2, \ldots$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 2, 1, 2, b, 1, 1, \ldots$	$\ldots, 1, 1, 2, 1, a, 2, b, 1, \ldots$	-1	-1	1
$\ldots, 1, a, 1, \ldots, 1, b, 1, \ldots$	$\ldots, 1, b, 1, \ldots, 1, a, 1$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 2, \ldots, 1, b, 2, \ldots$	$\ldots, 1, b, 2, \ldots, 1, a, 2$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 1, \ldots, 2, b, 1, \ldots$	$\ldots, 2, b, 1, \ldots, 2, a, 1$	1	1	1
$\ldots, 2, a, 2, \ldots, 2, b, 2, \ldots$	$\ldots, 2, b, 2, \ldots, 2, a, 2$	1	1	1
$\ldots, 1, a, 1, \ldots \mid \ldots, 2, a, 2, \ldots \mid$ $\ldots, 1, b, 2, \ldots \mid \ldots, 2, b, 1, \ldots$	$\ldots, 1, b, 1, \ldots \mid \ldots, 2, b, 2, \ldots \mid$ $\ldots, 1, a, 2, \ldots \mid \ldots, 2, a, 1, \ldots$	1	1	1

Schritten vor:

1. Schritt: Da y an der $(2d-3)$-ten Stelle steht, befinden sich links von y entweder keine oder genau zwei der Matrizen x_1, x_2, x_3. Stehen links von y zwei dieser Matrizen, so verändert man die Folge zunächst so, daß diese beiden Matrizen direkt nebeneinander stehen.

2. Schritt: Als nächstes wendet man eine derartige Ersetzung an, daß danach die drei Matrizen x_1, x_2 und x_3 rechts von y stehen.

3. Schritt: Nun bringt man diese drei Matrizen an die gewünschte Position und in die gewünschte Reihenfolge x_1, x_2, x_3.

4. Schritt: Als nächstes sorgt man dafür, daß die Ziffern 1 und 2 an den richtigen Positionen stehen.

5. Schritt: Abschließend bringt man die Ziffern ≥ 3 an die richtigen Stellen.

Dabei kann man bei den ersten drei Schritten o. B. d. A.davon ausgehen, daß rechts jede benötigte Teilfolge, in der die Ziffern 1 und 2 nicht direkt nebeneinander stehen, hinreichend oft auftaucht: Ist dies nämlich nicht der Fall, so kann man die Folge unter Hinzunahme weiterer Ziffern entsprechend verlängern, und in den letzten beiden Schritten diesen zusätzlichen Teil wieder genau in die ursprüngliche Form bringen.

In den einzelnen Schritten geht man folgendermaßen vor:

1. Schritt: Stehen links von y zwei der Matrizen x_1, x_2, x_3, so versucht man die linke dieser beiden solange mittels den Ersetzungen aus dem ersten Block nach rechts zu verschieben, bis beide Matrizen direkt nebeneinander stehen. Ist dies nicht möglich, da die Folge die Form $\ldots, 1, 1, a, 2, b, 2, \ldots$ hat, so muß man entweder die erste Ersetzung aus dem zweiten Block oder die achte Ersetzung aus dem ersten Block, allerdings in der anderen Richtung, so oft anwenden, bis man die dritte bzw. die zweite Ersetzung aus dem ersten Block anwenden kann.

2. Schritt: Hierfür genügt eine Ersetzung aus dem dritten Block.

3. Schritt: Mit den Ersetzungen aus dem viertem Block bringt man die Matrizen x_1, x_2, x_3 möglichst weit nach links. Ist keine dieser Ersetzungen anwendbar, so benötigt man eine der ersten beiden Ersetzungen aus dem zweiten Block.

Nun kann man mit einer der Ersetzungen aus dem fünften Block diese drei Matrizen in die gewünschte Reihenfolge bringen.

4. Schritt: Um die Ziffern 1 und 2 nun an die gewünschten Positionen zu bringen, muß man zwei möglichst lange Teilfolgen derart erreichen, daß in der linken die Ziffer 2 und in der rechten die Ziffer 1 nicht auftritt. Hierzu muß man möglichst oft die dritte oder vierte Ersetzung aus dem zweiten Block anwenden. Damit dies möglich ist, bringt man mittels der ersten beiden Ersetzungen aus dem zweiten Block die Ziffern 1 jeweils möglichst weit nach links, und benutzt dann eine der Ersetzungen aus dem letzten Block.

Wurde in einem der bisherigen Schritte die Folge wie oben beschrieben verlängert, so muß man eventuell die Ersetzungen aus dem zweiten Block auch in der anderen Richtung anwenden.

5. Schritt: Um abschließend noch die Ziffern ≥ 3 an die gewünschten Positionen zu bringen, genügen die Ersetzungen aus dem letzten Block. $\square$

Aus der Folge s^σ erhält man eine Folge $\underline{a} = a_0, a_1, \ldots \in \{1,2\}^{2d+1}$, indem man s^σ von links nach rechts durchläuft, und nur die Ziffern 1 und 2 notiert. In dieser Folge $\underline{a}$ kennzeichne man die Positionen, an denen die Matrizen y, x_1, x_2, x_3 standen durch ein Quadrupel (i,j,k,l). Es gelte also

$$\begin{array}{cccc} a_{i-1} = 1, & a_{j-1} = 1, & a_{k-1} = 1, & a_{l-1} = 2, \\ a_i = 1, & a_j = 1, & a_k = 2, & a_l = 1. \end{array}$$

Offenbar lassen sich aus $\underline{a}$ und diesem Quadrupel sowohl f_σ als auch ρ_σ rekonstruieren. Sei A die Menge aller Paare von Folgen und Quadrupeln, die man auf diese Weise erhalten kann. Mit der eben bewiesenen Proposition und dem vorangegangenen Lemma erhalten wir das Ergebnis:

$$e_2^t A_{2d-4,2d-1} e_2 = \sum_A (-1)^{f_\sigma} \operatorname{sgn}(\rho_\sigma)(d-2)! f_\sigma! (d-2-f_\sigma)!$$

5.3 Einige Aussagen über Folgen der Ziffern 1 und 2

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie viele verschiedene Folgen der Ziffern 1 und 2 es gibt, die man so, wie am Ende des vorigen Abschnitts beschrieben, erhalten kann.

Definition: Eine Folge $\underline{a} = a_0, \ldots, a_n$ mit $a_i \in \{1,2\}$ heißt an der Stelle $0 < i \leq n$ *fallend*, wenn $a_{i-1} = 2$ und $a_i = 1$.

Weiter sei $f_{\underline{a}}$ die Anzahl der i, so daß $\underline{a}$ an der Stelle i fallend ist und $e_{\underline{a}}$ die Anzahl der i mit $a_i = 1$.

Lemma 5.5. Für natürliche Zahlen n, e, f und $\alpha, \beta \in \{1,2\}$ gibt es genau

$$\binom{e-1}{e-f-2+\alpha}\binom{n-e}{n-e-f+2-\beta}$$

Folgen $\underline{a} \in \{1,2\}^{n+1}$ mit $e_{\underline{a}} = e, f_{\underline{a}} = f, a_0 = \alpha$ und $a_n = \beta$.

Beweis: Sei $K_1 := \{1, \ldots, e-1\}$ und $K_2 := \{1, \ldots, n-e\}$. Weiter sei

$$\begin{aligned} u &= e - f - 2 + \alpha, \\ o &= n - e - f + 2 - \beta, \end{aligned}$$

und U eine u-elementige Teilmenge von K_1, sowie O eine o-elementige Teilmenge von K_2. Offenbar gibt es genau $\binom{e-1}{e-f-2+\alpha}$ Möglichkeiten für U und $\binom{n-e}{n-e-f+2-\beta}$ Möglichkeiten für O.

Andererseits läßt sich aus diesen Daten genau eine Folge $\underline{a}$ mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren, wobei u die Anzahl der i mit $a_{i-1} = a_i = 1$ und o die Anzahl der i mit $a_{i-1} = a_i = 2$ ist. Dazu geht man wie folgt vor:

$$a_0 = \alpha,$$

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_{i-1} = 1 \text{ und } b_i \in U, \\ 2 & \text{falls } a_{i-1} = 1 \text{ und } b_i \in K_1 \setminus U \text{ oder } b_i = e, \\ 2 & \text{falls } a_{i-1} = 2 \text{ und } c_i \in O, \\ 1 & \text{falls } a_{i-1} = 2 \text{ und } c_i \in K_2 \setminus O \text{ oder } c_i = n-e+1, \end{cases}$$

wobei b_i und c_i die Anzahl der $0 \leq j \leq i-1$ mit $a_j = 1$ bzw. $a_j = 2$ ist. □

Wir interessieren uns nun für Folgen mit ausgezeichneten Stellen, an denen das Verhalten vorgegeben ist. Hierfür benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 5.6. Sei $k \geq 0, j_i \geq -1$ für $0 \leq i \leq k, j = \sum_{i=0}^{k} j_i$ und $n \geq j$. Dann gilt:

$$\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_k=n \\ n_i \geq j_i}} \binom{n_0}{n_0 - j_0} \cdots \binom{n_k}{n_k - j_k} = \binom{n+k}{n-j}.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 5.5

Lemma 5.7. Für natürliche Zahlen n, k, e, f und $\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_k \in \{1, 2\}$ gibt es genau

$$\binom{e-1}{e-f+a-k-1}\binom{n-e+k}{n-e-f+b}\binom{f-c+k}{k}$$

Folgen $\underline{a} \in \{1,2\}^{n+k+1}$ mit

- k ausgezeichneten Stellen $0 \leq n_1 < \cdots < n_k < n+k$,
- f fallenden Stellen, die nicht ausgezeichnet sind,
- $e_{\underline{a}} = e$,
- $a_{n_i - 1} = \beta_{i-1}, a_{n_i} = \alpha_i$ für $1 \leq i \leq k$,
- $a_0 = \alpha_0, a_{n+k} = \beta_k$,

wobei $a = |A|, b = |B|$ und $c = |A \cap B|$ ist, mit $A = \{i | \alpha_i = 2\}$ und $B = \{i | \beta_i = 1\}$.

Beweis: Zu einer solchen Folge $\underline{a}$ sei $m_i = n_{i+1} - n_i - 1$ für $0 \leq i \leq k$, wobei $n_0 = 0$ und $n_{k+1} = n+k+1$ sei. Wir definieren die Folgen $\underline{b}^i \in \{1,2\}^{m_i+1}$ durch $b_j^i = a_{j+n_i}$. Dann ist $b_0^i = \alpha_i$ und $b_{m_i}^i = \beta_i$.

Weiter sei $e_i = e_{\underline{b}^i}$ und $f_i = f_{\underline{b}^i}$. Dann ist $e = e_0 + \cdots + e_k$ und $f = f_0 + \cdots + f_k$, sowie $m_0 + \cdots + m_k = n$.

Offenbar ist $\beta_0 + \cdots + \beta_k = 2(k+1) - b$ und $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = k + 1 + a$.

Nach Lemma 5.5 gibt es

$$\binom{e_i - 1}{e_i - f_i - 2 + \alpha_i}\binom{m_i - e_i}{m_i - e_i - f_i + 2 - \beta_i}$$

Möglichkeiten für $\underline{b}^i$. Für $\underline{a}$ gibt es daher

$$\sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f \\ e_0+\cdots+e_k=e \\ m_0+\cdots+m_k=n \\ e_i, f_i, m_i \geq 0}} \binom{e_0 - 1}{e_0 - 1 - (f_0 + 1 - \alpha_0)} \cdots \binom{e_k - 1}{e_k - 1 - (f_k + 1 - \alpha_k)} \binom{m_0 - e_0}{m_0 - e_0 - (f_0 - 2 + \beta_0)} \cdots \binom{m_k - e_k}{m_k - e_k - (f_k - 2 + \beta_k)}$$

Möglichkeiten. Wegen $\binom{\cdot}{-1} = 0$ kann zusätzlich $e_i - 1 \geq f_i + 1 - \alpha_i$ sowie $m_i - e_i \geq f_i - 2 + \beta_i$ gefordert werden.

Ist $f_i = 0$ für $i \in A \cap B$, so erhält man den Term $\binom{e_i-1}{e_i}\binom{m_i-e_i}{m_i-e_i+1}$, der nur für $m_i = -1$ von 0 verschieden ist. Daher kann man als weitere Bedingung $f_i \geq 1$ falls $i \in A \cap B$ einfügen.

Für $\underline{a}$ gibt es also

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f\\ e_0+\cdots+e_k=e\\ m_0+\cdots+m_k=n\\ e_i-1\geq f_i+1-\alpha_i\\ m_i-e_i\geq f_i-2+\beta_i\\ f_i\geq 1 \text{ falls } i\in A\cap B}} \binom{e_0-1}{e_0-1-(f_0+1-\alpha_0)}\cdots\binom{e_k-1}{e_k-1-(f_k+1-\alpha_k)} \\
&\qquad\qquad \binom{m_0-e_0}{m_0-e_0-(f_0-2+\beta_0)}\cdots\binom{m_k-e_k}{m_k-e_k-(f_k-2+\beta_k)} \\
&= \sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f\\ e_0+\cdots+e_k=e\\ e_i-1\geq f_i+1-\alpha_i\\ f_i\geq 1 \text{ falls } i\in A\cap B}} \binom{e_0-1}{e_0-1-(f_0+1-\alpha_0)}\cdots\binom{e_k-1}{e_k-1-(f_k+1-\alpha_k)}\binom{n-e+k}{n-e-(f-b)} \\
&= \binom{n-e+k}{n-e-f+b} \sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f\\ e_0+\cdots+e_k=e\\ e_i-1\geq f_i+1-\alpha_i\\ f_i\geq 1 \text{ falls } i\in A\cap B}} \binom{e_0-1}{e_0-1-(f_0+1-\alpha_0)}\cdots\binom{e_k-1}{e_k-1-(f_k+1-\alpha_k)} \\
&= \binom{n-e+k}{n-e-f+b} \sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f\\ f_i\geq 1 \text{ falls } i\in A\cap B}} \binom{e-(k+1)+k}{e-(k+1)-(f+(k+1)-(k+1+a))} \\
&= \binom{e-1}{e-f+a-k-1}\binom{n-e+k}{n-e-f+b} \sum_{\substack{f_0+\cdots+f_k=f\\ f_i\geq 1 \text{ falls } i\in A\cap B}} 1 \\
&= \binom{e-1}{e-f+a-k-1}\binom{n-e+k}{n-e-f+b} \sum_{f_0+\cdots+f_k=f-c} 1 \\
&= \binom{e-1}{e-f+a-k-1}\binom{n-e+k}{n-e-f+b}\binom{f-c+k}{k}
\end{aligned}$$

Möglichkeiten, wobei im ersten, dritten und letzten Schritt Lemma 5.6 angewendet wurde (im letzten Schritt für $j_i = 0$). □

5.4 Zusammensetzen der bisherigen Ergebnisse

Wir setzen nun die Ergebnisse der letzten drei Abschnitte zu einer Formel für den Koeffizienten in der zweiten Zeile und Spalte von $L_{4d-5}(\underline{x}, y)$ zusammen. Dazu genügt es nach Lemma 5.1, diesen Koeffizienten von $A_{2d-4,2d-1}(\underline{x}, y)$ zu berechnen.

Wir betrachten nur solche σ mit $x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2d-4)}\, y\, x_{\sigma(2d-3)}\cdots x_{\sigma(4d-5)} = e_{2,2}$. Für die beiden Produkte $x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2d-4)}$ und $x_{\sigma(2d-3)}\cdots x_{\sigma(4d-5)}$ betrachten wir jeweils die Folge der Indizes, die gleich 1 oder gleich 2 sind, mit ausgezeichneten Stellen bei x_1, x_2 und x_3.

Um hierfür die Möglichkeiten zu zählen, werden wir Lemma 5.7 benutzen.

In der folgenden Tabelle sind, für das Produkt $x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2d-4)}$ der Matrizen links von y, die jeweiligen Werte für $n, k, \alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_k, a, b$ und c angegeben.

Zeile	Reihenfolge von y, x_1, x_2 und x_3	$\mathrm{sgn}(\rho)$	n	k	α_0	β_0	α_1	β_1	α_2	β_2	a	b	c
1	y, x_1, x_2, x_3	$+$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
2	y, x_1, x_3, x_2	$-$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
3	y, x_2, x_1, x_3	$-$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
4	y, x_2, x_3, x_1	$+$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
5	y, x_3, x_1, x_2	$+$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
6	y, x_3, x_2, x_1	$-$	$d-2$	0	2	1					1	1	1
7	x_1, x_2, y, x_3	$+$	$d-3$	2	2	1	1	1	2	1	2	3	2
8	x_2, x_1, y, x_3	$-$	$d-3$	2	2	1	2	1	1	1	2	3	2
9	x_1, x_3, y, x_2	$-$	$d-3$	2	2	1	1	2	1	1	1	2	1
10	x_3, x_1, y, x_2	$+$	$d-3$	2	2	2	1	1	1	1	1	2	0
11	x_2, x_3, y, x_1	$+$	$d-3$	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1
12	x_3, x_2, y, x_1	$-$	$d-3$	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1

Dabei ist k die Anzahl der Matrizen x_1, x_2, x_3, die in diesem Produkt vorkommen. Da jede nicht ausgezeichnete Stelle zwei der übrigen Matrizen entspricht, ist $2n+k = 2d-4$.

Wegen $x_{\sigma 1} \cdots x_{\sigma(2d-4)} y x_{\sigma(2d-3)} \cdots x_{\sigma(4d-5)} = e_{2,2}$ ist $\alpha_0 = 2$. Wegen $y = e_{1,1}$ ist $\beta_k = 1$.

Die übrigen α und β ergeben sich aus der Reihenfolge der Matrizen x_1, x_2 und x_3. Beispielsweise gibt die siebte Zeile die Werte zur Berechnung der Anzahl entsprechender Folgen der Ziffern 1 und 2 an, die sich an den ausgezeichneten Stellen folgendermaßen verhalten:

$$\begin{array}{rl} \text{Folge:} & 2, \dots, 1, 1, \dots, 1, 2, \dots, 1 \\ \text{entsprechendes Produkt:} & \cdots \underbrace{x_1}_{=e_{1,1}} \cdots \underbrace{x_2}_{=e_{1,2}} \cdots \underbrace{y}_{=e_{1,1}} \end{array}$$

Wie man aus den α und β die Werte für a, b und c erhält, ist in Lemma 5.7 angegeben. Setzt man die in der Tabelle angegebenen Werte in den dort angegebenen Term ein, so erhält man für jede Zeile einen Term, der von d, e und f abhängt. Diese Terme bezeichnen wir mit $L_1, \dots, L_{12}$.

Die entsprechende Tabelle für das Produkt rechts von y ist:

Zeile	n	k	α_0	β_0	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	a	b	c
1	$d-2$	3	1	1	1	1	2	2	1	2	1	2	0
2	$d-2$	3	1	1	1	2	1	1	2	2	1	2	0
3	$d-2$	3	1	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1
4	$d-2$	3	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	0
5	$d-2$	3	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	0
6	$d-2$	3	1	2	1	1	2	1	1	2	1	2	1
7	$d-1$	1	1	2	1	2					0	0	0
8	$d-1$	1	1	2	1	2					0	0	0
9	$d-1$	1	1	1	2	2					1	1	0
10	$d-1$	1	1	1	2	2					1	1	0
11	$d-1$	1	1	1	1	2					0	1	0
12	$d-1$	1	1	1	1	2					0	1	0

Die Terme, die man mit Lemma 5.7 aus dieser Tabelle erhält, bezeichnen wir mit $R_1, \dots, R_{12}$.

Im folgenden sind jeweils e_L und f_L die Werte, die man in die Terme L_i für e und f einsetzen muß, und e_R und f_R sind die entsprechenden Werte für die Terme R_i.

Da die Ziffer 1 insgesamt $d+1$ mal als Spaltenindex auftritt, muß die Gleichung $e_L + e_R = d+1$ erfüllt sein, ansonsten sind die Werte für e und f sind beliebig.

Der gesuchte Koeffizient von $L_{4d-5}(\underline{x}, y)$ ist dann

$$e_2^t L_{4d-5} e_2 = \overbrace{4(-1)^d \binom{2d-3}{d-1}}^{\text{Lemma 5.1}} \sum_{f_L \geq 0} \sum_{f_R \geq 0} \overbrace{(d-2)!(f_L+f_R)!(d-2-f_L-f_R)!}^{\text{Lemma 5.3}}$$

$$\sum_{e_L+e_R=d+1} \sum_{i=1}^{12} \underbrace{(-1)^{f_L+f_R} \operatorname{sgn}(\rho_i)}_{\text{Proposition 5.4}} L_i R_i.$$

Da n, k, a, b, c in den jeweiligen Zeilen übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_2, & R_1 &= R_2, & \operatorname{sgn}(\rho_1) &= -\operatorname{sgn}(\rho_2),\\
L_3 &= L_6, & R_3 &= R_6, & \operatorname{sgn}(\rho_3) &= \operatorname{sgn}(\rho_6) = -1,\\
L_3 &= L_4, & & & &\\
L_4 &= L_5, & R_4 &= R_5, & \operatorname{sgn}(\rho_4) &= \operatorname{sgn}(\rho_5) = +1,\\
L_7 &= L_8, & R_7 &= R_8, & \operatorname{sgn}(\rho_7) &= -\operatorname{sgn}(\rho_8),\\
& & R_9 &= R_{10}, & \operatorname{sgn}(\rho_9) &= -\operatorname{sgn}(\rho_{10}) = -1,\\
L_{11} &= L_{12}, & R_{11} &= R_{12}, & \operatorname{sgn}(\rho_{11}) &= -\operatorname{sgn}(\rho_{12}).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} \operatorname{sgn}(\rho_i) L_i R_i &= -2L_3R_3 + 2L_4R_4 - L_9R_9 + L_{10}R_{10}\\
&= 2L_3(R_4 - R_3) + (L_{10} - L_9)R_9.
\end{aligned}$$

Wegen $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ ist

$$\begin{aligned}
R_4 - R_3 &= \binom{e_R - 1}{e_R - f_R + 1 - 3 - 1}\binom{d - 2 - e_R + 3}{d - 2 - e_R - f_R + 2} \\
&\quad \left(\binom{f_R - 0 + 3}{3} - \binom{f_R - 1 + 3}{3}\right) \\
&= \binom{e_R - 1}{e_R - f_R - 3}\binom{d - e_R + 1}{d - e_R - f_R}\binom{f_R + 2}{2} \\
L_{10} - L_9 &= \binom{e_L - 1}{e_L - f_L + 1 - 2 - 1}\binom{d - 3 - e_L + 2}{d - 3 - e_L - f_L + 2} \\
&\quad \left(\binom{f_L - 0 + 2}{2} - \binom{f_L - 1 + 2}{2}\right) \\
&= \binom{e_L - 1}{e_L - f_L - 2}\binom{d - e_L - 1}{d - e_L - f_L - 1}\binom{f_L + 1}{1}
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} \operatorname{sgn}(\rho_i) L_i R_i &= 2\binom{e_L - 1}{e_L - f_L + 1 - 0 - 1}\binom{d - 2 - e_L + 0}{d - 2 - e_L - f_L + 1}\binom{f_L - 1 + 0}{0} \\
&\quad \binom{e_R - 1}{e_R - f_R - 3}\binom{d - e_R + 1}{d - e_R - f_R}\binom{f_R + 2}{2} \\
&\quad + \binom{e_L - 1}{e_L - f_L - 2}\binom{d - e_L - 1}{d - e_L - f_L - 1}\binom{f_L + 1}{1} \\
&\quad \binom{e_R - 1}{e_R - f_R + 1 - 1 - 1}\binom{d - 1 - e_R + 1}{d - 1 - e_R - f_R + 1}\binom{f_R - 0 + 1}{1} \\
&= 2\binom{e_L - 1}{e_L - f_L}\binom{d - e_L - 2}{d - e_L - f_L - 1}\binom{e_R - 1}{e_R - f_R - 3}\binom{d - e_R + 1}{d - e_R - f_R}\binom{f_R + 2}{2} \\
&\quad + \binom{e_L - 1}{e_L - f_L - 2}\binom{d - e_L - 1}{d - e_L - f_L - 1}(f_L + 1)\binom{e_R - 1}{e_R - f_R - 1}\binom{d - e_R}{d - e_R - f_R}(f_R + 1)
\end{aligned}$$

Ersetzt man im ersten Summanden e_L durch e und e_R durch $d + 1 - e$, sowie f_L durch f und f_R durch g, im zweiten Summanden e_R durch e und e_L durch $d+1-e$, sowie f_R durch f und f_L durch g, so erhält man

$$\begin{aligned}
e_2^t L_{4d-5} e_2 = 4(-1)^d \binom{2d-3}{d-1} \sum_{e_L + e_R = d+1} \sum_{f_L = 0}^{e_L} \sum_{f_R = 0}^{e_R} (d-2)!(f_L + f_R)!(d - 2 - f_L - f_R)! \\
(-1)^{f_L + f_R} \sum_{i=1}^{12} \operatorname{sgn}(\rho_i) L_i R_i
\end{aligned}$$

$$= 4(-1)^d \binom{2d-3}{d-1} \sum_{e=0}^{d+1} \sum_{f=0}^{e} \sum_{g=0}^{d+1-e} (d-2)!(f+g)!(d-2-f-g)!(-1)^{f+g}$$
$$2\binom{e-1}{e-f}\binom{d-e-2}{d-e-f-1}\binom{d-e}{d-e-g-2}\binom{e}{e-g-1}\binom{g+2}{2}$$
$$+\sum_{f=0}^{e} \sum_{g=0}^{d+1-e} (d-2)!(f+g)!(d-2-f-g)!(-1)^{f+g}$$
$$\binom{d-e}{d-e-g-1}\binom{e-2}{e-g-2}(g+1)\binom{e-1}{e-f-1}\binom{d-e}{d-e-f}(f+1)$$

$$= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=1}^{d} \quad \sum_{f=-1}^{e-1} \sum_{g=1}^{d+2-e} \frac{(-1)^{f+g}}{\binom{d-2}{f+g}} \binom{e-1}{e-f-1}\binom{d-e-2}{d-e-f-2}$$
$$\binom{d-e}{d-e-g-1}\binom{e}{e-g} g(g+1)$$
$$+\sum_{f=0}^{e} \sum_{g=0}^{d+1-e} \frac{(-1)^{f+g}}{\binom{d-2}{f+g}} \binom{d-e}{d-e-g-1}\binom{e-2}{e-g-2}(g+1)$$
$$\binom{e-1}{e-f-1}\binom{d-e}{d-e-f}(f+1).$$

Für $e = 1, e = d-1$ oder $e = d$ sind die beiden Summanden nur in folgenden Fällen von 0 verschieden:

	e	g	f
1. Summand	1	1	0
2. Summand	$d-1$	0	0 oder 1

Außerdem sind für $g = d+1-e$ oder $g = d-e$ beide Summanden 0.

Für $k > 0$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ und daher ist $\binom{d-e-2}{d-e-f-2} = \binom{d-e}{d-e-f}\frac{d-e-f-1}{d-e-1}\frac{d-e-f}{d-e}$ und $\binom{e-2}{e-g-2} = \binom{e}{e-g}\frac{e-g}{g}\frac{e-g-1}{e-1}$ für $2 \leq e \leq d-2$.

Daher gilt:

$$e_2^t L_{4d-5} e_2 = 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \quad \sum_{f=0}^{e-1} \sum_{g=0}^{d-e-1} \frac{(-1)^{f+g}}{\binom{d-2}{f+g}} \binom{e-1}{e-f-1}$$
$$\binom{d-e}{d-e-f} \frac{d-e-f-1}{d-e-1} \frac{d-e-f}{d-e}$$
$$\binom{d-e}{d-e-g-1} \binom{e}{e-g} g(g+1)$$
$$+ \sum_{f=0}^{e-1} \sum_{g=0}^{d-e-1} \frac{(-1)^{f+g}}{\binom{d-2}{f+g}} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f}$$
$$\binom{d-e}{d-e-g-1} (g+1)(f+1)$$
$$\binom{e}{e-g} \frac{e-g}{e} \frac{e-g-1}{e-1}$$
$$\underbrace{-4(-1)^d(2d-3)!}_{\text{Erster Summand für } e=1, f=0, g=1}$$
$$\underbrace{+4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1}}_{\text{Zweiter Summand für } e=d-1, g=0, f=0} \qquad \underbrace{-8(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1}}_{\text{Zweiter Summand für } e=d-1, g=0, f=1}$$

$$= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \sum_{f=0}^{e-1} \sum_{g=0}^{d-e-1} \frac{(-1)^{f+g}}{\binom{d-2}{f+g}} \binom{d-e}{d-e-g-1} (g+1)$$
$$\binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f} \binom{e}{e-g}$$
$$\left(\frac{d-e-f-1}{d-e-1} \frac{d-e-f}{d-e} g + \frac{e-g}{e} \frac{e-g-1}{e-1} (f+1)\right)$$
$$- 4(-1)^d(2d-3)! \frac{d}{d-1}.$$

Es gilt
$\frac{\binom{d-e}{d-e-g-1}(g+1)}{\binom{d-2}{f+g}} = \frac{\binom{d-e}{g+1}(g+1)}{\binom{d-2}{f+g}} = \frac{(d-e)!(d-2-f-g)!(f+g)!}{(d-e-g-1)!g!(d-2)!} = \binom{f+g}{g}\binom{d-2-f-g}{e-f-1}\frac{(d-e)!f!(e-f-1)!}{(d-2)!}$
und daher

$$e_2^t L_{4d-5} e_2 = 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \sum_{f=0}^{e-1} \sum_{g=0}^{d-e-1} (-1)^{f+g} \binom{f+g}{g} \underbrace{\binom{d-2-f-g}{e-f-1}}_{=0 \text{ für } d-e-1<g(\leq e)}$$
$$\frac{(d-e)!f!(e-f-1)!}{(d-2)!} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f} \qquad \underbrace{\binom{e}{g}}_{=0 \text{ für } e<g(\leq d-e-1)}$$
$$\left(\frac{d-e-f-1}{d-e-1} \frac{d-e-f}{d-e} g + \frac{e-g}{e} \frac{e-g-1}{e-1} (f+1)\right) - 4(-1)^d(2d-3)! \frac{d}{d-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \sum_{f=0}^{e-1} (-1)^f \frac{(d-e)!f!}{(d-2)!} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f} \\
&\qquad \sum_{g=0}^{e} (-1)^g \binom{f+g}{g} \binom{e}{g} \\
&\underbrace{\binom{d-2-f-g}{e-f-1} (e-f-1)! \Big(\frac{d-e-f-1}{d-e-1} \frac{d-e-f}{d-e} g + \frac{e-g}{e} \frac{e-g-1}{e-1} (f+1) \Big)}_{\substack{= \frac{f+1}{e(e-1)}(-g)^{e-f+1} + \left(\left((e-f-1)(d-2-f) - \binom{e-f-1}{2} \right) \frac{f+1}{e(e-1)} - \frac{(d-e-f-1)(d-e-f)}{(d-e-1)(d-e)} + \frac{f+1}{e} + \frac{f+1}{e-1} \right) (-g)^{e-f} \\ + \text{ Terme von kleinerem Grad in } g}} \\
&\qquad - 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}.
\end{aligned}
$$

Lemma 5.8. Für natürliche Zahlen a, b, c gilt

$$
\sum_{i=0}^{b} (-1)^i \binom{a+i}{i} \binom{b}{i} i^c = \begin{cases} 0 & \text{falls } a+c < b, \\ (-1)^b \frac{b!}{a!} & \text{falls } a+c = b, \\ (-1)^b \frac{b!}{a!} \left(\binom{a+1}{2} + \binom{b+1}{2} \right) & \text{falls } a+c = b+1. \end{cases}
$$

Beweis: Siehe Abschnitt 5.5

Damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
e_2^t L_{4d-5} e_2 = 4(-1)^d &\frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \sum_{f=0}^{e-1} (-1)^f \frac{(d-e)!f!}{(d-2)!} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f} \\
&(-1)^e \frac{e!}{f!} \left(\left(\left(\binom{f+1}{2} + \binom{e+1}{2} \right) \right) \frac{f+1}{e(e-1)} (-1)^{e-f+1} \right. \\
&+ \left(\left((e-f-1)(d-2-f) - \binom{e-f-1}{2} \right) \right) \frac{f+1}{e(e-1)} \\
&\left. - \frac{(d-e-f-1)(d-e-f)}{(d-e-1)(d-e)} + \frac{f+1}{e} + \frac{f+1}{e-1} \right) (-1)^{e-f} \Big) \\
&\qquad - 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \frac{(d-e)!e!}{(d-2)!} \sum_{f=0}^{e-1} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f} \\
&\Big(\frac{\left(-\binom{f+1}{2} - \binom{e+1}{2} + (e-f-1)(d-2-f) - \binom{e-f-1}{2} + e - 1 + e \right)(f+1)}{e(e-1)} \\
&\qquad - \frac{(d-e-f-1)(d-e-f)}{(d-e-1)(d-e)} \Big) - 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}
\end{aligned}
$$

$$= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \frac{(d-e)!e!}{(d-2)!} \sum_{f=0}^{e-1} \binom{e-1}{e-f-1} \binom{d-e}{d-e-f}$$
$$\left(\left(\frac{1-d}{e(e-1)} - \frac{1}{(d-e-1)(d-e)}\right) f^2\right.$$
$$+ \left(\frac{1-d-e^2+e+de-d}{e(e-1)} + \frac{1}{d-e-1} + \frac{1}{d-e}\right) f + \left(\frac{-e^2+e+de-d}{e(e-1)} - 1\right)\Bigg)$$
$$- 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}$$

$$= 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \frac{(d-e)!e!}{(d-2)!} \sum_{f=0}^{e-1} \binom{e-1}{f} \binom{d-e}{f}$$
$$\left(\left(\frac{1-d}{e(e-1)} - \frac{1}{(d-e-1)(d-e)}\right) f^2 + \left(\frac{1+e-e^2+de-2d}{e(e-1)} + \frac{1}{d-e-1} + \frac{1}{d-e}\right) f\right.$$
$$+ \left(\frac{d-e}{e} - 1\right)\Bigg) - 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}.$$

Lemma 5.9. Für natürliche Zahlen a, b gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} = \binom{a+b}{a}$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} i = \begin{cases} 0 & \text{falls } a=0 \text{ oder } b=0 \\ \frac{ab}{a+b}\binom{a+b}{a} & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} i^2 = \begin{cases} 0 & \text{falls } a=0 \text{ oder } b=0 \\ \frac{a^2b^2}{(a+b)(a+b-1)}\binom{a+b}{a} & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis: Siehe Abschnitt 5.5

Damit erhält man:

$$e_2^t L_{4d-5} e_2 = 4(-1)^d \frac{(2d-3)!}{d-1} \sum_{e=2}^{d-2} \frac{(d-e)!e!}{(d-2)!} \binom{d-1}{e-1}$$
$$\left(\left(\frac{1-d}{e(e-1)} - \frac{1}{(d-e-1)(d-e)}\right) \frac{(e-1)^2(d-e)^2}{(d-1)(d-2)}\right.$$
$$+ \left(\frac{1+e-e^2+de-2d}{e(e-1)} + \frac{1}{d-e-1} + \frac{1}{d-e}\right) \frac{(e-1)(d-e)}{d-1}$$
$$\left. + \frac{d-e}{e} - 1\right) - 4(-1)^d (2d-3)! \frac{d}{d-1}$$

$$= 4(-1)^d(2d-3)!\sum_{e=2}^{d-2} e\Bigg(\bigg(\frac{1-d}{e(e-1)} - \frac{1}{(d-e-1)(d-e)}\bigg)\frac{(e-1)^2(d-e)^2}{(d-1)(d-2)}$$
$$+\bigg(\frac{1+e-e^2+de-2d}{e(e-1)} + \frac{1}{d-e-1} + \frac{1}{d-e}\bigg)\frac{(e-1)(d-e)}{d-1} + \frac{d-e}{e} - 1\Bigg)$$
$$- 4(-1)^d(2d-3)!\frac{d}{d-1}$$

$$= 4(-1)^d(2d-3)!\sum_{e=2}^{d-2}\frac{-2e^3+4de^2+(-2d^2-d)e+d^2}{(d-1)(d-2)} - 4(-1)^d(2d-3)!\frac{d}{d-1}$$

$$= \frac{4(-1)^d(2d-3)!}{(d-1)(d-2)}\Bigg(-2\bigg(\frac{(d-2)^2(d-1)^2}{4} - 1\bigg) + 4d\bigg(\frac{(d-2)(d-1)(2d-3)}{6} - 1\bigg)$$
$$- d(2d+1)\bigg(\frac{(d-2)(d-1)}{2} - 1\bigg) + d^2(d-3)\Bigg) - 4(-1)^d(2d-3)!\frac{d}{d-1}$$
$$= (-1)^{d+1}\frac{2}{3}(2d-3)!d^2,$$

wobei im vorletzten Schritt

$$\sum_{i=1}^n 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

verwendet wurde.

Damit erhalten wir nun das Ergebnis:

Satz 5.10. Für $d \geq 3$ gilt mit den angegebenen $y, x_i \in \mathrm{gl}_d$:

$$e_2^t L_{4d-5}(\underline{x}, y)e_2 = (-1)^{d+1}\frac{2}{3}(2d-3)!d^2.$$

Insbesondere gilt für beliebiges d die Identität $L_n(\underline{x}, y) = 0$ nicht für $n \leq 4d-5$.

Beweis: Für $d = 1$ ist nichts zu zeigen.

Für $d = 2$ ist

$$L_n(\underline{x}, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für $d \geq 3$ fehlt nur noch der Beweis der Lemmata 5.6, 5.8 und 5.9. □

Korollar 5.11. Das minimale n, so daß die Identität $L_n(\underline{x}, y) = 0$ in sl_d gilt, ist $n = 4d-4$.

Beweis: Daß die Identität für $n = 4d-4$ gilt, folgt wegen $\mathrm{sl}_d \subset \mathrm{gl}_d$ aus Satz 4.7.

Um zu zeigen, daß sie nicht für $n = 4d-5$ gilt, sei $\pi : \mathrm{gl}_d \to \mathrm{sl}_d, x \mapsto x - \frac{\mathrm{tr}(x)}{d}$.

Für $x, y \in \mathrm{gl}_d$ gilt dann $[\pi(x), \pi(y)] = [\pi(x), y] = [x, y]$.

Sind $\underline{x}, y \in \mathrm{gl}_d$ mit $L_{4d-5}(\underline{x}, y) \neq 0$, so folgt $L_{4d-5}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_{4d-5}), \pi(y)) \neq 0$. □

5.5 Beweise der Lemmata über Binomialkoeffizienten

Beweis von Lemma 5.6: Zunächst sei $j_0 = \cdots = j_k = -1$. Dann ist die Behauptung

$$\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq -1}} \binom{n_0}{n_0+1}\cdots\binom{n_k}{n_k+1} = \binom{n+k}{n+k+1}.$$

Für $n = -k-1$ steht auf beiden Seiten 1, sonst steht auf beiden Seiten 0.

Sei nun o. B. d. A. $j_0 \geq 0$. Hierfür verwenden wir Induktion über n. Für $n = j$ steht auf beiden Seiten 1. Sei nun $n > j$ und die Behauptung gelte für $n-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_0+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq j_i}} \binom{n_0}{n_0-j_0}\cdots\binom{n_k}{n_k-j_k}\\
&= \sum_{\substack{n_0+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq j_i}} \binom{n_0-1}{n_0-j_0-1}\binom{n_1}{n_1-j_1}\cdots\binom{n_k}{n_k-j_k}\\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{n_0+\cdots+n_k=n\\ n_i\geq j_i}} \binom{n_0-1}{n_0-j_0}\binom{n_1}{n_1-j_1}\cdots\binom{n_k}{n_k-j_k}\\
&= \sum_{\substack{n_0\geq j_0-1\\ n_0+\cdots+n_k=n-1}} \binom{n_0}{n_0-j_0}\binom{n_1}{n_1-j_1}\cdots\binom{n_k}{n_k-j_k} + \sum_{\substack{n_0\geq j_0-1\\ n_0+\cdots+n_k=n-1}} \binom{n_0}{n_0-j_0+1}\binom{n_1}{j_1}\cdots\binom{n_k}{j_k}\\
&\qquad\qquad = \binom{n-1+k}{n-1-j} + \binom{n-1+k}{n-1-(j-1)} = \binom{n+k}{n-j}.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 5.8: Für $b = 0$ sind nur die drei Fälle

$$\begin{aligned}
a = 0 &\text{ und } c = 0,\\
a = 0 &\text{ und } c = 1,\\
a = 1 &\text{ und } c = 0
\end{aligned}$$

zu überprüfen.

Für $a = 0, c = 0$ und $b > 0$ gilt $\sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i} = (1-1)^b = 0$.

Für $a = 0$ und $c > 0$ verwenden wir Induktion über b. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i}i^c &= \sum_{i=1}^{b}(-1)^i\binom{b-1}{i-1}\frac{b}{i}i^c = -b\sum_{i=0}^{b-1}(-1)^i\binom{b-1}{i}(i+1)^{c-1}\\
&= -b\sum_{i=0}^{b-1}(-1)^i\binom{b-1}{i}(i^{c-1} + (c-1)i^{c-2} + \text{ Terme von kleinerem Grad in } i)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } c < b,\\ -b(-1)^{b-1}(b-1)! = (-1)^b b! & \text{falls } c = b,\\ -b((-1)^{b-1}(b-1)!\binom{b}{2} + (c-1)(-1)^{b-1}(b-1)!) & \\ \qquad\qquad = (-1)^b b!\binom{b+1}{2} & \text{falls } c = b+1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Für $a > 0, b > 0$ und $c = 0$ verwenden wir die Aussage für $a = 0, b > 0, c > 0$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a+i}{i}\binom{b}{i} &= \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i}\binom{a+i}{a} \\
&= \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i}\frac{1}{a!}\Big(i^a + \binom{a+1}{2}i^{a-1} + \text{ Terme von kleinerem Grad in } i\Big) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } a < b, \\ (-1)^b\frac{b!}{a!} & \text{falls } a = b, \\ \frac{1}{a!}\big((-1)^b b!\binom{b+1}{2} + \binom{a+1}{2}(-1)^b b!\big) & \text{falls } a = b+1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sei nun $a, b, c > 0$ und die Behauptung gelte für $a-1$, für $b-1$ und für $c-1$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a+i}{i}\binom{b}{i}i^c &= \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a+i-1}{i-1}\binom{b}{i}i^c + \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a+i-1}{i}\binom{b}{i}i^c \\
&= \sum_{i=1}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i-1}\binom{b-1}{i-1}\frac{b}{i}i^c + \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i}\binom{b}{i}i^c \\
&= b\sum_{i=1}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i-1}\binom{b-1}{i-1}i^{c-1} + \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i}\binom{b}{i}i^c \\
&= -b\sum_{i=0}^{b-1}(-1)^i\binom{a+i}{i}\binom{b-1}{i}(i+1)^{c-1} + \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i}\binom{b}{i}i^c \\
&= -b\sum_{i=0}^{b-1}(-1)^i\binom{a+i}{i}\binom{b-1}{i}\big(i^{c-1} + (c-1)i^{c-2} \\
&\qquad + \text{ Terme von kleinerem Grad in } i\big) + \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{a-1+i}{i}\binom{b}{i}i^c
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{falls } a+c < b, \\ -b(-1)^{b-1}\frac{(b-1)!}{a!} = (-1)^b\frac{b!}{a!} & \text{falls } a+c = b, \\ -b\big(\frac{(-1)^{b-1}(b-1)!}{a!}\big(\binom{a+1}{2} + \binom{b}{2}\big) + \frac{(c-1)(-1)^{b-1}(b-1)!}{a!}\big) + \frac{(-1)^b b!}{(a-1)!} & \\ \qquad = (-1)^b\frac{b!}{a!}\big(\binom{a+1}{2} + \binom{b}{2} + b - a + a\big) & \text{falls } a+c = b+1. \end{cases}
$$

$\square$

Beweis von Lemma 5.9:

(a) Für $a = 0$ ist die Behauptung erfüllt. Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} &= \sum_{i=0}^{a} \binom{a-1}{i-1}\binom{b}{i} + \sum_{i=0}^{a} \binom{a-1}{i}\binom{b}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{a} \binom{a-1}{i-1} \sum_{k=0}^{b-1} \binom{k}{i-1} + \binom{a-1+b}{a-1} \\
&= \sum_{k=0}^{b-1} \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i}\binom{k}{i} + \binom{a-1+b}{a-1} \\
&= \sum_{k=0}^{b-1} \binom{a-1+k}{a-1} + \binom{a-1+b}{a-1} \\
&= \binom{a-1+b}{a} + \binom{a-1+b}{a-1} = \binom{a+b}{a}.
\end{aligned}$$

(b) Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Behauptung erfüllt. Für $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} i &= \sum_{i=1}^{a} \binom{a-1}{i-1}\binom{b-1}{i-1} \frac{b}{i} i + \sum_{i=1}^{a} \binom{a-1}{i}\binom{b}{i} i \\
&= b \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i}\binom{b-1}{i} + \sum_{i=0}^{a} \binom{a-1}{i}\binom{b}{i} i \\
&= b\binom{a+b-2}{a-1} + \frac{(a-1)b}{a-1+b}\binom{a-1+b}{a-1} \\
&= b\binom{a+b-2}{a-1} + b\binom{a+b-2}{a-2} \\
&= b\binom{a+b-1}{a-1} = \frac{ab}{a+b}\binom{a+b}{a}.
\end{aligned}$$

(c) Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Behauptung erfüllt. Für $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{i} i^2 = \sum_{i=1}^{a} \frac{a}{i}\binom{a-1}{i-1} \frac{b}{i}\binom{b-1}{i-1} i^2 &= ab \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i}\binom{b-1}{i} \\
&= ab\binom{a-1+b-1}{a-1} = ab\frac{a}{a+b-1}\binom{a+b-1}{a} \\
&= \frac{a^2 b}{a+b-1}\binom{a+b-1}{b-1} = \frac{a^2 b^2}{(a+b-1)(a+b)}\binom{a+b}{b}.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Standard-Lie-Identität für $\mathrm{sp}_{2\ell}$

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln gesehen haben, daß der minimale Grad, in dem die Standard-Lie-Identität in sl_d gilt, $4d-4$ ist, wäre es nun wünschenswert, auch für die anderen klassischen einfachen Lie-Algebren zu wissen, in welchem Grad diese Identität gilt. In diesem Kapitel soll dies zunächst für $\mathrm{sp}_{2\ell}$ geklärt werden.

Wegen $\mathrm{sp}_{2\ell} \subset \mathrm{gl}_{2\ell}$ gilt auch in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ die Standard-Lie-Identität im Grad $8\ell-4$. Da der Beweis von Satz 4.7 im Wesentlichen auf der assoziativen Standardidentität beruht, und diese nach Satz 3.2 in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ nicht in kleinerem Grad als in $\mathrm{gl}_{2\ell}$ gilt, kann man mit dieser Methode kein stärkeres Ergebnis als $L_{8\ell-4}$ erwarten. Dies ist aber nicht optimal, im folgenden soll gezeigt werden, daß für $\ell \geq 2$ in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ bereits die Identität $L_{8\ell-8}$ gilt.

Zunächst benötigen wir eine Methode, wie man aus gewissen Polynomen in einer Variablen multilineare Polynome in mehreren, nicht kommutierenden Variablen erhält.

Definition: Für ein Monom $M \in K\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ der Form $M(X_1, \ldots, X_\ell) = X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ und $0 \leq i \leq \ell$ sei

$$\big\langle M(X_1, \ldots, X_\ell) \big\rangle_i = \begin{cases} M(X_1, \ldots, X_\ell) & \text{falls } i = i_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das konstante Polynom $1 \in K\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ sei $\big\langle 1 \big\rangle_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Diese Definition sei linear auf alle Polynome fortgesetzt.

Bemerkung 6.1. Für jedes Polynom $P \in K\{X_1, \ldots, X_\ell\}$ gilt

$$P(X_1, \ldots, X_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell} \big\langle P(X_1, \ldots, X_\ell) \big\rangle_i.$$

Lemma 6.2. Für $\ell > k \geq 0$ und nicht kommutierende Variablen $X_1, \ldots, X_\ell$ gilt:

$$\sum_{J \subset \{1, \ldots, \ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k = 0.$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über k. Für $k = 0$ gilt

$$\sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k = \sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0,$$

die Behauptung ist also erfüllt. Sei nun $k > 0$ und die Behauptung gelte für $k-1$. Wir werden die Induktionsvoraussetzung einmal für $k-1$ und $\ell - 1$ anwenden, und einmal für $k-1$ und ℓ. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k \\
&\quad = \sum_{i=0}^{\ell} \Big\langle \sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k \Big\rangle_i \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\ell} \Big\langle \sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k \Big\rangle_i + \underbrace{\Big\langle \sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k \Big\rangle_0}_{=0, \text{ da } k>0} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\ell} \Big\langle \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,\ell\} \\ i \in J}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k \Big\rangle_i \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{\ell} \Big\langle \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,\ell\} \\ i \notin J}} (-1)^{|J|} (X_i + \sum_{j \in J} X_j)^k \Big\rangle_i \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{\ell} X_i \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,\ell\} \\ i \notin J}} (-1)^{|J|} (X_i + \sum_{j \in J} X_j)^{k-1} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\ell} X_i \Big(\sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,\ell\} \\ i \in J}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^{k-1} + \underbrace{\sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,\ell\} \\ i \notin J}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^{k-1}}_{=0 \text{ nach Induktionsvoraussetzung}} \Big) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\ell} X_i \underbrace{\sum_{J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^{k-1}}_{=0 \text{ nach Induktionsvoraussetzung}} .
\end{aligned}$$

□

Lemma 6.3. Für $k \geq 1$ und nicht kommutierende Variablen $X_1, \dots, X_k$ gilt:

$$(-1)^k \sum_{J \subset \{1,\dots,k\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j)^k = \sum_{\sigma \in S_k} X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma k}.$$

Beweis: Per Induktion über k. Für $k = 1$ gilt

$$-\sum_{J \subset \{1\}} (-1)^{|J|} (\sum_{j \in J} X_j) = -(-1)^{|\emptyset|} 0 - (-1)^{|\{1\}|} X_1 = X_1.$$

Für $k > 1$ gilt

$$\sum_{\sigma\in S_k} X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma k}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} X_i \sum_{\sigma\in S_{k-1}} X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(i-1)}X_{\sigma(i+1)}\cdots X_{\sigma k}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} X_i \underbrace{(-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\}\\ i\notin J}} (-1)^{|J|}(\sum_{j\in J} X_j)^{k-1}}_{\text{nach Induktionsvoraussetzung}}$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\subsetneqq\{1,\ldots,k\}} \sum_{i\notin J} X_i(-1)^{|J|}(\sum_{j\in J} x_j)^{k-1}$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{J\subset\{1,\ldots,k\}} \big(\sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{j\in J} X_j\big)(-1)^{|J|}(\sum_{j\in J} x_j)^{k-1}$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} X_i \underbrace{\sum_{J\subset\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|J|}(\sum_{j\in J})^{k-1}}_{=0 \text{ nach Lemma 6.2}} + (-1)^k \sum_{J\subset\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|J|}(\sum_{j\in J} X_j)^k.$$

□

Wie bei Procesi [5] sei nun T der (kommutative) Polynomring über K, der von den Symbolen $\operatorname{tr}(X_{i_1}\cdots X_{i_k})$ erzeugt wird, wobei $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N$ genau dann gelte, wenn N aus M durch eine zyklische Permutation entsteht. Weiter sei $\operatorname{tr}(M+N)$ eine andere Schreibweise für $\operatorname{tr} M + \operatorname{tr} N$. Wir rechnen im folgenden in $T\{X_1,\ldots,X_n\}$.

Proposition 6.4. Sei $M \in T[X]$ ein Polynom der Form

$$M(X) = X^{i_0} \operatorname{tr} X^{i_1-i_0} \operatorname{tr} X^{i_2-i_1} \cdots \operatorname{tr} X^{\ell-i_{k-1}}.$$

Dann gilt für nicht kommutierende Variablen $X_1,\ldots,X_\ell$:

$$(-1)^\ell \sum_{J\subset\{1,\ldots,\ell\}} (-1)^{|J|} M(\sum_{j\in J} X_j)$$
$$= \sum_{\sigma\in S_\ell} X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma i_0} \operatorname{tr}(X_{\sigma(i_0+1)}\cdots X_{\sigma i_1}) \operatorname{tr}(X_{\sigma(i_1+1)}\cdots X_{\sigma i_2})\cdots$$
$$\cdots \operatorname{tr}(X_{\sigma(i_{k-1}+1)}\cdots X_{\sigma\ell}).$$

Beweis: Für einen Polynomring $R\{\underline{X}\}$ bezeichne $R_k\{\underline{X}\}$ die Menge der homogenen Polynome vom Grad k. Man betrachte die Abbildung

$$K_n\{X_1,\ldots,X_n\} \to T_{i_0}\{X_1,\ldots,X_n\}$$
$$X_1\cdots X_n \mapsto X_1\cdots X_{i_0} \operatorname{tr}(X_{i_0+1}\cdots X_{i_1})\cdots \operatorname{tr}(X_{i_{k-1}+1}\cdots X_n).$$

Mit dieser Abbildung erhält man aus Lemma 6.3 gerade die behauptete Gleichung.

□

Diese Proposition wollen wir nun anwenden, um aus dem Verschwinden eines gewissen Polynoms in einer Variablen für bestimmte Matrizen zu schließen, daß auch gewisse multilineare Polynome verschwinden. Mit dieser Methode zeigt Rowen [8] die assoziative Standard-Identität für $\mathrm{so}_{2\ell}$.

Definition: Für $1 \leq j \leq 3$ definieren wir die Polynome $P_j(X)$ durch

$$\begin{aligned} P_2(X) &= X^\ell, \\ P_3(X) &= \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \mu_k X^{\ell-k}, \\ P_1(X) &= P_2(X) + P_3(X), \end{aligned}$$

mit $\mu_0 = 1$ und $2k\mu_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \mu_{k-i} \operatorname{tr} X^i$.

Bemerkung 6.5. Für jedes $k \leq \ell$ ist der Koeffizient μ_k eine Summe von Termen der Form $\operatorname{tr} x^{i_1} \cdots \operatorname{tr} x^{i_j}$ für ein gewisses j, so daß $i_1 + \cdots + i_j = k$ gilt.

Proposition 6.6. Ist $x \in M_{2\ell}(K)$ mit $x^s = x$, so gilt $P_1(x) = 0$.

Beweis: Siehe [8]

Definition: Sei

$$\begin{aligned} T(A_1, A_2, A_3, A_4) &= A_1 A_2 A_3 A_4 + A_4 A_3 A_2 A_1, \\ U(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 - A_5 A_4 A_3 A_2 A_1. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.7. Setzt man für A_i Matritzen aus $\mathrm{sp}_{2\ell}$ ein, so gilt $T(\underline{A})^s = T(\underline{A})$ und $U(\underline{A})^s = U(\underline{A})$.

Definition: Für nicht kommutierende Variablen $A_1, \ldots, A_\ell$ bzw. $X_1, \ldots, X_n$, sowie $1 \leq j \leq 3$ sei

$$\begin{aligned} Q_j(\underline{A}) &= (-1)^\ell \sum_{I \subset \{1,\ldots,\ell\}} (-1)^{|I|} P_j(\sum_{i \in I} A_i), \\ R_j(\underline{X}, Y) &= Q_j(T(Y, X_1, X_2, X_3), \\ &\qquad T(X_4, X_5, X_6, X_7), \ldots, T(X_{4\ell-4}, X_{4\ell-3}, X_{4\ell-2}, X_{4\ell-1})), \\ \tilde{R}_j(\underline{X}, Y) &= Q_j(U(X_1, Y, X_2, X_3, X_4), \\ &\qquad T(X_5, X_6, X_7, X_8), \ldots, T(X_{4\ell-3}, X_{4\ell-2}, X_{4\ell-1}, X_{4\ell})), \\ S_j(\underline{X}, Y) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) R_j(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(4\ell-1)}, Y) X_{\sigma(4\ell)} \cdots X_{\sigma n}, \\ \tilde{S}_j(\underline{X}, Y) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \tilde{R}_j(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma(4\ell)}, Y) X_{\sigma(4\ell+1)} \cdots X_{\sigma n}. \end{aligned}$$

Bemerkung 6.8. Setzt man für X_i, Y Matritzen aus $\mathrm{sp}_{2\ell}$ ein, so folgt nach Proposition 6.6 und Bemerkung 6.7, daß $R_1(\underline{X}, Y) = 0$ und $\tilde{R}_1(\underline{X}, Y) = 0$ gilt. Daher gilt auch $S_1(\underline{X}, Y) = 0$ und $\tilde{S}_1(\underline{X}, Y) = 0$.

Lemma 6.9. Die Polynome S_3 und $\tilde{S}_3$ sind Summen von Termen, von denen jeder mindestens einen Faktor einer der drei Formen

(a) $\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(4k)}$

(b) $\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} \big(YX_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(4k-1)} + X_{\sigma 3}X_{\sigma 2}X_{\sigma 1}YX_{\sigma 4}\cdots X_{\sigma(4k-1)}\big)$

(c) $\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} YX_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(4k)}$

hat.

Beweis: Da die Spur eines Produkts invariant unter zyklischer Permutation der Faktoren ist, kann man o. B. d. A. davon ausgehen, daß Y, wenn es in der Spur auftaucht, an erster Stelle steht. Nach der Definition hat jeder Summand von P_3 wenigstens einen Faktor der Form $\operatorname{tr} X^i$. Daher hat jeder Summand von Q_3 mindestens einen Faktor der Form $\operatorname{tr}(A_{j_1}\cdots A_{j_i})$. Jeder Summand von R_3 besitzt dann einen Faktor einer der Formen

(a) $\operatorname{tr}(X_1\cdots X_{4k})$

(b) $\operatorname{tr}(YX_1X_2X_3X_4\cdots X_{4k-1} + X_3X_2X_1YX_4\cdots X_{4k-1})$

und jeder Summand von $\tilde{R}_3$ einen Faktor einer der Formen

(a) $\operatorname{tr}(X_1\cdots X_{4k})$

(b) $\operatorname{tr}(YX_1\cdots X_{4k}$.

Aus der Definition von S_3 und $\tilde{S}_3$ folgt damit die Behauptung. □

Lemma 6.10. Sei k eine beliebige natürliche Zahl.

(a) Für beliebige Matrizen $x_1,\dots,x_{2k}$ gilt: $\sum_{\sigma\in S_{2k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2k)} = 0$.

(b) Für beliebige Matrizen $x_1,\dots,x_{4k-1},y$ gilt:
$\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} \big(yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k-1)} + x_{\sigma 3}x_{\sigma 2}x_{\sigma 1}yx_{\sigma 4}\cdots x_{\sigma(4k-1)}\big) = 0$.

(c) Für $x_1,\dots,x_{4k},y\in \mathrm{sp}_{2\ell}$ oder $x_1,\dots,x_{4k},y\in \mathrm{so}_d$ gilt:
$\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k)} = 0$.

Beweis:

(a) Für $\rho = (1\,2,\dots,2k)$ gilt $\operatorname{sgn}(\rho) = -1$ und daher

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in S_{2k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2k)} &= \sum_{\sigma\in A_{2k}} \operatorname{tr} x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2k)} - \sum_{\sigma\in A_{2k}} \operatorname{tr} x_{\sigma\rho 1}\cdots x_{\sigma\rho(2k)}\\ &= \sum_{\sigma\in A_{2k}} \operatorname{tr} x_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(2k)} - \operatorname{tr} x_{\sigma 2}\cdots x_{\sigma(2k)}x_{\sigma 1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Für $\rho = (1\ 2, \ldots, 4k-1)^3$ gilt $\operatorname{sgn}(\rho) = 1$ und daher

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} x_{\sigma 3}x_{\sigma 2}x_{\sigma 1}yx_{\sigma 4}\cdots x_{\sigma(4k-1)} \\
&\qquad = \sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 4}\cdots x_{\sigma(4k-1)}x_{\sigma 3}x_{\sigma 2}x_{\sigma 1} \\
&\qquad = -\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 4}\cdots x_{\sigma(4k-1)}x_{\sigma 1}x_{\sigma 2}x_{\sigma 3} \\
&\qquad = -\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma\rho 1}\cdots x_{\sigma\rho(4k-1)} \\
&\qquad = -\sum_{\sigma\in S_{4k-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k-1)}.
\end{aligned}$$

(c) Sei zunächst $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$. Sei weiter $\rho = (1, 4k)(2, 4k-1)\cdots(2k, 2k+1)$. Dann ist $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{2k} = 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k)} &= \sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr}(yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k)})^s \\
&= \sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} x^s_{\sigma(4k)}\cdots x^s_{\sigma 1}y^s \\
&= (-1)^{4k+1} \sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} x_{\sigma(4k)}\cdots x_{\sigma 1}y \\
&= -\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma\rho 1}\cdots x_{\sigma\rho(4k)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{tr} yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k)} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{tr} yx_{\sigma 1}\cdots x_{\sigma(4k)},
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. Für $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{so}_d$ geht der Beweis analog.

□

Nach Bemerkung 6.8 gilt $S_1(\underline{x}, y) = \tilde{S}_1(\underline{x}, y) = 0$ für $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$. Nach den Lemmata 6.9 und 6.10 gilt auch $S_3(\underline{x}, y) = \tilde{S}_3(\underline{x}, y) = 0$. Wir erhalten daher:

Lemma 6.11. Für $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ gilt

$$\begin{aligned}
S_2(\underline{x}, y) &= 0, \\
\tilde{S}_2(\underline{x}, y) &= 0.
\end{aligned}$$

Andererseits sind S_2 und $\tilde{S}_2$ aber multilinear in allen Variablen und alternierend in den X_i und lassen sich daher als Linearkombination der vor Lemma 4.2 definierten Polynome $A_{i,j}$ darstellen.

Lemma 6.12. Für $n \geq 4\ell$ gilt:

(a) $S_2(X_1, \ldots, X_n, Y) = 2^{\ell-1}(\ell-1)! \sum_{0 \leq i < \ell} \big(A_{4i,n-4i}(\underline{X}, Y) - A_{4i+3,n-4i-3}(\underline{X}, Y)\big)$

(b) $\tilde{S}_2(X_1, \ldots, X_n, Y) = 2^{\ell-1}(\ell-1)! \sum_{0 \leq i < 2\ell} (-1)^i A_{2i+1,n-2i-1}(\underline{X}, Y)$

Beweis:

(a) Für $0 \leq i \leq 4\ell - 1$ und $\rho \in S_{4\ell-1}$ definieren wir die Koeffizienten $r_{i,\rho}$ durch

$$R_2(X_1, \ldots, X_{4\ell-1}, Y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 4\ell-1 \\ \rho \in S_{4\ell-1}}} r_{i,\rho} X_{\rho 1} \cdots X_{\rho i} Y X_{\rho(i+1)} \cdots X_{\rho 4\ell-1}.$$

Nach der Definition von R_2 ist $r_{i,\rho} \in \{0, 1\}$ für alle i und ρ. Dabei ist $r_{i,\rho} = 1$ genau dann, wenn für jedes $2 \leq j \leq \ell$ eine der Bedingungen

(i) $\rho(4j-4) = \rho(4j-3) - 1 = \rho(4j-2) - 2 = \rho(4j-1) - 3$
(ii) $\rho(4j-1) = \rho(4j-2) - 1 = \rho(4j-3) - 2 = \rho(4j-4) - 3$

gilt, und eine der beiden Bedingungen

(i) i ist durch 4 teilbar und es gilt

$$\rho(i+1) = 1, \qquad \rho(i+2) = 2, \qquad \rho(i+3) = 3,$$

(ii) $i + 1$ ist durch 4 teilbar und es gilt

$$\rho(i-1) = 1, \qquad \rho(i-2) = 2, \qquad \rho(i-3) = 3,$$

erfüllt ist. Dann ist $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^i$.

Zu vorgegebenem i, so daß i oder $i+1$ durch 4 teilbar ist, gibt es genau $2^{\ell-1}(\ell-1)!$ Möglichkeiten für ρ, so daß $r_{i,\rho} = 1$ ist.

Für $n \geq 4\ell$ betten wir $S_{4\ell-1}$ auf natürliche Art in S_n ein, das heißt, die Ziffern $4\ell, \ldots, n$ werden invariant gelassen. Wir setzen $r_{i,\rho} = 0$ für $\rho \in S_n \setminus S_{4\ell-1}$ und alle i. Es gilt

$$\begin{aligned}
S_2(\underline{X}, Y) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) R_2(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma 4\ell-1}, Y) X_{\sigma(4\ell)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\substack{0 \leq i \leq 4\ell-1 \\ \rho \in S_{4\ell-1}}} \operatorname{sgn}(\sigma) r_{i,\rho} X_{\sigma\rho 1} \cdots X_{\sigma\rho i} Y X_{\sigma\rho(i+1)} \cdots X_{\sigma\rho(4\ell-1)} X_{\sigma(4\ell)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i \leq 4\ell-1 \\ \rho \in S_n}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\rho^{-1}) r_{i,\rho} X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)} \cdots X_{\sigma(4\ell-1)} X_{\sigma(4\ell)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i \leq 4\ell-1 \\ \sigma \in S_n}} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)} \cdots X_{\sigma n} \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) r_{i,\rho} \\
&= \sum_{0 \leq i \leq 4\ell-1} A_{i,n-i}(\underline{X}, Y) \sum_{\rho \in S_{4\ell-1}} \operatorname{sgn}(\rho) r_{i,\rho} \\
&= \sum_{0 \leq i < \ell} 2^{\ell-1}(\ell-1)! \big(A_{4i,n-4i}(\underline{X}, Y) - A_{4i+3,n-4i-3}(\underline{X}, Y)\big).
\end{aligned}$$

(b) Für $0 \le i \le 4\ell-1$ und $\rho \in S_{4\ell-1}$ definieren wir die Koeffizienten $r_{i,\rho}$ durch

$$\tilde{R}_2(X_1,\dots,X_{4\ell-1},Y) = \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell-1\\ \rho\in S_{4\ell-1}}} r_{i,\rho} X_{\rho 1}\cdots X_{\rho i} Y X_{\rho(i+1)}\cdots X_{\rho 4\ell-1}.$$

Nach der Definition von $\tilde{R}_2$ ist $r_{i,\rho}$ von 0 verschieden, wenn i ungerade ist und für jedes $1 \le j \le \ell$ eine der Bedingungen

(i) $\rho(4j-3) = \rho(4j-2)-1 = \rho(4j-1)-2 = \rho(4j)-3$

(ii) $\rho(4j) = \rho(4j-1)-1 = \rho(4j-2)-2 = \rho(4j-3)-3$

gilt. Dann ist $\mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^{\frac{i-1}{2}}$. Zu jedem ungeraden i gibt es genau $2^{\ell-1}(\ell-1)!$ Möglichkeiten für ρ, so daß $r_{i,\rho} \ne 0$ ist.

Für $n > 4\ell$ und die natürliche Einbettung $S_{4\ell} \hookrightarrow S_n$ setzen wir $r_{i,\rho} = 0$ für $\rho \in S_n \setminus S_{4\ell-1}$ und alle i. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_2(\underline{X},Y) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\tilde{R}_2(X_{\sigma 1},\dots,X_{\sigma 4\ell},Y)X_{\sigma(4\ell+1)}\cdots X_{\sigma n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\substack{0\le i\le 4\ell\\ \rho\in S_{4\ell}}} \mathrm{sgn}(\sigma) r_{i,\rho} X_{\sigma\rho 1}\cdots X_{\sigma\rho i} Y X_{\sigma\rho(i+1)}\cdots X_{\sigma\rho(4\ell)}X_{\sigma(4\ell+1)}\cdots X_{\sigma n}\\
&= \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell\\ \rho\in S_n}}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma\rho^{-1}) r_{i,\rho} X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)}\cdots X_{\sigma(4\ell)}X_{\sigma(4\ell+1)}\cdots X_{\sigma n}\\
&= \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell\\ \sigma\in S_n}} \mathrm{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)}\cdots X_{\sigma n} \sum_{\rho\in S_n}\mathrm{sgn}(\rho) r_{i,\rho}\\
&= \sum_{0\le i\le 4\ell} A_{i,n-i}(\underline{X},Y)\sum_{\rho\in S_{4\ell}}\mathrm{sgn}(\rho) r_{i,\rho}\\
&= \sum_{0\le i<2\ell} 2^{\ell-1}(\ell-1)!(-1)^i A_{2i+1,n-2i-1}(\underline{X},Y).
\end{aligned}$$

□

Satz 6.13. Für $\ell \ge 2$ und $x_1,\dots,x_{8\ell-8},y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ gilt die Identität

$$L_{8\ell-8}(\underline{x},y) = 0.$$

Beweis: Nach Lemma 4.3 und Korollar 4.6 ist $A_{i,j}(\underline{x},y) = 0$ gleich 0, wenn i oder j größer oder gleich 4ℓ ist.

Für $P_{4\ell-1,4\ell-7}$ und $Q_{4\ell-1,4\ell-7}$ wie vor Lemma 4.4 gilt daher

$$P_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x},y) = (4\ell-1)!\sum_{i=4\ell-7}^{4\ell-1}(-1)^{i-1}A_{i,8\ell-8-i}(\underline{x},y),$$

$$Q_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x},y) = (4\ell-1)!\sum_{i=4\ell-7}^{4\ell-1}A_{i,8\ell-8-i}(\underline{x},y).$$

Sei $n = 8\ell - 8$. Wegen $\ell \geq 2$ ist $n \geq 4\ell$ und nach Lemma 6.12 gilt

$$S_2(\underline{x}, y) = 2^{\ell-1}(\ell-1)!(-A_{4\ell-5,4\ell-3}(\underline{x}, y) + A_{4\ell-4,4\ell-4}(\underline{x}, y) - A_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y)),$$
$$\tilde{S}_2(\underline{x}, y) =$$
$$2^{\ell-1}(\ell-1)!(A_{4\ell-7,4\ell-1}(\underline{x}, y) - A_{4\ell-5,4\ell-3}(\underline{x}, y) + A_{4\ell-3,4\ell-5}(\underline{x}, y) - A_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y)).$$

Nach Lemma 4.2 gilt schließlich

$$\begin{aligned}
&L_{8\ell-8}(\underline{x}, y)\\
&\quad = -\binom{4\ell-4}{2\ell-3} A_{4\ell-6,4\ell-2}(\underline{x}, y) + \binom{4\ell-4}{2\ell-2} A_{4\ell-4,4\ell-4}(\underline{x}, y)\\
&\qquad - \binom{4\ell-4}{2\ell-1} A_{4\ell-2,4\ell-6}(\underline{x}, y)\\
&\quad = \binom{4\ell-4}{2\ell-3}\left(\frac{3P_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y) - Q_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y)}{4(4\ell-1)!} + \frac{\tilde{S}_2(\underline{x}, y) - 2S_2(\underline{x}, y)}{2^\ell(\ell-1)!}\right)\\
&\qquad + \binom{4\ell-4}{2\ell-2}\left(\frac{P_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y) + Q_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y)}{4(4\ell-1)!} + \frac{2S_2(\underline{x}, y) - \tilde{S}_2(\underline{x}, y)}{2^\ell(\ell-1)!}\right).
\end{aligned}$$

Nach der Definition von P und Q und Satz 4.5 sind $P_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y) = 0$ und $Q_{4\ell-1,4\ell-7}(\underline{x}, y) = 0$. Nach Lemma 6.11 ist auch $S_2(\underline{x}, y) = 0$ und $\tilde{S}_2(\underline{x}, y) = 0$. Daher gilt auch $L_{8\ell-8}(\underline{x}, y) = 0$. $\square$

Bemerkung 6.14. In $\mathrm{sp}_2 = \mathrm{sl}_2$ gilt nach Satz 4.7 die Identität L_4.

Kapitel 7

Standard-Lie-Identität für so_d

Wie im vorangegangenen Kapitel rechnen wir auch hier in einem Polynomring über T, wobei T ein Polynomring über K in Symbolen der Form $\operatorname{tr}(X_1 \cdots X_k)$ ist.

Proposition 7.1. Sei $M \in T\{A, B\}$ ein Polynom der Form

$$M(A,B) = (AB)^{i_0} \operatorname{tr}(AB)^{i_1 - i_0} \cdots \operatorname{tr}(AB)^{\ell - i_{k-1}}.$$

Dann gilt für nicht kommutierende Variablen $A_1, \dots, A_\ell, B_1, \dots, B_\ell$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{I,J \subset \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{|I|+|J|} M(\sum_{i\in I} A_i, \sum_{j \in J} B_j) \\
&\qquad = \sum_{\sigma,\tau \in S_\ell} A_{\sigma 1} B_{\tau 1} \cdots A_{\sigma i_0} B_{\tau i_0} \operatorname{tr}(A_{\sigma(i_0+1)} B_{\tau(i_0+1)} \cdots A_{\sigma i_1} B_{\tau i_1}) \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \operatorname{tr}(A_{\sigma(i_{k-1}+1)} B_{\tau(i_{k-1}+1)} \cdots A_{\sigma \ell} B_{\tau \ell}).
\end{aligned}$$

Beweis: Mit $R_k\{\underline{X}\}$ bezeichnen wir wieder die Menge der homogenen Polynome vom Grad k in $R\{\underline{X}\}$. Durch eine Permutation $\rho \in S_k$ wird eine bijektive Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi_\rho : T_k\{\underline{X}\} &\to T_k\{\underline{X}\} \\
X_1 \cdots X_k &\mapsto X_{\rho 1} \cdots X_{\rho k}
\end{aligned}$$

induziert. Sei nun $\rho \in S_{2\ell}$ mit $\rho^{-1}(2i-1) = i$ und $\rho^{-1}(2i) = \ell + 1$ für $1 \le i \le \ell$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\varphi_\rho\Big(\sum_{\sigma,\tau\in S_\ell} A_{\sigma 1}B_{\tau 1}\cdots A_{\sigma\ell}B_{\tau\ell}\Big)\\
&\qquad = \sum_{\sigma,\tau\in S_\ell}\varphi_\rho(A_{\sigma 1}B_{\tau 1}\cdots A_{\sigma\ell}B_{\tau\ell})\\
&\qquad = \sum_{\sigma,\tau\in S_\ell} A_{\sigma 1}\cdots A_{\sigma\ell}B_{\tau 1}\cdots B_{\tau\ell}\\
&\qquad = \sum_{\sigma\in S_\ell} A_{\sigma 1}\cdots A_{\sigma\ell}\underbrace{(-1)^\ell\sum_{J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|J|}(\sum_{j\in J}B_j)^\ell}_{\text{nach Lemma 6.3}}\\
&\qquad = \underbrace{(-1)^\ell\sum_{I\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|I|}(\sum_{i\in I}A_i)^\ell}_{\text{nach Lemma 6.3}}(-1)^\ell\sum_{J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|J|}(\sum_{j\in J}B_j)^\ell\\
&\qquad = \sum_{I,J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|I|+|J|}(\sum_{i\in I}A_i)^\ell(\sum_{j\in J}B_j)^\ell\\
&\qquad = \varphi_\rho\Big(\sum_{I,J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|I|+|J|}(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}A_iB_j)^\ell,
\end{aligned}$$

also auch

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_\ell} A_{\sigma 1}B_{\tau 1}\cdots A_{\sigma\ell}B_{\tau\ell} = \sum_{I,J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|I|+|J|}(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}A_iB_j)^\ell.$$

Die Behauptung erhält man daraus analog zum Beweis von Proposition 6.4. □

Definition: Für $1 \le j \le 3$ sei P_j wie im vorangegangen Kapitel definiert. Weiter sei für nicht kommutierende Variablen A, B

$$Q_j(A,B) = P_j(AB).$$

Lemma 7.2. Seien $a, b \in \mathrm{so}_{2\ell}$ .Dann ist ab konjugiert zu einer Matrix c, mit $c^s = c$. Insbesondere gilt also $Q_1(a,b) = 0$.

Beweis: Siehe [8]

Definition: Für $1 \le k \le 3$ und nicht kommutierende Variablen $X_1, \dots X_n, Y$ und $A_1, \dots, A_\ell, B_1, \dots, B_\ell$ sei

$$\begin{aligned}
R_k(\underline{A},\underline{B}) &= \sum_{I,J\subset\{1,\dots,\ell\}}(-1)^{|I|+|J|}Q_k(\sum_{i\in I}A_i,\sum_{j\in J}B_j),\\
S_k(\underline{X},Y) &= R_k([Y,[X_1,X_2]],[X_5,X_6],\dots,[X_{4\ell-3},X_{4\ell-2}],\\
&\qquad\qquad [X_3,X_4],[X_7,X_8],\dots,[X_{4\ell-1},X_{4\ell}]),\\
T_k(\underline{X},Y) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)S_k(X_{\sigma 1},\dots,X_{\sigma(4\ell)},Y)X_{\sigma(4\ell+1)}\cdots X_{\sigma n}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 7.3. Setzt man für $X_1, \dots, X_n, Y$ Matrizen aus $\mathrm{so}_{2\ell}$ ein, so liegen auch die Kommutatoren $[Y,[X_1,X_2]]$ und $[X_{2i-1},X_{2i}]$ für $2 \le i \le \ell$ und alle Summen dieser Kommutatoren wieder in $\mathrm{so}_{2\ell}$, und nach Lemma 7.2 verschwindet dann Q_1 und daher auch R_1 und S_1, es gilt also $T_1(\underline{X},Y) = 0$.

Lemma 7.4. Das Polynom T_3 ist eine Summe von Termen, von denen jeder mindestens einen Faktor einer der Formen

(a) $\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{tr}(X_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(4k)})$

(b) $\sum_{\sigma\in S_{4k}} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{tr}(YX_{\sigma 1}\cdots X_{\sigma(4k)})$

hat.

Beweis: Da jeder Summand in P_3 mindestens einen Faktor der Form $\operatorname{tr} X^i$ hat, hat jeder Summand in Q_3 einen Faktor der Form $\operatorname{tr}(AB)^i$, also ist R_3 eine Summe von Termen, von denen jeder einen Faktor $\operatorname{tr}(A_{i_1}B_{i_1}\cdots A_{i_k}B_{i_k})$ hat. Daher hat jeder Summand in S_3 einen Faktor der Form $\operatorname{tr}(X_1\cdots X_{4k})$ oder der Form $\operatorname{tr}(YX_1\cdots X_{4k})$. Aus der Definition von T_3 folgt damit die Behauptung. $\square$

Nach Lemma 6.10 verschwindet daher $T_3(\underline{X},Y)$, wenn man für $X_1,\ldots,X_n,Y$ Matrizen aus $\mathrm{so}_{2\ell}$ einsetzt. Da nach Bemerkung 7.3 auch $T_1(\underline{X},Y)$ verschwindet, erhalten wir:

Lemma 7.5. Für $x_1,\ldots,x_n,y\in\mathrm{so}_{2\ell}$ gilt

$$T_2(\underline{x},y)=0.$$

Da T_2 andererseits aber multilinear in allen Variablen und alternierend in den X_i ist, läßt es sich als Linearkombination der vor Lemma 4.2 definierten Polynome $A_{i,j}$ darstellen.

Lemma 7.6. Für $n\geq 4l$ gilt:

$$T_2(X_1,\ldots,X_n,Y)=2^{2\ell}\ell!(\ell-1)!\sum_{0\leq i<2\ell}(-1)^iA_{2i,n-2i}(\underline{X},Y).$$

Beweis: Nach Definition ist $P_2(X)=X^\ell$, also $Q_2(A,B)=(AB)^\ell$. Nach Proposition 7.1 und der Definition von R_2 ist daher $R_2(\underline{A},\underline{B})=\sum_{\sigma,\tau\in S_\ell}A_{\sigma 1}B_{\tau 1}\cdots A_{\sigma\ell}B_{\tau\ell}$. Für $0\leq i\leq 4\ell$ und $\rho\in S_{4\ell}$ definieren wir die Koeffizienten $s_{i,\rho}$ durch

$$S_2(X_1,\ldots,X_{4\ell},Y)=\sum_{\substack{0\leq i\leq 4\ell\\ \rho\in S_{4\ell}}}s_{i,\rho}X_{\rho 1}\cdots X_{\rho i}YX_{\rho(i+1)}\cdots X_{\rho 4\ell}.$$

Dann ist $s_{i,\rho}\in\{0,1,-1\}$ für alle i und ρ. Weiter ist $s_{i,\rho}$ genau dann von 0 verschieden, wenn i gerade und kleiner als 4ℓ ist, ρ jede der beiden Mengen von (ungeordneten) Paaren $\{(1,2),(5,6),\ldots,(4\ell-3,4\ell-2)\}$ und $\{(3,4),(7,8),\ldots,(4\ell-1,4\ell)\}$ permutiert und

$$\begin{aligned}\{1,2\}&=\{\rho(i-1),\rho(i)\} &&\text{falls } i/2 \text{ ungerade ist, und}\\ \{1,2\}&=\{\rho(i+1),\rho(i+2)\} &&\text{falls } i/2 \text{ gerade ist, gilt.}\end{aligned}$$

In diesem Fall ist $s_{i,\rho}=(-1)^{i/2}\operatorname{sgn}(\rho)$. Zu gegebenem, geraden $i<4\ell$ gibt es genau $2^{2\ell}\ell!(\ell-1)!$ solche ρ.

Für $n > 4\ell$ und die natürliche Einbettung $S_{4\ell} \hookrightarrow S_n$ setzen wir $s_{i,\rho} = 0$ für $\rho \in S_n \setminus S_{4\ell}$ und alle i.

Es gilt

$$\begin{aligned}
T_2(\underline{X}, Y) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) S_2(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma 4\ell}, Y) X_{\sigma(4\ell+1)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell \\ \rho\in S_{4\ell}}} \operatorname{sgn}(\sigma) s_{i,\rho} X_{\sigma\rho 1} \cdots X_{\sigma\rho i} Y X_{\sigma\rho(i+1)} \cdots X_{\sigma\rho 4\ell} X_{\sigma(4\ell+1)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell \\ \rho\in S_n}} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\rho^{-1}) s_{i,\rho} X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)} \cdots X_{\sigma 4\ell} X_{\sigma(4\ell+1)} \cdots X_{\sigma n} \\
&= \sum_{\substack{0\le i\le 4\ell \\ \sigma\in S_n}} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma 1} \cdots X_{\sigma i} Y X_{\sigma(i+1)} \cdots X_{\sigma n} \sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) s_{i,\rho} \\
&= \sum_{0\le i\le 4\ell} A_{i,n-i}(\underline{X}, Y) \sum_{\rho\in S_{4\ell}} \operatorname{sgn}(\rho) s_{i,\rho} \\
&= \sum_{0\le i<2\ell} (-1)^i 2^{2\ell} \ell!(\ell-1)! A_{2i,n-2i}(\underline{X}, Y).
\end{aligned}$$

□

Wir verwenden nun noch folgenden Satz, der für gerades d von Kostant [2], für ungerades d von Rowen [7] stammt:

Satz 7.7. Für $x_1, \dots, x_{2d-2} \in \mathrm{so}_d$ gilt die Identität

$$A_{2d-2}(\underline{x}) = 0.$$

Korollar 7.8. Auch für $n \ge 2d-2$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{so}_d$ gilt die Identität

$$A_n(\underline{x}) = 0.$$

Satz 7.9. Für $\ell \ge 3$ und $x_1, \dots, x_{8\ell-12}, y \in \mathrm{so}_{2\ell}$ gilt die Identität

$$L_{8\ell-12}(\underline{x}, y) = 0.$$

Beweis: Nach Lemma 4.3 und Korollar 7.8 gilt $A_{i,j}(\underline{x}, y) = 0$, wenn i oder j größer oder gleich $4\ell-2$ ist.

Für $P_{4\ell-3,4\ell-9}$ und $Q_{4\ell-3,4\ell-9}$ wie vor Lemma 4.4 gilt daher

$$\begin{aligned}
P_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x}, y) &= (4\ell-3)! \sum_{i=4\ell-9}^{4\ell-3} (-1)^{i-1} A_{i,8\ell-12-i}(\underline{x}, y), \\
Q_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x}, y) &= (4\ell-3)! \sum_{i=4\ell-9}^{4\ell-3} A_{i,8\ell-12-i}(\underline{x}, y).
\end{aligned}$$

Sei $n = 8\ell - 12$. Wegen $\ell \ge 3$ ist $n \ge 4\ell$ und nach Lemma 7.6 gilt

$$T_2(\underline{x}, y) = 2^{2\ell} \ell!(\ell-1)!(A_{4\ell-8,4\ell-4}(\underline{x}, y) - A_{4\ell-6,4\ell-6}(\underline{x}, y) + A_{4\ell-4,4\ell-8}(\underline{x}, y)).$$

Nach Lemma 4.2 folgt

$$\begin{aligned}
L_{8\ell-12}(\underline{x},y) &= \binom{4\ell-6}{2\ell-4}A_{4\ell-8,4\ell-4}(\underline{x},y) - \binom{4\ell-6}{2\ell-3}A_{4\ell-6,4\ell-6}(\underline{x},y) \\
&\quad + \binom{4\ell-6}{2\ell-2}A_{4\ell-4,4\ell-8}(\underline{x},y) \\
&= \binom{4\ell-6}{2\ell-4}\left(\frac{Q_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y) - P_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y)}{4(4\ell-3)!} + \frac{T_2(\underline{x},y)}{2^{2\ell+1}\ell!(\ell-1)!}\right) \\
&\quad - \binom{4\ell-6}{2\ell-3}\left(\frac{Q_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y) - P_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y)}{4(4\ell-3)!} - \frac{T_2(\underline{x},y)}{2^{2\ell+1}\ell!(\ell-1)!}\right).
\end{aligned}$$

Nach der Definition von P und Q und Satz 7.7 sind $P_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y) = 0$ und $Q_{4\ell-3,4\ell-9}(\underline{x},y) = 0$. Nach Lemma 7.5 ist auch $T_2(\underline{x},y) = 0$. Daher gilt auch $L_{8\ell-12}(\underline{x},y) = 0$. □

Satz 7.10. Für $\ell \geq 4$ und $x_1,\dots,x_{8\ell-16},y \in \mathrm{so}_{2\ell-1}$ gilt die Identität

$$L_{8\ell-16}(\underline{x},y) = 0.$$

Beweis: Der Beweis ist analog zum vorangegangenen. Hier ist $A_{i,j} = 0$, wenn i oder j größer oder gleich $4\ell-4$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y) &= (4\ell-5)! \sum_{i=4\ell-11}^{4\ell-5} (-1)^{i-1} A_{i,8\ell-16-i}(\underline{x},y), \\
Q_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y) &= (4\ell-5)! \sum_{i=4\ell-11}^{4\ell-5} A_{i,8\ell-16-i}(\underline{x},y),
\end{aligned}$$

$$T_2(\underline{x},y) = 2^{2\ell}\ell!(\ell-1)!(-A_{4\ell-10,4\ell-6}(\underline{x},y) + A_{4\ell-8,4\ell-8}(\underline{x},y) - A_{4\ell-6,4\ell-10}(\underline{x},y)),$$

$$\begin{aligned}
&L_{8\ell-16}(\underline{x},y) \\
&\quad = -\binom{4\ell-8}{2\ell-5}A_{4\ell-10,4\ell-6} + \binom{4\ell-8}{2\ell-4}A_{4\ell-8,4\ell-8} - \binom{4\ell-8}{2\ell-3}A_{4\ell-6,4\ell-10} \\
&\quad = \binom{4\ell-8}{2\ell-5}\left(\frac{Q_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y) - P_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y)}{4(4\ell-5)!} + \frac{T_2(\underline{x},y)}{2^{2\ell+1}\ell!(\ell-1)!}\right) \\
&\qquad - \binom{4\ell-8}{2\ell-4}\left(\frac{Q_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y) - P_{4\ell-5,4\ell-11}(\underline{x},y)}{4(4\ell-5)!} - \frac{T_2(\underline{x},y)}{2^{2\ell+1}\ell!(\ell-1)!}\right).
\end{aligned}$$

Da die natürliche Einbettung $\mathrm{so}_{2\ell-1} \hookrightarrow \mathrm{so}_{2\ell}$ mit der Multiplikation verträglich ist, gilt auch hier $T_2(\underline{x},y) = 0$. Da auch P und Q verschwinden, gilt dies auch für $L_{8\ell-16}$. Allerdings ist hier für Lemma 7.6 die Voraussetzung $\ell \geq 4$ notwendig. □

Bemerkung 7.11. Die Sätze 7.9 und 7.10 zeigen, daß für $d \geq 6$ die Standard-Lie-Identität in so_d im Grad $4d-12$ gilt. Für die übrigen d gilt:

- so_2 ist abelsch, also gilt die Identität $L_1 = 0$.

- so_3 ist isomorph zu sl_2, es gilt also $L_4 = 0$.
- so_4 ist isomorph zu $\mathrm{sl}_2 \oplus \mathrm{sl}_2$, also gilt auch hier $L_4 = 0$.
- so_5 ist isomorph zu sp_4, also gilt hier $L_8 = 0$.

Kapitel 8

Übersicht der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird zusammenfassend dargestellt, in welchen Graden die assoziative Standard-Identität und die Standard-Lie-Identität in den klassischen einfachen Lie-Algebren gelten.

Kostant [3] zeigt, daß für jede Darstellung φ einer reduktiven Lie-Algebra die Identität $A_{2\epsilon}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{2\epsilon})) = 0$ gilt, wobei ϵ der Nilpotenzgrad der Darstellung ist, d.h. $\varphi(x)^\epsilon = 0$ für alle nilpotenten x. Wegen $L_n(\underline{x}, y) = A_n(\mathrm{ad}(x_1), \ldots, \mathrm{ad}(x_n))(y)$ erhält man damit auch eine obere Abschätzung für den Grad, in dem die Standard-Lie-Identität gilt.

Rowen [7] betrachtet die assoziative Standard-Identität für schiefsymmetrische und symmetrische Matrizen. Er gibt den minimalen Grad an, in dem diese Identität in so_d gilt. Für ungerades d zeigt er ein besseres Ergebnis, als man mit Kostants Formel erhält. In anderen Fällen sind meines Wissens bisher keine besseren Ergebnisse bekannt.

In der folgenden Tabelle werden alle Ergebnisse zusammengefasst. Die Minimalität der angegebenen Abschätzungen wurde nicht in allen Fällen gezeigt, daher enthält die Spalte „optimal“ unterschiedliche Einträge:

(a) War die Optimalität schon bekannt, so enthält diese Spalte einen Verweis auf die entsprechende Quelle.

(b) Wurde hier gezeigt, daß das angegebene Ergebnis optimal ist, so wird in dieser Spalte der entsprechende Satz angegeben.

(c) In den anderen Fällen enthält die Spalte eine weitere Bedingung an d. Für die d, die diese Bedingung erfüllen, wurde mit den im Anhang abgedruckten Programmen überprüft, daß die Abschätzung hier optimal ist. Auch in diesen Fällen ist aber auch für größere d zu erwarten, daß die Identität nicht schon in kleineren Graden gilt.

Identität	Lie-Algebra	Bedingung	obere Abschätzung mit Kostants Ergebnis	obere Abschätzung nach Rowen	hier gezeigte obere Abschätzung	optimal
assoziative Standard-Identität	sl_d	$d \geq 2$	$2d$			[4]
	so_d	d gerade	$2d-2$	$2d-2$		[7]
	so_d	d ungerade, $d \geq 3$	$2d$	$2d-2$		[7]
	sp_d	d gerade	$2d$			Satz 3.2
Standard-Lie-Identität	sl_d	$d \geq 2$	$4d-2$		$4d-4$	Satz 5.10
	so_d	d gerade, $d \geq 4$	$4d-10$		$4d-12$	$4 \leq d \leq 8$
	so_d	d ungerade, $d \geq 5$	$4d-2$		$4d-12$	$5 \leq d \leq 9$
	sp_d	d gerade, $d \geq 4$	$4d-2$		$4d-8$	$4 \leq d \leq 6$

Anhang A

Programme

Da für so_d und $\mathrm{sp}_{2\ell}$ nicht nachgewiesen wurde, daß die angegebenen Schranken optimal sind, werden hier Programme abgedruckt, mit denen man dies für kleine d überprüfen kann.

Mit dem Programm `so.cc` kann man $L_n(\underline{x}, y)$ für gewisse $\underline{x}, y \in \mathrm{so}_d$ berechnen, mit dem Programm `sp.cc` für gewisse $\underline{x}, y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$. Die beiden Programme `List.cc` und `Perm.cc` werden von den Programmen `so.cc` und `sp.cc` verwendet.

Zunächst soll nun Eingabe und Ausgabe des Programms `so.cc` beschrieben werden. Dieses Programm berechnet $L_n(\underline{x}, y)$, wobei die x und y von der Form $b_{i,j}$ für gewisse i und j sind. Eingegeben wird zunächst d, dann n, dann y und schließlich die x. Für y und die x besteht die Eingabe jeweils aus i und j. Die Eingaben sind jeweils mit Leerzeichen zu trennen. Soll beispielsweise $L(b_{1,4}, b_{2,4}, b_{3,4}, b_{1,2})$ berechnet werden, so ist

$$d = 4, \qquad n = 3, \qquad y = b_{1,2},$$
$$x_1 = b_{1,4}, \qquad x_2 = b_{2,4}, \qquad x_3 = b_{3,4},$$

die Eingabe lautet also „`4 3 1 2 1 4 2 4 3 4`“. Ausgegeben wird die gesamte Ergebnismatrix, in diesem Fall also

```
0       0       0       0
0       0       0       0
0       0       0       2
0       0       -2      0
```

Für $4 \leq d \leq 9$ wurde mit dem Programm `so.cc` überprüft, daß man folgendermaßen ein Beispiel mit $L_{4d-13}(\underline{x}, y) \neq 0$ in so_d erhält: Für $1 \leq i \leq d-4$ sei

$$y = b_{1,2}, \qquad x_1 = b_{1,4}, \qquad x_2 = b_{2,4}, \qquad x_3 = b_{3,4},$$
$$x_{4i} = b_{i+4,1}, \qquad x_{4i+1} = b_{i+4,2}, \qquad x_{4i+2} = b_{i+4,3}, \qquad x_{4i+3} = b_{i+4,4}.$$

Nun wird noch die Eingabe des Programms `sp.cc` beschrieben. Dieses berechnet $L_n(\underline{x}, y)$ wobei $\underline{x}, y \in \mathrm{sp}_{2\ell}$ Matrizen von einem der folgenden drei Typen sind:

1. $e_{i,j} - e_{\ell+j,\ell+i}$,
2. $e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i}$,
3. $e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i}$,

wobei jeweils $1 \leq i \leq \ell$ und $1 \leq j \leq \ell$ gilt. Die Eingabe ist wieder zunächst $d = 2\ell$, dann n, dann y und dann die x. Dabei besteht die Eingabe für y und die x diesmal jeweils aus drei Zahlen: Zuerst 1,2 oder 3 für den Typ, dann i und schließlich j. Zur Verdeutlichung mag folgendes Beispiel dienen:

$$\ell = 2 \qquad n = 7$$

$$\begin{array}{rrrr} y = e_{1,1} - e_{3,3} & x_1 = e_{1,1} - e_{3,3} & x_2 = e_{1,2} - e_{4,3} & x_3 = e_{2,1} - e_{3,4} \\ x_4 = 2e_{1,3} & x_5 = 2e_{3,1} & x_6 = 2e_{2,4} & x_7 = 2e_{4,2} \end{array}$$

Die Eingabe lautet dann
„`4 7 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 1 3 1 1 2 2 2 3 2 2`“.
Das zusätzliche Einfügen weiterer Leerzeichen aus Gründen der Übersichtlichkeit schadet dabei nichts. Die Ausgabe ist wieder die gesamte Matrix, in diesem Fall

```
960     0       0       0
0       576     0       0
0       0       -960    0
0       0       0       -576
```

Mit diesem Programm wurde für $2 \leq \ell \leq 3$ überprüft, daß man ein Beispiel mit $L_{8\ell-9}(\underline{x}, y) \neq 0$ in $\mathrm{sp}_{2\ell}$ folgendermaßen erhält: Sei

$$\begin{array}{rr} y = e_{1,1} - e_{3,3} & x_1 = e_{1,1} - e_{3,3} \\ x_2 = e_{1,2} - e_{4,3} & x_3 = e_{2,1} - e_{3,4} \\ x_4 = 2e_{1,3} & x_5 = 2e_{3,1} \\ x_6 = 2e_{2,4} & x_7 = 2e_{4,2} \\ x_{8i-16} = e_{1,i} - e_{\ell+i,\ell+1} & x_{8i-15} = e_{2,i} - e_{\ell+i,\ell+2} \\ x_{8i-14} = e_{i,1} - e_{\ell+1,\ell+i} & x_{8i-13} = e_{i,2} - e_{\ell+2,\ell+i} \\ x_{8i-12} = e_{1,\ell+i} + e_{i,\ell+1} & x_{8i-11} = e_{2,\ell+i} + e_{i,\ell+2} \\ x_{8i-10} = e_{\ell+i,1} + e_{\ell+1,i} & x_{8i-9} = e_{\ell+i,2} + e_{\ell+2,i} \end{array}$$

für $3 \leq i \leq \ell$.

Programm: so.cc

```
#include<iostream.h>
#include"Perm.cc"
#include"List.cc"

class So{
public:
  // So(); // implizit
  void einlesen(int);
  So operator*(const So&);
  // So operator=(const So&); // implizit
  bool null();
  void add(int**, int, int);
private:
  int i,j,t;
  // Bedeutung:
  // 0, wenn t=0
  // e_{i,j} - e_{j,i}, wenn t=1
  // e_{i,j}, wenn t=2
  // -e_{i,j}, wenn t=3
  // -e_{i,i} - e_{j,j}, wenn t=4
  // Obermenge einer Basis fuer so, und das Produkt zweier solcher
  // Matrizen laesst sich (unter gewissen Bedingungen) wieder so
  // darstellen
};

void So::einlesen(int d){
  cin>>i>>j;
  t=1;
  // i<j beachten!
  // keine 3 gleichen!
}

So So::operator*(const So& m){
  So erg;
  // verwendet wird nur m.t=1
  if(t==1){
    if(i==m.i)
      if(j==m.j) {erg.t=4; erg.i=i; erg.j=j; return erg;}
      else {erg.t=3; erg.i=j; erg.j=m.j; return erg;}
    if(j==m.j) {erg.t=3; erg.i=i; erg.j=m.i; return erg;}
    if(i==m.j) {erg.t=2; erg.i=j; erg.j=m.i; return erg;}
    if(j==m.i) {erg.t=2; erg.i=i; erg.j=m.j; return erg;}
  }
  if(t==2){
    if(j==m.i) {erg.t=2; erg.i=i; erg.j=m.j; return erg;}
    if(j==m.j) {erg.t=3; erg.i=i; erg.j=m.i; return erg;}
```

```
  }
  if(t==3){
    if(j==m.i) {erg.t=3; erg.i=i; erg.j=m.j; return erg;}
    if(j==m.j) {erg.t=2; erg.i=i; erg.j=m.i; return erg;}
  }
  if(t==4){
    if(i==m.i) {erg.t=3; erg.i=i; erg.j=m.j; return erg;}
    if(i==m.j) {erg.t=2; erg.i=i; erg.j=m.i; return erg;}
    if(j==m.i) {erg.t=3; erg.i=j; erg.j=m.j; return erg;}
    if(j==m.j) {erg.t=2; erg.i=j; erg.j=m.i; return erg;}
  }
  erg.t=0; return erg;
}

bool So::null(){
  return (t==0);
}

void So::add(int** erg, int d, int faktor){
  if(t==2) erg[i-1][j-1]+=faktor;
  if(t==3) erg[i-1][j-1]-=faktor;
}

int main(){
  List<So> a;
  Perm sigma(a.len());
  sigma.durchlaufe(&a);
  a.ausgabe();
}
```

Programm: `sp.cc`

```
#include<iostream.h>
#include"Perm.cc"
#include"List.cc"

class Sp{
public:
  // Sp(); // implizit
  void einlesen(int);
  Sp operator*(const Sp&);
  // Sp operator=(const Sp&); // implizit
  bool null();
  void add(int**, int, int);
private:
  int i,j,k,l,a,b;
  // Bedeutung: a e_{i,j} + b e_{k,l}
```

```
  // Obermenge einer Basis fuer sp, und das Produkt zweier solcher
  // Matrizen laesst sich (unter gewissen Bedingungen) wieder so
  // darstellen
  void norm(); // Bringt diese Darstellung in eine Standardform
};

void Sp::einlesen(int d){
  int m=d/2;
  int t;
  cin>>t>>i>>j;
  switch (t) {
  case 1:
    a=1; b=-1; k=j+m; l=i+m;
    break;
  case 2:
    a=1; b=1; k=j; l=i+m; j+=m;
    break;
  case 3:
    a=1; b=1; k=j+m; l=i; i+=m;
    break;
  }
  norm();
}

Sp Sp::operator*(const Sp& m){
  Sp erg;
  erg.a=0; erg.b=0;
  erg.i=0; erg.j=0; erg.k=0; erg.l=0;
  if(j==m.i){
    erg.i=i; erg.j=m.j; erg.a=a*m.a;
  } else if(j==m.k) {
    erg.i=i; erg.j=m.l; erg.a=a*m.b;
  }
  if(l==m.i){
    erg.k=k; erg.l=m.j; erg.b=b*m.a;
  } else if(l==m.k) {
    erg.k=k; erg.l=m.l; erg.b=b*m.b;
  }
  erg.norm();
  return erg;
}

bool Sp::null(){
  return a==0;
}

void Sp::add(int** erg, int d, int faktor){
  if((i!=0)&&(j!=0)) erg[i-1][j-1]+=faktor*a;
```

```
  if((k!=0)&&(l!=0)) erg[k-1][l-1]+=faktor*b;
}

void Sp::norm(){
  if((i==k)&&(j==l)) {
    a=a+b; b=0; return;
  }
  if(a==0){
    i=k; j=l; a=b;
    k=0; l=0; b=0;
    return;
  }
}

int main(){
  List<Sp> a;
  Perm sigma(a.len());
  sigma.durchlaufe(&a);
  a.ausgabe();
}
```

Programm: `List.cc`

```
#ifndef _LIST
#define _LIST

#include<iostream.h>
#include"Perm.cc"

int biko(int n,int k){
  return ((k==0)?1:
  ((n<0)||(k<0)||(k>n)?0:
   ((2*k>n?biko(n,n-k):
     ((k==n)?1:biko(n-1,k-1)*n/k)))));
}

int gerade(int n){
  return (n%2==0?1:-1);
}

template<class T> class List{
  // T ist Klasse zur Darstellung der Matrizen
  // T braucht folgende Funktionen:
  // Standard-Konstruktor
  // void einlesen(int d);
  // T operator*(const T&);
  // T operator=(const T&);
```

```
  // bool null();
  // void add(int** erg, int d, int faktor); // erg ist dxd-Matrix,
  // diese Funktion addiert das Objekt, fuer das sie aufgerufen wird,
  // mit faktor multipliziert, dazu
public:
  List(); // liesst Liste ein
  bool test(int, const Perm&);
  void add(const Perm&);
  void ausgabe() const;
  int len() const;
private:
  int n; // Anzahl der x
  int d;
  T* m;
  T* produkt;
  int** erg;
};

template<class T> List<T>::List() {
  cin>>d>>n;
  m=new T[n+1];
  produkt=new T[n+1];
  for(int k=0;k<=n;k++)
    m[k].einlesen(d);
  erg=new int*[d];
  for(int i=0;i<d;i++){
    erg[i]=new int[d];
    for(int j=0;j<d;j++)
      erg[i][j]=0;
  }
}

template<class T> bool List<T>::test(int k, const Perm& sigma) {
  if(k==0) {
    produkt[0]=m[sigma(0)];
    return true;
  }
  produkt[k]=produkt[k-1]*m[sigma(k)];
  return !produkt[k].null();
}

template<class T> void List<T>::add(const Perm& sigma) {
  int k=sigma.inv(0); // Position von y
  if((n%2==0)&&(k%2==1)) return;
  int faktor=gerade((k+1)/2)*biko(n/2,k/2)*sigma.sgn()*gerade(k);
  produkt[n].add(erg,d,faktor);
}
```

```
template<class T> void List<T>::ausgabe() const {
  for(int i=0;i<d;i++){
    for(int j=0;j<d;j++)
      cout<<erg[i][j]<<"\t";
    cout<<endl;
  }
}

template<class T> int List<T>::len() const {
  return n+1;
}

#endif
```

Programm: Perm.cc

```
// Klasse fuer Permutation

#ifndef _PERM
#define _PERM

class Perm{
public:
  Perm();
  Perm(int n);
  ~Perm();
  id(int); // setzt Permutation auf id in S_n
  id(); // setzt Permuation auf id
  int operator()(int) const; // gibt das Bild zurueck
  int inv(int) const; // gibt das inverse Bild zurueck
  int sgn() const {return sign;}
  void set(int,int); // multipliziert (wenn noetig) mit einer
  // Transposition, so dass danach das erste Argument auf das zweite
  // abgebildet wird
  template<class T> void durchlaufe(T*);
  // T muss eine Elementfunktion bool test(int, const Perm&) haben,
  // sowie eine Elementfunktion void add(const Perm&)
  // Fuer jede Permutation, bei der fuer 0<=i<n test(i,*this)=true
  // ist, wird einmal add aufgerufen.
private:
  int n;
  int* darst;
  int* invers;
  int sign;
};

Perm::Perm(){
```

```
  darst=0;
  invers=0;
}

Perm::Perm(int n){
  darst=0;
  invers=0;
  id(n);
}

Perm::id(int n){
  this->n=n;
  delete[] darst;
  delete[] invers;
  darst=new int[n];
  invers=new int[n];
  id();
}

Perm::id(){
  sign=1;
  for(int i=0;i<n;i++){
    darst[i]=i;
    invers[i]=i;
  }
}

Perm::~Perm(){
  delete[] darst;
  delete[] invers;
}

int Perm::operator()(int k) const{
  return darst[k];
}

int Perm::inv(int k) const{
  return invers[k];
}

void Perm::set(int i, int j){
  if(darst[i]==j) return;
  // Wenn nicht, multipliziere von links mit (darst[i]  j)
  darst[invers[j]]=darst[i];
  invers[darst[i]]=invers[j];
  darst[i]=j;
  invers[j]=i;
  sign=-sign;
```

```
}

void links(int& pos, int& z, bool* vis, const Perm& sigma){
  pos--;
  vis[sigma(pos)]=false;
  z=sigma(pos)+1;
};

void rechts(int& pos, int& z, bool* vis, Perm& sigma){
  sigma.set(pos,z);
  vis[z]=true;
  pos++;
  z=0;
};

template<class T> void Perm::durchlaufe(T* arg){
  // Schleifeninvariante:
  // vis[darst[i]]=true fuer i<pos
  // vis[darst[i]]=false fuer i>=pos
  // fuer i=pos muessen nur noch die j mit j>=z ueberprueft werden
  bool* vis=new bool[n];
  for(int i=0;i<n;i++)
    vis[i]=false;
  int pos=0;
  int z=0;
  id();
  while(pos>=0) {
    if(pos==n-1){ // Bild der letzten Ziffer ergibt sich automatisch
      if(arg->test(n-1,*this)) arg->add(*this); // wurde noch nicht
      // ueberprueft
      links(pos,z,vis,*this);
    } else {
      while((z<n)&&(vis[z])) z++; // Naechste noch nicht vorkommende
      // Ziffer
      if(z==n) links(pos,z,vis,*this);
      else {
rechts(pos,z,vis,*this);
if(!arg->test(pos-1,*this)) links(pos,z,vis,*this);
      }
    }
  }
  delete[] vis;
}

#endif
```

Literaturverzeichnis

[1] S. A. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449–463.

[2] B. Kostant, *A Theorem of Frobenius, a Theorem of Amitsur-Levitski and Cohomology Theory*, J. Math. Mech. **7** (1958), 237–264.

[3] B. Kostant, *A Lie Algebra Generalization of the Amitsur-Levitski Theorem*, Adv. Math. **40** (1981), 155–175.

[4] J. Levitzki, *A theorem on polynomial identities*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 334–341.

[5] C. Procesi, *The Invariant Theory of $n \times n$ Matrices*, Adv. Math. **19** (1976), 306–381.

[6] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Isr. J. Math. **23** (1976), 187–188.

[7] L. H. Rowen, *Standard Polynomials in Matrix Algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **190** (1974), 253–284.

[8] L. H. Rowen, *A simple proof of Kostant's Theorem, and an analogue for the symplectic involution*, Contemp. Math. **13** (1982), 207–215.