

Die 27 Geraden
einer nichtsingulären
kubischen Fläche

Tobias Peter

Semesterarbeit in Mathematik
ETH Zürich, 2005

Betreuer: Prof. Dr. Richard Pink

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	2
2.1	Grassmannsche Varietät	2
2.2	Veronese Einbettung	5
3	Existenz einer Geraden	6
4	Die 27 Geraden	9

1 Einleitung

Die Theorie der Geraden auf einer kubischen Fläche wurde das erste Mal eingehend von den britischen Mathematikern Salmon und Cayley studiert. In ihrem Briefwechsel zeigte Cayley, dass alle nichtsingulären kubischen Flächen dieselbe endliche Anzahl Geraden enthalten. Daraufhin konnte Salmon beweisen, dass diese Anzahl 27 sein muss. Ihre Resultate wurden dann 1849 publiziert, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. IV, 1849, S.118-132 (Cayley), S.252-260 (Salmon). Inzwischen gibt es eine Vielzahl an Beweisen dieser Aussage. Wir wollen in dieser Arbeit einen klassischen Beweis ausführen. Deshalb betrachten wir in Kapitel 2 die Grassmannsche Varietät und die Veronese Einbettung. Mit diesen Hilfsmitteln können wir Geraden und kubische Flächen geeignet in projektive Räume einbetten, so dass wir in Kapitel 3 mit einem Dimensionsargument die Existenz einer Gerade auf jeder kubische Fläche $X \subset \mathbb{P}^3$ zeigen können. In Kapitel 4 beweisen wir zuerst, dass jede Gerade einer nichtsingulären, kubischen Fläche X von genau 10 weiteren Geraden aus X geschnitten wird. Diese Geraden haben dann eine bestimmte Konfiguration, mithilfe derer wir schliesslich zeigen können, dass eine solche Fläche genau 27 Geraden besitzt.

2 Grundlagen

In der ganzen Arbeit bezeichne k einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

2.1 Grassmannsche Varietät

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n+1$ und $L \subset V$ ein $(d+1)$ -dimensionaler Unterraum mit Basis $f_0 \dots f_d$. Wir betrachten nun $f_0 \wedge \dots \wedge f_d \in \bigwedge^{d+1} V$. Ist $f'_0 \dots f'_d$ eine weitere Basis von L , dann existiert eine Matrix $A = (a_i^j) \in GL_{d+1}(k)$ mit $f'_i = \sum_j a_i^j f_j$ für $i = 0 \dots d$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} f'_0 \wedge \dots \wedge f'_d &= \sum_{i_0 \dots i_d} a_0^{i_0} \dots a_d^{i_d} f_{i_0} \wedge \dots \wedge f_{i_d} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{d+1}} \text{sign}(\sigma) a_0^{\sigma(0)} \dots a_d^{\sigma(d)} f_0 \wedge \dots \wedge f_d \\ &= \det(A) f_0 \wedge \dots \wedge f_d. \end{aligned}$$

Somit können wir L kanonisch einen Punkt $\tilde{P}(L) \in \mathbb{P}(\bigwedge^{d+1} V)$ zuordnen. Ist $e_0 \dots e_n$ eine Basis von V , dann ist $e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ für $0 \leq i_0 < \dots < i_d \leq n$ eine Basis von $\bigwedge^{d+1} V$ und man sieht sofort, dass $\bigwedge^{d+1} V$ Dimension $\binom{n+1}{d+1}$ hat. Wir können nun also

$$\tilde{P}(L) = \sum_{i_0 < \dots < i_d} p(i_0 \dots i_d) e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$$

schreiben.

Definition 2.1. Die Koordinaten $p(i_0 \dots i_d)$ werden *Plückerkoordinaten* des Unterraums L genannt.

Mithilfe der Lexikographischen Ordnung kann man L jetzt einen wohldefinierten Punkt $P(L) = [p(i_0 \dots i_d)] \in \mathbb{P}^N$ zuordnen, wobei $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$ ist. Die Abbildung $L \mapsto P(L)$ ist im Allgemeinen aber nicht surjektiv. Dazu gilt folgender

Satz 2.2. Ein Punkt $[x(j_0 \dots j_d)] \in \mathbb{P}^N$ liegt genau dann im Bild der Abbildung $L \mapsto P(L)$, wenn die Koordinaten $x(j_0 \dots j_d)$ die quadratischen Gleichung

$$\sum_{l=0}^{d+1} (-1)^l x(j_0 \dots j_{d-1} k_l) x(k_0 \dots \hat{k}_l \dots k_{d+1}) = 0 \quad (1)$$

für alle Folgen $j_0 \dots j_{d-1}$ und $k_0 \dots k_{d+1}$ mit $0 \leq j_l, k_l \leq n$ erfüllen.

Bemerkung 2.3. Die Schreibweise $x_0 \dots \hat{x}_i \dots x_m$ bedeutet, dass das Element x_i in der Aufzählung weggelassen wird. Wir setzen $x(i_0 \dots i_d) = 0$, falls zwei der i_k 's identisch sind. Sind alle i_k 's verschieden, so erweitern wir x via $x(\sigma(i_0) \dots \sigma(i_d)) = \text{sign}(\sigma)x(i_0 \dots i_d)$ für $\sigma \in S_{d+1}$.

Für den Beweis benötigen wir folgendes

Lemma 2.4. Ist $f_0 \dots f_d$ eine Basis von L mit $f_k = \sum b_k^i e_i$, dann gibt es ein $\lambda \neq 0$ mit $p(i_0 \dots i_d) = \lambda \det(B[i_0 \dots i_d])$ für alle Folgen, wobei $B[i_0 \dots i_d]$ die Matrix $(b_k^{i_k})$ ist.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f_0 \wedge \dots \wedge f_d &= \sum_{i_0 \dots i_d} b_0^{i_0} \dots b_d^{i_d} e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_d} \sum_{\sigma \in S_{d+1}} b_0^{\sigma(0)} \dots b_d^{\sigma(d)} \text{sign}(\sigma) e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_d} \det(B[i_0 \dots i_d]) e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus der Definition von $\tilde{P}(L)$ und der Plückerkoordinaten. \square

Bemerkung 2.5. Falls wir f_1 durch λf_1 ersetzen und die neuen Matrizen wiederum $B[i_0 \dots i_d]$ nennen, dann gilt offensichtlich $\det(B[i_0 \dots i_d]) = p(i_0 \dots i_d)$. Wir können also im Folgenden annehmen, dass $\lambda = 1$ ist.

Beweis. (Satz 2.2) Wir beweisen zuerst, dass die Bedingung (1) notwendig ist. Seien also $p(j_0 \dots j_d)$ die Plückerkoordinaten eines $(d+1)$ -dimensionalen Unterraums $L \subset V$. Entwickeln wir die Determinante von $B[j_0 \dots j_{d-1} k_l]$ nach der letzten Spalte, so erhalten wir

$$p(j_0 \dots j_{d-1} k_l) = \sum_{i=0}^d (-1)^{d+i} b_i^{k_l} \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \widehat{b_i^{j_0}} & \dots & \widehat{b_i^{j_{d-1}}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Die linke Seite von (1) ist somit gleich

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d+i} \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \widehat{b_i^{j_0}} & \dots & \widehat{b_i^{j_{d-1}}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \left\{ \sum_{l=0}^{d+i} (-1)^l b_i^{k_l} \det \begin{pmatrix} & \widehat{b_0^{k_l}} & \\ \dots & \vdots & \dots \\ & \widehat{b_d^{k_l}} & \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Summe ist null, denn die Summe in der geschweiften Klammer ergibt

$$\det \begin{pmatrix} \dots & b_i^{k_l} & \dots \\ & b_0^{k_l} & \\ & \vdots & \\ \dots & b_d^{k_l} & \dots \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix zwei identische Zeilen besitzt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Bedingung (1) hinreichend ist. Seien also $x(j_0 \dots j_d)$ Koordinaten eines Punktes in \mathbb{P}^N , welche (1) erfüllen. Weiter können wir annehmen, dass $x(k_0 \dots k_d) \neq 0$ ist. Für den Rest des Beweises benötigen wir folgendes

Lemma 2.6. Die $N + 1$ Koordinaten $x(j_0 \dots j_d)$ sind bereits durch die $(d + 1)(n - d) + 1$ Koordinaten $x(i_0 \dots i_d)$ mit maximal einem i_l nicht in $k_0 \dots k_d$ bestimmt.

Beweis. (Lemma) Sei $j_0 \dots j_d$ eine Folge mit genau m Elementen verschieden von $k_0 \dots k_d$. Sei j_l eines dieser Elemente. Aus (1) erhalten wir mit den Folgen $j_0 \dots \hat{j}_l \dots j_d$ und $k_0 \dots k_d j_l$ die Gleichung

$$x(j_0 \dots \hat{j}_l \dots j_d j_l) x(k_0 \dots k_d) = \sum_{t=0}^d (-1)^t x(j_0 \dots \hat{j}_l \dots j_d k_t) x(k_0 \dots \hat{k}_t \dots k_d j_l).$$

Aus $j_0 \dots \hat{j}_l \dots j_d k_t$ sind nun genau $m - 1$ Elemente nicht unter $k_0 \dots k_d$. Multipliziert man obige Gleichung mit $x(k_0 \dots k_d)$, so erhält man induktiv, dass $x(j_0 \dots j_d)x(k_0 \dots k_d)^{m-1}$ ein Polynom in den Koordinaten $x(i_0 \dots i_d)$ ist, mit maximal einem i_l nicht in $k_0 \dots k_d$. Da $x(k_0 \dots k_d) \neq 0$ ist, folgt die Behauptung. \square

Weiter im Beweis des Satzes: Wir können $x(k_0 \dots k_d) = 1$ annehmen. Unser Ziel ist es nun, einen $(d+1)$ -dimensionalen Unterraum $L \subset V$ zu konstruieren, dessen Plückerkoordinaten gerade $x(j_0 \dots j_d)$ sind. Wir definieren $q_i(j) := x(k_0 \dots \hat{k}_i j \dots k_d)$ für $i = 0 \dots d$, $j = 0 \dots n$. Da $q_i(k_l) = \delta_{i,l}$ ist, sind die Vektoren $(q_i(0), \dots, q_i(n))$, $i = 0 \dots d$ linear unabhängig. Sie spannen also einen Unterraum $L \subset V$ der Dimension $d+1$ auf. Die Plückerkoordinaten von L seien mit $p(j_0 \dots j_d)$ bezeichnet. Ist $j_l = k_l$ für $l \neq s$, dann gilt $p(j_0 \dots j_d) = q_s(j_s) = x(j_0 \dots j_d)$. Mit Lemma 2.6 folgt nun für alle Folgen $j_0 \dots j_d$ die Identität $p(j_0 \dots j_d) = x(j_0 \dots j_d)$. Somit ist der Satz bewiesen. \square

Definition 2.7. Die durch (1) definierte Varietät in \mathbb{P}^N heisst *Grassmann Varietät* und wird mit $Grass(d, n)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.8. Aus dem Beweis von Lemma 2.6 ist ersichtlich, dass $Grass(d, n)$ durch $N + 1$ Kopien von $\mathbb{A}^{(d+1)(n-d)}$ überdeckt wird. Daher hat $Grass(d, n)$ Dimension $(d + 1)(n - d)$.

Theorem 2.9. Die Abbildung $L \mapsto P(L)$ ist eine Bijektion zwischen den $(d + 1)$ -dimensionalen Unterräumen $L \subset V$ und den Punkten $[x(i_0 \dots i_d)]$ in \mathbb{P}^N , welche (1) erfüllen.

Beweis. Die Surjektivität folgt aus Satz 2.2. Sei L ein $(d + 1)$ -dimensionaler Unterraum von V , welcher die Plückerkoordinaten $p(i_0 \dots i_d)$ hat. O.B.d.A. sei $p(k_0 \dots k_d) = 1$, dann hat L offenbar eine Basis der Form

$$f_i = e_{k_i} + \sum_{j \notin \{k_i\}} \alpha_i^j e_j, \quad i = 0 \dots d$$

und es gilt $A[k_0, \dots, k_d] = \mathbf{1}$ und $\det A[i_0 \dots i_d] = p(i_0 \dots i_d)$ für alle Folgen $i_0 \dots i_d$. Sei $l \in \{0 \dots d\}$, $j \in \{0 \dots n\}$ und $j_s = k_s$ für $s \neq l$ und $j_l = j$. Daraus erhalten wir $\alpha_i^j = \det A[j_0 \dots j_n] = p(j_0 \dots j_d)$. Daher ist L eindeutig durch seine Plückerkoordinaten bestimmt und obige Abbildung ist injektiv. \square

Korollar 2.10. Die Punkte von $Grass(1, 3)$ entsprechen bijektiv den Geraden in \mathbb{P}^3 . Die Gleichungen (1) reduzieren sich zur Gleichung

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0 \tag{2}$$

und $Grass(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ ist somit eine irreduzible projektive Varietät der Dimension 4.

2.2 Veronese Einbettung

Sei $m \in \mathbb{N}$ und W der Vektorraum

$$\{F \in k[S_0 \dots S_n] : \deg F = m \text{ und } F \text{ homogen}\} \cup \{0\}.$$

Der Vektorraum W besitzt die Basis $S_0^{i_0} \dots S_n^{i_n}$, wobei $i_0 + \dots + i_n = m$ ist. Wir sehen somit unmittelbar, dass W Dimension $\binom{n+m}{m}$ hat.

Definition 2.11. Eine (*Hyper*)*Fläche* vom Grad m ist eine Menge der Form $V(F) = \{P \in \mathbb{P}^n : F(P) = 0\}$ für ein $F \in W$. Flächen vom Grad 1 nennen wir auch (*Hyper*)*Ebenen* und solche vom Grad 3 *kubische Flächen*.

Es gilt $V(F) = V(F')$ genau dann, wenn $F = \lambda F'$ für ein $\lambda \in k^*$ ist. Wir können also den Hyperflächen in \mathbb{P}^n injektiv Punkte in \mathbb{P}^N mit $N = \binom{n+m}{m} - 1$ zuordnen. Die homogenen Koordinaten von \mathbb{P}^N bezeichnen wir mit $v(i_0 \dots i_n)$, wobei $i_k \in \mathbb{N}$ und $i_0 + \dots + i_n = m$ ist.

Definition 2.12. Wir definieren die Abbildung $v_m : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ durch $v(i_0 \dots i_n) := u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n}$ und nennen sie *Veronese Einbettung*.

Lemma 2.13. Die Veronese Einbettung v_m ist eine isomorphe Einbettung.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus $v(0 \dots m \dots 0) = u_m^m$. Es ist klar, dass v_m eine reguläre Abbildung ist. Wir definieren auf der offenen Teilmenge $U = \{v(m 0 \dots 0) \neq 0\} \subset v_m(\mathbb{P}^n)$ die Abbildung $w : U \rightarrow \mathbb{P}^n$ durch

$$\begin{aligned} u_0 &= v(m 0 \dots 0) \\ u_i &= v(m-1, 0 \dots 1 \dots 0) \quad \text{für } i \geq 1 \end{aligned}$$

Die Abbildung w ist regulär und zu v_m invers. Analog kann man eine solche Abbildung auf $v(0 \dots m \dots 0) \neq 0$ konstruieren. \square

Satz 2.14. Sei $H = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, wobei $F = \sum a_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n}$ ist. Dann ist $v_m(H) \subset v_m(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ der Schnitt von $v_m(\mathbb{P}^n)$ mit der Hyperebene $\sum a_{i_0 \dots i_n} v(i_0 \dots i_n) = 0$.

Beweis. Dies folgt sofort mit der Definition 2.12 der Veronese Einbettung. \square

3 Existenz einer Geraden

Lemma 3.1. Sei $X = V(F) \subset \mathbb{P}^3$ eine Fläche und $l \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade mit Plückerkoordinaten x_{ij} . Die Bedingungen, dass l in X liegt, sind algebraische Beziehungen zwischen den x_{ij} und den Koeffizienten von F . Diese Beziehungen sind homogen in den x_{ij} und in den Koeffizienten von F .

Beweis. Sei l durch die Ebene $L \subset V$ des 4-dimensionalen Vektorraums V gegeben. Sei e_0, \dots, e_3 eine Basis von V und $v = \sum v^j e_j$, $w = \sum w^j e_j$ eine von L . Man überzeugt sich leicht, dass $L = \{f(w)v - f(v)w \mid f \in V^*\}$ ist. Sei $f \in V^*$ und $f(e_i) = \alpha_i$. Dann folgt

$$f(w)v - f(v)w = \sum_i \left(\sum_j p_{ij} \alpha_j \right) e_i \quad \text{mit } p_{ij} = v^i w^j - v^j w^i.$$

Es gilt aber auch

$$v \wedge w = \sum_{i,j} v^i w^j e_i \wedge e_j = \sum_{i < j} p_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Somit sind die Plückerkoordinaten x_{ij} von l gleich p_{ij} . Daher ist L die Menge der Punkte in V mit Koordinaten $u_i = \sum_{j=0}^3 x_{ij} \alpha_j$, $i = 0 \dots 3$ für beliebige $\alpha_j \in k$. Setzt man dies in $F(u_0, \dots, u_3) = 0$ ein und setzt alle Koeffizienten der Monomiale in α_i gleich 0, so erhält man die gewünschten algebraischen Beziehungen. \square

Für den Existenzbeweis benötigen wir folgende drei Sätze, die wir nur zitieren.

Satz 3.2. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine reguläre Abbildung zwischen irreduziblen Varietäten. Ist f surjektiv, $\dim X = n$ und $\dim Y = m$, dann ist $m \leq n$ und es gilt:

- (i) $\dim T \geq n - m$ für alle $y \in Y$ und Komponenten $T \subset f^{-1}(y)$.
- (ii) Es gibt eine nichtleere, offene Teilmenge $U \subset Y$, so dass $\dim f^{-1}(y) = n - m$ gilt für alle $y \in U$.

Beweis. Siehe [2] S.76. □

Satz 3.3. Seien X, Y projektive Varietäten und $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive, reguläre Abbildung. Ist Y irreduzibel und sind alle Fasern $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ irreduzibel und von derselben Dimension, so ist auch X irreduzibel.

Beweis. Siehe [2] S.77. □

Satz 3.4. Ist Y eine irreduzible Varietät und $X \subset Y$ eine abgeschlossene Untervarietät mit $\dim X = \dim Y$, dann ist $X = Y$.

Beweis. Siehe [2] S. 68 □

Wir haben in Korollar 2.10 gesehen, dass Geraden in \mathbb{P}^3 in bijektiver Beziehung zu den Punkten $(x_{01} : x_{02} : x_{03} : x_{12} : x_{13} : x_{23}) \in \mathbb{P}^5$ der 4-dimensionalen, irreduziblen, projektiven Varietät $Grass(1, 3) \subset \mathbb{P}^5$ stehen. Die Grassmann Varietät $G := Grass(1, 3)$ ist dabei durch die Gleichung

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0$$

gegeben. Für $\eta \in G$ bezeichne $l(\eta)$ die entsprechende Gerade in \mathbb{P}^3 . Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und $N = \binom{m+3}{3} - 1$. Dann können wir nach Abschnitt 2.2 die Flächen $X \subset \mathbb{P}^3$ vom Grad m in \mathbb{P}^N einbetten. Wir bezeichnen mit $X(\xi)$ die Fläche, welche $\xi \in \mathbb{P}^N$ entspricht. Wir bezeichnen ferner mit $\Gamma_m \subset \mathbb{P}^N \times G$ die Menge der Paare $(\xi, \eta) \in \mathbb{P}^N \times G$, für welche $l(\eta)$ in $X(\xi)$ liegt. Mit Lemma 3.1 folgt, dass Γ_m eine projektive Varietät ist.

Lemma 3.5. Die Varietät Γ_m ist irreduzibel und hat Dimension $N + 3 - m$.

Beweis. Seien $\pi_1 : \mathbb{P}^N \times G \rightarrow \mathbb{P}^N$, $\pi_2 : \mathbb{P}^N \times G \rightarrow G$ die Projektionen. Von nun an bezeichnen wir mit π_1, π_2 jedoch ihre Restriktion auf Γ_m . Da jede Gerade in mindestens einer Fläche vom Grad m enthalten ist, gilt $\pi_2(\Gamma_m) = G$. Sei $\eta \in G$. Nach einer geeigneten Koordinatentransformation können wir

annehmen, dass $l(\eta)$ durch $u_0 = u_1 = 0$ gegeben ist. Dann liegt (ξ, η) in $\pi_2^{-1}(\eta)$ genau dann, wenn $X(\xi)$ durch ein $F = u_0S + u_1T$ mit S, T Formen vom Grad $m - 1$ gegeben ist. Die Formen $F = u_0S + u_1T$ mit $\deg S = \deg T = m - 1$ bilden einen linearen Unterraum von \mathbb{P}^N der Dimension $\binom{m+2}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} - 1 = N - (m + 1)$. Somit ist $\dim \pi_2^{-1}(\eta) = N - (m + 1)$ für alle $\eta \in G$. Aus Satz 3.3 folgt, dass Γ_m irreduzibel ist. Mit Satz 3.2 erhalten wir nun, dass

$$\begin{aligned} \dim \Gamma_m &= \dim G + \dim \pi_2^{-1}(\eta) = 4 + N - (m + 1) \\ &= N + 3 - m \end{aligned}$$

gilt. □

Nun haben wir die nötigen Hilfsmittel um den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen.

Theorem 3.6. (Existenzsatz) Jede kubische Fläche $X \subset \mathbb{P}^3$ enthält mindestens eine Gerade.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass π_1 surjektiv ist. Sei $m = 3$. Dann folgt aus Lemma 3.5, dass $\dim \Gamma_m = N = 19$ ist. Wir nehmen an, dass es ein $\xi \in \mathbb{P}^{19}$ gibt, so dass $\pi_1^{-1}(\xi) \subset \Gamma_m$ nichtleer ist und Dimension 0 hat. Dann muss $\pi_1(\Gamma_3)$ nach Satz 3.2 Dimension 19 haben. Das Bild einer projektiven Varietät unter einer regulären Abbildung ist abgeschlossen. Somit ist $\pi_1(\Gamma_3) \subset \mathbb{P}^{19}$ abgeschlossen. Da $\dim \pi_1(\Gamma_3) = \dim \mathbb{P}^{19}$ ist, schliesst man mit Satz 3.4, dass $\pi_1(\Gamma_3) = \mathbb{P}^{19}$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass ein solches ξ existiert. Wir müssen also beweisen, dass es eine kubische Fläche in \mathbb{P}^3 gibt, die endlich viele Geraden enthält. Dies folgt aus dem nächsten Lemma. □

Lemma 3.7. Die kubische Fläche $X = V(X_0^3 + \dots + X_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ enthält genau 27 Geraden.

Beweis. Jede Gerade l in \mathbb{P}^3 kann nach Permutation der Koordinaten durch zwei Gleichungen der Form

$$X_0 = aX_2 + bX_3 \tag{3}$$

$$X_1 = cX_2 + dX_3 \tag{4}$$

beschrieben werden. Sei $l \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade. Da $F = X_0^3 + \dots + X_3^3$ symmetrisch ist, können wir annehmen, dass l durch die Gleichungen (3) und (4) beschrieben wird. Setzen wir Gleichung (3) und (4) in $F = 0$ ein und führen

einen Koeffizientenvergleich durch, so erhalten wir als Bedingung für $l \subset X$ folgendes Gleichungssystem in a, b, c, d :

$$a^3 = -(1 + c^3) \quad (5)$$

$$d^3 = -(1 + b^3) \quad (6)$$

$$a^2b = -c^2d \quad (7)$$

$$ab^2 = -cd^2 \quad (8)$$

Multipliziert man (7) mit (8), so erhält man $a^3b^3 = c^3d^3$. Verwendet man nun (5) und (6), so kriegt man, dass $b^3 = c^3$ und $a^3 = d^3$ ist. Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel, dann gibt es $i, j \in \{0, 1, 2\}$ mit $c = \omega^i b$, $d = \omega^j a$. Wir nehmen an, dass $abcd \neq 0$ ist. Dann folgt mit (7), dass $a = -\omega^{2i+j}b$ ist. Aus (5) folgt dann der Widerspruch $0 = a^3 + c^3 + 1 = b^3(1 - (\omega^{2i+j})^3) + 1 = 1$. Also muss $abcd = 0$ sein. Ist z.B. $a = 0$, so erhält man $d = 0$ und $b, c \in \{-1, -\omega, -\omega^2\}$. Da F symmetrisch ist, sieht man, dass X genau folgende 27 Geraden enthält:

$$X_0 + \omega^i X_1 = X_1 + \omega^j X_3 = 0, \quad 0 \leq i, j \leq 2,$$

$$X_0 + \omega^i X_2 = X_1 + \omega^j X_3 = 0, \quad 0 \leq i, j \leq 2,$$

$$X_0 + \omega^i X_3 = X_1 + \omega^j X_2 = 0, \quad 0 \leq i, j \leq 2.$$

□

Bemerkung 3.8. Die Fläche $X = V(X_0^3 + \dots + X_3^3)$ ist also ein erstes Beispiel für eine kubische Fläche in \mathbb{P}^3 mit 27 Geraden.

4 Die 27 Geraden

In diesem Kapitel bezeichne X eine nichtsinguläre, kubische Fläche in \mathbb{P}^3 und sei durch f gegeben, d.h. $f = f(X_0, X_1, X_2, X_3)$ ist homogen vom Grad 3 und für alle $P \in X$ ist mindestens eine Ableitung $\partial f / \partial X_i(P)$ von 0 verschieden.

Lemma 4.1. Sei $g = AX_0^2 + BX_1^2 + CX_2^2 + DX_0X_1 + EX_0X_2 + FX_1X_2$ ein homogenes Polynom vom Grad 2, dann hat g eine der folgenden Normalformen:

(i) X_0^2 ,

(ii) X_0X_1 ,

(iii) $X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2$.

Der Kegelschnitt $K = V(g) \subset \mathbb{P}^2$ ist genau in den Fällen (i) und (ii) degeneriert.

Beweis. Ist K eine doppelte Gerade, dann erreichen wir durch Koordinatentransformation, dass $g = X_0^2$ ist. Sei K keine doppelte Gerade. Dann können wir annehmen, dass der Kegelschnitt K die drei Punkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ enthält. Somit verschwinden die Koeffizienten A, B, C , d.h. g hat die Form $\alpha X_0 X_1 + \beta X_0 X_2 + \gamma X_1 X_2$. Ist $\alpha\beta\gamma = 0$, so bringen wir g in die Form (ii) und K ist ein Geradenpaar. Ist $\alpha\beta\gamma \neq 0$, dann können wir g in die Form (iii) transformieren und K ist nicht-degeneriert. \square

Lemma 4.2. (i) Durch einen Punkt $P \in X$ gibt es maximal drei Geraden von X . Falls es zwei oder drei Geraden gibt, so liegen sie in einer Ebene.

(ii) Jede Ebene $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ schneidet X auf eine der folgenden Arten:

- a) in einer irreduziblen kubischen Kurve,
- b) in einem nicht-degenerierten Kegelschnitt und einer Geraden,
- c) in drei verschiedenen Geraden.

Beweis. (i) Ist $l \subset X$ eine Gerade P , dann ist $l = T_P l \subset T_P X$. Da X nichtsingulär ist, ist $T_P X$ eine Ebene und somit liegen alle Geraden von X durch P in dieser Ebene. Mit (ii) folgt, dass es maximal drei solche Geraden gibt.

(ii) Aufgrund von Lemma 4.1 genügt es zu zeigen, dass eine doppelte Gerade nicht möglich ist. Durch Koordinatentransformation können wir annehmen, dass die Ebene Π durch $X_3 = 0$ und die Gerade $l \subset \Pi \cap X$ durch $X_2 = X_3 = 0$ gegeben ist. Ist l eine doppelte Gerade von $\Pi \cap X$, dann ist

$$f = X_2^2 g(X_0, X_1, X_2, X_3) + X_3 h(X_0, X_1, X_2, X_3)$$

für eine lineare Form g und eine quadratische Form h . Offensichtlich ist X singulär in einem Punkt $(X_0 : X_1 : 0 : 0)$, für den $h(X_0, X_1, 0, 0) = 0$ gilt. Da k algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen solchen Punkt. Wir erhalten somit den gewünschten Widerspruch. \square

Satz 4.3. Ist $l \subset X$ eine Gerade, dann gibt es genau zehn Geraden in X , welche l schneiden. Diese bilden fünf Paare (l_i, l'_i) mit den Eigenschaften:

- (i) Die Geraden l, l_i, l'_i liegen in einer Ebene.

(ii) Es gilt $(l_i \cup l'_i) \cap (l_j \cup l'_j) = \emptyset$ für $i \neq j$.

Beweis. Sei Π eine Ebene durch l , dann ist $\Pi \cap X$ die Vereinigung von l mit einem Kegelschnitt K . Ist K degeneriert, dann ist K nach Lemma 4.2 ein Geradenpaar. Wir werden zeigen, dass es genau fünf verschiedene Ebenen $\Pi_i \subset l$ gibt, so dass der degenerierte Fall eines Geradenpaars (l_i, l'_i) auftritt. Aus Lemma 4.2 (i) folgt, dass die Geraden in verschiedenen Ebenen disjunkt sind, womit (ii) gezeigt ist. Wir können wie immer annehmen, dass l durch $X_2 = X_3 = 0$ gegeben ist. Dann kann man f wie folgt entwickeln

$$f = AX_0^2 + BX_0X_1 + CX_1^2 + DX_0 + EX_1 + F$$

mit Formen $A, B, C, D, E, F \in k[X_2, X_3]$, wobei A, B, C linear, D, E quadratisch und F eine Form vom Grad 3 ist. Man beachte aber, dass einzelne Formen auch null sein können. Jede Ebene, die l enthält, ist dann durch eine Gleichung der Form $\mu X_2 = \lambda X_3$ gegeben. Betrachten wir den durch f gegebenen, variablen Kegelschnitt in X_0, X_1 . Dann sehen wir mit Lemma 4.1, dass dieser Kegelschnitt degeneriert genau dann, wenn

$$\Delta(X_2, X_3) := 4ACF + BDE - AE^2 - B^2F - CD^2 = 0$$

ist. Das homogene Polynom $\Delta(X_2, X_3)$ hat Grad 5 und besitzt daher genau fünf Nullstellen in \mathbb{P}^1 . Wir müssen daher zeigen, dass diese Nullstellen alle einfach sind. Dies folgt aus dem nächsten Lemma. \square

Lemma 4.4. Das Polynom $\Delta(X_2, X_3)$ hat nur einfache Nullstellen.

Beweis. Sei $(u : v) \in \mathbb{P}^1$ eine Nullstelle von Δ . Mithilfe einer Koordinatentransformation in X_2, X_3 können wir annehmen, dass $(u : v) = (0 : 1)$ ist. Dann ist die entsprechende Ebene Π durch $X_2 = 0$ definiert. Wir müssen also zeigen, dass X_2^2 nicht Δ teilt. Der Durchschnitt $\Pi \cap X$ besteht aus drei Geraden. Wir können unser Problem auf folgende zwei Geradenkonfigurationen in $\Pi : X_2 = 0$ reduzieren:

- (i) $l : X_3 = 0, l_1 : X_0 = 0, l_2 : X_1 = 0,$
- (ii) $l : X_3 = 0, l_1 : X_0 = 0, l_2 : X_0 = X_3.$

Wir betrachten zuerst den Fall (i). In diesem Fall ist

$$f = X_0X_1X_3 + X_2g$$

mit einer quadratischen Form g . Somit ist $B = X_3 + \lambda X_2$ und X_2 teilt A, C, D, E und F . Daher kriegen wir

$$\Delta \equiv -X_3^2F \pmod{X_2^2}.$$

Offensichtlich ist $P = (0, 0, 0, 1) \in X$ und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X_i}(P) &= 0, \quad i = 0, 1, 3, \\ \frac{\partial f}{\partial X_2}(P) &= \frac{\partial F}{\partial X_2}(P).\end{aligned}$$

Weil X nichtsingulär ist, muss $\partial F/\partial X_2(P) \neq 0$ sein, d.h. F enthält $\mu X_2 X_3^2$ für ein $\mu \neq 0$. Daher wird F und somit auch Δ nicht von X_2^2 geteilt. Die Nullstelle ist also einfach.

Kommen wir zum Fall (ii). Dann ist

$$f = X_0 X_3 (X_0 - X_3) + X_2 g$$

mit einer quadratischen Form g . Somit ist $A = X_3 + \lambda X_2$, $D = -X_3^2 + X_2 l$, mit $l = 0$ oder l eine lineare Form. Die Formen B, C, E und F werden daher von X_2 geteilt, die Form D jedoch nicht. Daraus folgt

$$\Delta \equiv -CD^2 \pmod{X_2^2}$$

Analog wie in (i) erhalten wir mit $P = (0, 1, 0, 0) \in X$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X_i}(P) &= 0, \quad i = 0, 1, 3, \\ \frac{\partial f}{\partial X_2}(P) &= g(P).\end{aligned}$$

Wegen der Nichtsingularität von X muss $g(P) \neq 0$ gelten, d.h. g enthält μX_1^2 für ein $\mu \neq 0$. Daher ist C nicht null, also wird $\Delta(X_2, X_3)$ nicht von X_2^2 geteilt. \square

Korollar 4.5. Sei $l \subset X$ eine Gerade von X , dann gibt es in X eine zu l disjunkte Gerade t .

Beweis. Sei s die Gerade l_1 aus Satz 4.3. Da sich l und s schneiden, können wir annehmen, dass $s_1 = l$ ist. Wegen Satz 4.3 (ii) ist beispielsweise $s_2 \subset X$ eine zu l disjunkte Gerade. \square

Lemma 4.6. Sei $l \subset X$ eine Gerade und (l_i, l'_i) die fünf Geradenpaare aus Satz 4.3. Sei $t \subset X$ eine zu l disjunkte Gerade, dann schneidet t genau eine Gerade des Paares (l_i, l'_i) .

Beweis. Sei Π_i die Ebene durch l, l_i, l'_i , dann ist $\Pi_i \cap X = l \cup l_i \cup l'_i$. Die Gerade t schneidet Π_i , also schneidet sie mindestens eine der beiden Geraden l_i, l'_i . Wir nehmen nun an, dass sie beide schneidet. Ist $t \cap l_i \neq t \cap l'_i$, so liegen t, l_i, l'_i in einer Ebene. Ist $t \cap l_i = t \cap l'_i$, so liegen die drei Geraden nach Lemma 4.2 (i) wieder auf einer Ebene. Dies kann aber nicht sein, da t und l disjunkt sind. \square

Definition 4.7. Eine Gerade t heisst *Transversale* einer Geraden l , falls sich l und t schneiden.

Lemma 4.8. Zu drei disjunkten Geraden $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{P}^3$ gibt es eine nicht-degenerierte Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^3$ mit $l_1, l_2, l_3 \subset Q$.

Beweis. Seien P_i, P'_i, P''_i jeweils drei verschiedene Punkte auf der Gerade l_i . Eine Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^3$ ist durch eine Gleichung der Form

$$f(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum_{i_0+\dots+i_3=2} a_{i_0\dots i_3} X_0^{i_0} \cdots X_3^{i_3} = 0$$

gegeben. Setzt man nun obige neun Punkte in die Gleichung $f = 0$ ein, so erhält man neun lineare Gleichungen für die zehn Koeffizienten $a_{i_0\dots i_3}$. Daher gibt es eine nichttriviale Lösung für f . Da die Quadrik $Q = V(f)$ drei verschiedene Punkte von l_i enthält, liegt die Gerade l_i ganz in Q . Wäre Q ein Ebenenpaar, so würden zwei Geraden in einer Ebene liegen und sich somit schneiden, was den Voraussetzungen widerspricht. Also ist Q nicht-degeneriert. \square

Lemma 4.9. Sind $l_1, \dots, l_4 \subset \mathbb{P}^3$ disjunkte Geraden, dann gilt genau einer der folgenden Fälle:

- (i) Alle vier Geraden liegen auf einer nicht-degenerierten Quadrik Q und haben unendlich viele gemeinsame Transversalen.
- (ii) Die vier Geraden liegen auf keiner Quadrik und haben nur eine oder zwei gemeinsame Transversalen.

Beweis. Nach Lemma 4.8 existiert eine nicht-degenerierte Quadrik $Q \supset l_1, l_2, l_3$. In geeigneten Koordinaten ist Q durch $X_0X_3 = X_1X_2$ gegeben. Die Geraden auf Q bilden zwei disjunkte Familien. Die erste Familie enthält dabei die Geraden

$$\mu X_0 - \lambda X_2 = \mu X_1 - \lambda X_3 = 0, \quad (\mu, \lambda) \neq (0, 0)$$

und die zweite jene der Form

$$\mu X_0 - \lambda X_1 = \mu X_2 - \lambda X_3 = 0, \quad (\mu, \lambda) \neq (0, 0).$$

Man vergewissert sich leicht, dass zwei verschiedene Geraden von Q genau dann disjunkt sind, falls sie in derselben Familie liegen. Jede Transversale von l_1, l_2, l_3 hat drei Punkte in Q und liegt somit ganz in Q . Ist l_4 eine Gerade von Q , dann liegen l_1, \dots, l_4 in derselben Geradenfamilie, da sie disjunkt sind.

Daher sind alle Geraden der anderen Familie gemeinsame Transversale der l_i . Deshalb besitzen l_1, l_2, l_3, l_4 in diesem Fall unendlich viele gemeinsame Transversalen. Ist $l_4 \not\subset Q$, dann trifft die Gerade l_4 die Quadrik Q nur in einem oder zwei Punkten. Die gemeinsamen Transversalen liegen in einer fixen Familie und da sie durch einen Schnittpunkt von l_4 mit Q gehen müssen, gibt es nur eine oder zwei. \square

Wir haben nun genug Vorarbeit geleistet um unser Haupttheorem zu beweisen.

Theorem 4.10. Eine nichtsinguläre kubische Fläche $X \subset \mathbb{P}^3$ enthält genau 27 Geraden.

Beweis. Seien l, t zwei disjunkte Geraden von X und (l_i, l'_i) die fünf Paare von Geraden in X , welche l schneiden. Durch Umnummerierung können wir wegen Lemma 4.6 annehmen, dass t die Geraden l_i schneidet. Wir erhalten somit die Geradenkonfiguration aus Abbildung 1.

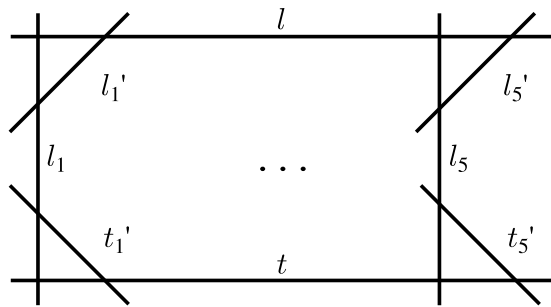


Abbildung 1: Geraden auf einer kubischen Fläche

Aus Satz 4.3 folgt, dass l_i und t_j disjunkt sind für $i \neq j$. Hingegen schneidet jede Gerade von X eine der Geraden l, l_j, l'_j , also schneidet t_i die Geraden l'_j für $j \neq i$. Wir behaupten nun:

- (i) Ist $s \subset X$ eine von den 17 Geraden l, t, l_i, l'_i, t_i verschiedene Gerade, dann schneidet s genau drei der fünf Geraden l_i .
- (ii) Umgekehrt, für jede Wahl von drei Elementen $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es genau eine Gerade $l_{ijk} \subset X$, die l_i, l_j und l_k schneidet.

(i) Liegen vier der Geraden l_1, \dots, l_5 auf einer Quadrik Q , dann haben diese Geraden nach Lemma 4.9 unendlich viele Transversalen. Da eine solche Transversale X in vier Punkten schneidet, liegt sie ganz in X . Sei o.B.d.A. $l_1 \subset Q$. Somit schneiden unendlich viele Geraden von X die Gerade l_1 , dies

ist aber wegen Lemma 4.3 unmöglich. Also sind nach Lemma 4.9 nur l und t gemeinsame Transversale für beliebige vier Geraden l_i . Schneidet s also mehr als drei der Geraden l_i , so ist $l = s$ oder $t = s$, was den Voraussetzungen widerspricht. Schneidet die Gerade s weniger als drei Geraden l_i , dann schneidet sie nach Lemma 4.6 mehr als zwei der l'_i . Durch Umnummerierung können wir annehmen, dass s die Geraden l_1, l'_3, l'_4, l'_5 schneidet. Mit Lemma 4.9 folgt aber wiederum, dass l und t_1 die einzigen gemeinsamen Transversalen dieser vier Geraden sind. Also ist $s = l$ oder $s = t_1$, was erneut ein Widerspruch ist. Also schneidet s tatsächlich genau drei Geraden l_i . Kommen wir zur Behauptung (ii). Sei o.B.d.A. $i = 1$. Es gibt zehn Geraden in X , die l_1 schneiden. Dies sind unter anderem l, l'_1, t, t_1 . Die anderen sechs Geraden müssen genau zwei der vier Geraden l_2, \dots, l_5 treffen. Dafür gibt es genau $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, also treten alle Möglichkeiten auf. Die Fläche X besitzt somit genau die Geraden $l, t, l_i, l'_i, t_i, l_{ijk}$ und dies ergibt genau $1 + 1 + 5 + 5 + 5 + 10 = 27$ Geraden. \square

Literatur

- [1] S. Kleinman & D. Laksov: *Schubert Calculus*, American Mathematical Monthly 1972/2, S. 1061-1082
- [2] I. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1977
- [3] D. Mumford: *Algebraic Geometry I - Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1995
- [4] M. Reid: *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1988
- [5] A. Henderson: *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1911