

Symmetrie und Zahlentheorie am Beispiel von Quasikristallen

Einführungsvorlesung von
Prof. Richard Pink
an der ETH Zürich

gehalten am 12. 4. 2000
um 17:15 Uhr
im Auditorium Maximum
Hauptgebäude der ETH



Inhaltsverzeichnis

1	Symmetrie	2
2	Kristalle	3
3	Eine Beziehung zur Zahlentheorie	5
4	Pflasterungen	7
5	Die Penrose-Pflasterung	8
6	Reale Quasikristalle	9
7	Das Beugungsbild	10
8	Mathematische Quasikristalle	12
9	Quasikristalle und Pisotzahlen	13
10	Weitere praktische Beispiele	13
	Literatur	15
	Folien	17

1 Symmetrie

Unter *Symmetrie* versteht man eine Operation, unter der ein Körper, ein Bild, oder ein Objekt der abstrakten Anschauung in sich übergeht. Die Operation kann zum Beispiel eine Spiegelung, eine Drehung, oder eine Verschiebung (Translation) sein. In höheren Dimensionen sind auch kompliziertere Kombinationen solcher Operationen möglich.

Symmetrie ist eines der fundamentalen Gestaltungsprinzipien der Welt. Für diese Rolle ist es einerlei, ob eine vollständige Symmetrie vorliegt oder ob vielleicht—als Gegenpol—das Fehlen der Symmetrie besonders heraussticht. Zur Einstimmung in diesen Themenkreis zeige ich Ihnen einige wenige Beispiele von Symmetrie aus der belebten Natur.

Folie 1 zeigt eine Blüte der Passionsblume. Fünf von ihren Blütenblättern liegen etwas vor den übrigen fünf. Wenn wir nun die Blüte so drehen, zum Beispiel im Uhrzeigersinn, dass jedes der vorderen Blütenblätter auf ein benachbartes vorderes Blatt zu liegen kommt, so geht die ganze Blüte im wesentlichen in sich über. Ihre Lage hat sich dabei natürlich geändert, aber wenn wir diese Operation fünfmal ausgeführt haben, ist die Ausgangslage wieder erreicht. Man sagt: die Blüte besitzt eine fünfzählige Drehsymmetrie.

Folie 2 zeigt ebenfalls eine fünfzählige Symmetrie anhand einer sich öffnenden Samenkapsel der Blumenbachia hieronymi (Loasaceae). Die Zahl 5 als Drehordnung wird uns im folgenden noch besonders beschäftigen, aber zunächst ein paar weitere Beispiele.

Auf Folie 3 ist nicht, wie man denken könnte, ein Zahnrad zu sehen, sondern ein Querschnitt durch einen Winter-Schachtelhalm. Die Ordnung seiner Drehsymmetrie ist $27 = 3^3$; ob diese Zahl hier eine bestimmte Signifikanz besitzt, weiss ich allerdings nicht.

Folie 4 zeigt die partielle Regelmässigkeit der Blütenanlage des Gänseblümchens. Die Gesamtkonstellation besitzt hier keine echte Symmetrie; nur lokal ist eine solche in Ansätzen erkennbar. Dieser Aspekt, ebenso wie gewisse Prinzipien im Pflanzenwachstum, welche für die Bildung dieser Anordnung verantwortlich sind, haben subtile Gemeinsamkeiten mit Aspekten von Quasikristallen, die ich nachher diskutieren werde.

Folie 5 zeigt einen Querschnitt durch eine Bienenwabe. Diese hat nicht

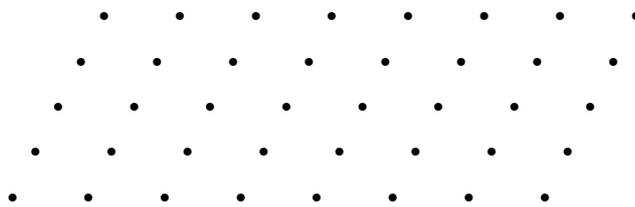
nur Drehsymmetrien, zum Beispiel der Ordnung 6 um den Mittelpunkt jedes Sechsecks, sondern auch Translationen in mehr als einer Richtung der Ebene.

In jedem der genannten Fälle entspringt die Symmetrie nicht primär einer Laune der Natur, sondern hat eine Ursache. Denn die Anforderung, mit möglichst geringen Ressourcen einen möglichst grossen Nutzen zu erzielen, erzwingt oft eine besondere Ordnung und damit eine spezielle Symmetrie.

Auch in der Mathematik spielt Symmetrie eine wesentliche Rolle, denn als Grundprinzip gilt: Man untersucht mathematische Objekte dadurch, dass man ihre Symmetrien klassifiziert. Ein schon in der Antike bekanntes Beispiel ist die Klassifikation der regelmässigen Polyeder, der sogenannten platonischen Körper, die auf Folie 6 zu sehen sind. Jeder dieser Körper besitzt nur endlich viele Symmetrien; die genaue Anzahl ist auf der Folie angegeben. Wie man sieht, ist nur für den Ikosaeder und den Dodekaeder diese Anzahl durch 5 teilbar. Das hängt damit zusammen, dass nur diese beiden platonischen Körper eine Drehsymmetrie der Ordnung 5 besitzen. Beim Ikosaeder zum Beispiel ist dies die Drehung um eine Achse, welche durch zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte geht. An jeder Ecke stossen genau 5 dreieckige Seitenflächen zusammen; jede davon wird durch die Drehung um 72° auf die nächste abgebildet.

2 Kristalle

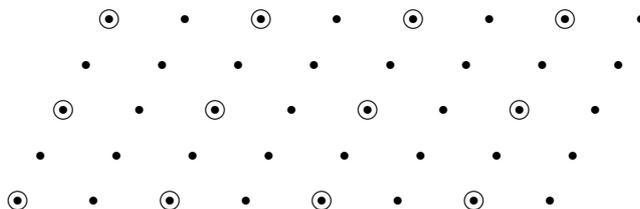
Ein klassisches Beispiel von Symmetrie in der Physik sind die *Kristalle*. Ein Kristall im Sinne der Physik ist dabei eine stabile *periodische* Anordnung von Atomen. Das Wort periodisch bedeutet, dass die Anordnung unter Translationen in genügend viele unabhängige Raumrichtungen in sich übergeht. Für ein mathematisches Modell wird man die Atome einfach als Punkte im Raum ansehen; dann kann man auch die Einschränkung auf den uns umgebenden dreidimensionalen Raum fallenlassen. Ein Kristall im Sinne der Mathematik ist also eine Teilmenge des n -dimensionalen Raums, welche invariant unter Translationen in n unabhängige Raumrichtungen ist. In der Ebene ist also die folgende Menge ein Kristall, wenn man sie sich in alle Richtungen regelmässig fortgesetzt vorstellt:



Denkbare Punktmengen eines Kristalls sind auch auf der linken Seite von Folie 7 zu sehen (auf die rechte Seite kommen wir später zurück). Folie 8 illustriert einen kubischen Kristall der Dimension drei. Die Stützstäbe dienen hier der besseren Visualisierung; für unsere Zwecke sollte man sie sich wegdenken.

Zusätzlich zu Translations-Symmetrien kann ein Kristall auch *Drehsymmetrien* besitzen. Zum Beispiel ist die auf Folie 7 unten links gezeigte Menge invariant unter einer Drehung um 60° , also einer Drehung der Ordnung sechs.

Weiter ist jedes Kristallgitter *L selbstähnlich*, das heisst, es gilt $k \cdot L \subset L$ für jede ganze Zahl k . In dem obigen Beispiel kann man sich das für $k = 2$ so vorstellen, dass man in jede Richtung nur jeden zweiten Punkt auswählt:



Die so entstehende Menge ist einerseits eine Teilmenge der ursprünglichen; andererseits kann man sie auch erhalten, indem man die ursprüngliche Menge in alle Richtungen um den Faktor 2 streckt. Die Kombination dieser beiden Eigenschaften macht die Selbstähnlichkeit aus.

Nun gilt der folgende fundamentale Satz, die sogenannte *kristallographische Restriktion*:

Satz: Ein Kristall der Dimension ≤ 3 kann nur Drehsymmetrien der Ordnung 2, 3, 4, oder 6 besitzen.

Da der Ikosaeder eine fünfzählige Drehsymmetrie besitzt, kann also kein realer, also dreidimensionaler, Kristall den Symmetrietyp des Ikosaeders besitzen. Mathematisch sagt man: Die Ikosaedergruppe kann nicht Symmetriegruppe eines Kristalls der Dimension drei sein.

3 Eine Beziehung zur Zahlentheorie

Für den obigen Satz gibt es verschiedene Beweise; ich möchte hier seine Beziehung zur Zahlentheorie erläutern.

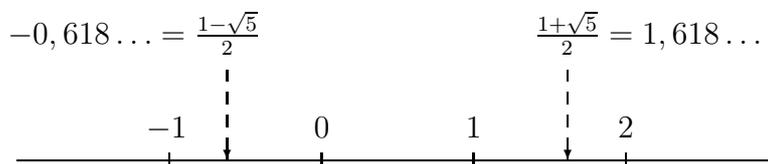
Definition: Eine Zahl x heisst *algebraisch*, falls sie eine Gleichung der Form

$$(*) \quad x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

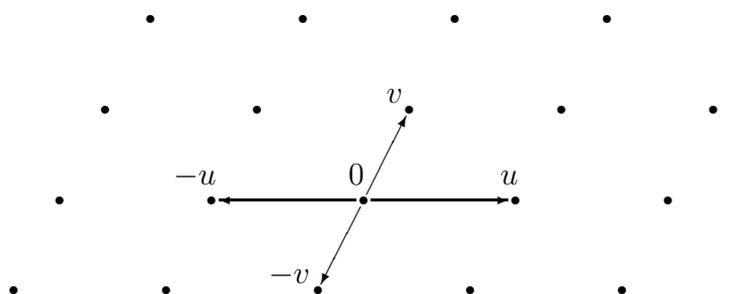
erfüllt mit rationalen Zahlen a_0, a_1, \dots, a_{m-1} .

Definition: Ist x algebraisch, so heisst eine Zahl x' *algebraisch konjugiert* zu x , falls jede Gleichung der Form (*), die für x gilt, auch für x' anstelle von x erfüllt ist.

Zum Beispiel sind die Zahlen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ algebraisch, denn beide erfüllen die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Sie sind ausserdem algebraisch konjugiert zueinander. Das hängt damit zusammen, dass die übliche Wahl von $\sqrt{5}$ als positive Quadratwurzel eben nicht allein auf *Gleichungen* mit rationalen Zahlen beruht, sondern zusätzlich auf der *Ungleichung* $\sqrt{5} > 0$, worin eine etwas andere Art von Information liegt. Die genannten Zahlen liegen auf der Zahlengeraden wie folgt:



Sei nun L ein Gitter der Dimension zwei, sei 0 ein Punkt in L , und seien u und v zwei Erzeugende von L :



Jeder Gitterpunkt lässt sich von dem Punkt 0 aus erreichen, indem man eine bestimmte Anzahl von Schritten in die Richtung von u oder seiner entgegengesetzten Richtung $-u$ geht, und danach eine bestimmte Anzahl von Schritten in die durch v oder $-v$ gegebene Richtung.

Ist α eine Drehung um 0, welche L in sich überführt, so folgt für die Bilder der Erzeugenden

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= au + bv, \\ \alpha(v) &= cu + dv,\end{aligned}$$

für gewisse ganze Zahlen a, b, c, d . Aufgrund des Satzes von Cayley-Hamilton (aus der Vorlesung Lineare Algebra I) gilt daher die folgende Gleichung:

$$(\#) \quad \alpha^2 - (a + d) \cdot \alpha + (ad - bc) = 0.$$

(Dass wir dabei α als eine Zahl auffassen können, ist eine Folge des abstrakten Standpunkts der modernen Mathematik.) Es gilt nun das folgende zahlentheoretische Resultat:

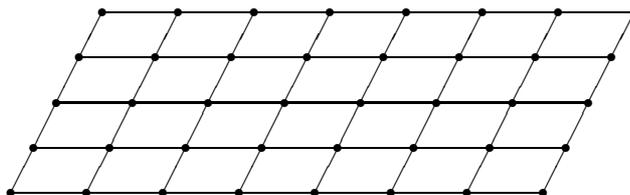
Satz: Nur Drehungen der Ordnung 2, 3, 4, oder 6 können eine Gleichung der Form (#) erfüllen.

Auf den Beweis dieser Aussage möchte ich hier nicht weiter eingehen. Sie ist eine direkte Folge der Tatsache, dass für $n = 5$ oder $n \geq 7$ der Körper der n -ten Einheitswurzeln den Grad ≥ 4 über den rationalen Zahlen hat, was in einer typischen Algebra-Vorlesung bewiesen wird. Mit denselben Methoden kann man die möglichen Drehordnungen von Kristallen beliebiger Dimension bestimmen.

Der Beweis liefert auch feinere Aussagen des folgenden Typs: Ist α eine Symmetrie der Ordnung 5 eines Kristalls, so gibt es eine Ebene, auf der α eine Drehung um 72° ist, und eine dazu senkrechte Ebene, auf der α eine Drehung um 144° ist. Insbesondere muss also die Dimension des Raums mindestens $2 + 2 = 4$ sein.

4 Pflasterungen

Kehren wir für einen Augenblick zu Kristallen in der Ebene zurück. Wenn wir jeweils benachbarte Punkte eines solchen Kristalls durch geeignete Linien miteinander verbinden, so erhalten wir eine Aufteilung der Ebene in kompakte Bausteine, in dem folgenden Beispiel also in Parallelogramme:



Jede solche Aufteilung der Ebene nennt man eine *Pflasterung*. Kristalle entsprechen periodischen Pflasterungen, und bei diesen hat jeder der unendlich vielen Bausteine nur eine von endlich vielen möglichen Formen. Periodische Pflasterungen sind sehr verbreitet; höchstwahrscheinlich sehen Sie tagtäglich Ausschnitte davon in Ihrem Badezimmer, auf dem Gehweg, auf dem Karopapier, und so weiter. Die Ränder der Bausteine müssen nicht notwendigerweise gerade sein, sie müssen nur lückenlos zusammenpassen. Solche Pflasterungen können Sie zum Beispiel auf dem Boden der Gullischen Ehrenhalle in der Mitte des Hauptgebäudes der ETH finden. Der niederländische Künstler Maurits Escher (1898–1972) hat viele ansprechende Muster auf diesem Prinzip entwickelt, wie zum Beispiel dasjenige auf der vorderen Umschlagseite.

Was hier in Dimension zwei erklärt wurde, gilt entsprechend in jeder höheren Dimension. Zum Beispiel ist eine „Pflasterung“ in Dimension drei eine lückenlose Zerlegung des Raumes in einzelne kompakte Körper, zum Beispiel in Polyeder. Nur ist es für uns Menschen schwer, eine solche Zerlegung zu visualisieren.

5 Die Penrose-Pflasterung

Im Jahr 1974 konstruierte Roger Penrose eine bestimmte Pflasterung der Ebene, von der ein Ausschnitt auf der hinteren Umschlagseite zu sehen ist, dargestellt mit echten Kacheln. Sie besteht aus Bausteinen von nur zwei verschiedenen Formen und weist eine fünfzählige Drehsymmetrie auf. In der Abbildung liegt der Drehpunkt in einem gelben Stern in der unteren rechten Hälfte des Bildes. Aufgrund dieser Drehsymmetrie und des Satzes aus Abschnitt 2 kann die Pflasterung nicht periodisch sein.

Folie 9 zeigt das Linienmuster eines grösseren Ausschnitts, Folie 10 eine um den Faktor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ verkleinerte Penrose-Pflasterung; bei beiden liegt der Drehpunkt in der Mitte. Legt man beide Folien aufeinander, so erkennt man, dass jede Ecke der gröberen Pflasterung auch eine Ecke der feineren Pflasterung ist. Das Bildungsprinzip, wie man durch Hinzunahme neuer Eckpunkte und Umarrangieren der Kanten eine feinere Penrose-Pflasterung erzeugen kann, ist auf Folie 11 dargestellt. Dies ist die gleiche Art von *Selbstähnlichkeit* wie bei Kristallen, nur dass in diesem Fall der Streckungsfaktor eine irrationale Zahl ist.

Erinnern wir uns nun für einen Augenblick daran, dass ein Kristall im Prinzip nur aus einer Menge von isolierten Punkten besteht. Denn die hypothetischen Verbindungslinien zwischen benachbarten Atomen in einem realen Kristall besitzen keine physikalische Realität. Natürlich bekommt man aus einer periodischen Pflasterung einen Kristall, indem man alle Kanten weglässt und nur die Eckenmenge beibehält. Was geschieht, wenn man das Entsprechende mit der Penrose-Pflasterung macht?

Die Eckenmenge der Penrose-Pflasterung ist ein Beispiel für einen *Quasikristall*; ein Ausschnitt davon ist auf Folie 12 zu sehen. Anders als bei einem Kristall erkennt man hier auf den ersten oder zweiten Blick keine Regelmässigkeit. Es fällt lediglich auf, dass der Abstand zweier benachbarter Punkte nie wesentlich von einem bestimmten Mittelwert abweicht, wie man es ja von einem dichten Arrangement realer Atomen erwarten darf. Dasselbe gilt zwar auch in einer Flüssigkeit oder einem Glas, aber davon abgesehen ist bei diesen die Anordnung im wesentlichen zufällig. Im vorliegenden Fall wird aber durch Hinzufügen der Kanten, indem man Folie 13 darüberlegt, plötzlich ein gewisses Bildungsprinzip sichtbar. Aus grösserer Entfernung kann man auch an der Eckenmenge allein eine Struktur erkennen: Wie auf Fo-

lie 14 zu sehen, neigen die Punkte dazu, sich bevorzugt entlang bestimmter Richtungen anzuordnen, deren Winkel zueinander hier jeweils Vielfache von 36° betragen.

Die Drehordnung 5 ist nicht die einzige, für die eine solche seltsame Pflasterung existiert. Es gibt Pflasterungen mit 8- oder 12-zähliger Symmetrie, und auch höhere Ordnungen sind prinzipiell möglich. Folie 15 zeigt eine Pflasterung mit 8-facher Symmetrie.

Bald nach Penrose konstruierte Ammann eine Pflasterung des dreidimensionalen Raums, welche dieselbe Symmetrie wie ein Ikosaeder besitzt und dabei aus zwei verschiedenen Typen von Parallelepipedon besteht. Wie im ebenen Fall folgt, dass diese Pflasterung nicht periodisch sein kann. Sie ist wiederum selbstähnlich. Die einzelnen Bausteine und zwei mögliche lokale Anordnungen sind auf Folie 16 zu sehen. Folie 17 zeigt eine ungefähr ebene Schicht dieser Pflasterung unter Zentralprojektion. Die Eckenmenge dieser dreidimensionalen Pflasterung ist wieder ein Beispiel eines Quasikristalls.

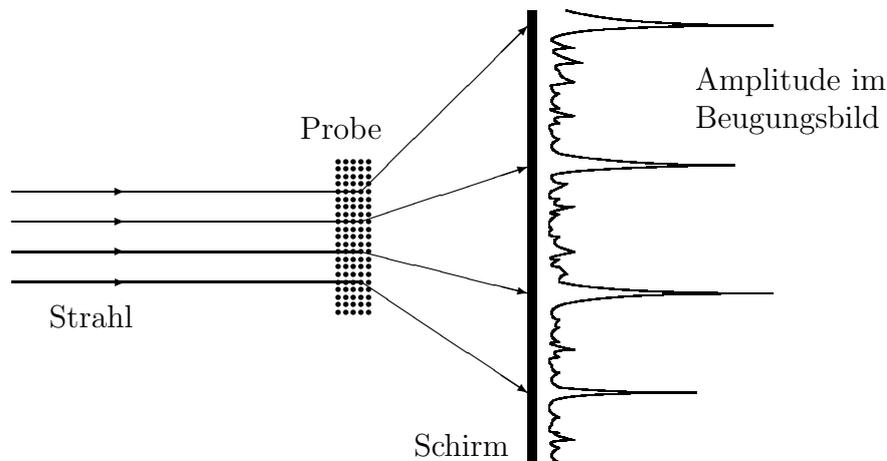
6 Reale Quasikristalle

Im Jahr 1984 gelang es Physikern zum ersten Mal, bewusst einen realen Quasikristall herzustellen. Bei der damals entwickelten Methode wird eine flüssige Metall-Legierung (MnFeCr, MnAl, AlCuFe, . . .) auf eine Fläche gespritzt, wo sie sich so schlagartig abkühlt, dass die Atome keine Zeit finden, sich zu einem klassischen Kristall anzuordnen. Unter bestimmten Bedingungen ist das energetisch günstigste Arrangement dann ein Quasikristall. Das so erhaltene Material ist aber in der Regel thermisch nicht stabil; bei Erwärmung geht es von selbst in eine kristalline Phase über.

Später lernte man auch stabile Quasikristalle zu züchten, z.B. aus LiCu-Al. Amüsanterweise war eines dieser Materialien bereits seit dem Jahr 1955 bekannt; man konnte sich damals nur dessen Symmetrieeigenschaften nicht richtig erklären. Diese stabilen Quasikristalle können einen Durchmesser von bis zu mehreren Zentimetern erreichen; ein paar Beispiele sind auf den Folien 18 und 19 abgebildet.

7 Das Beugungsbild

Woran erkennt man nun einen Quasikristall? Genau wie bei klassischen Kristallen an seinem *Beugungsbild*. Dafür bestrahlt man die Materialprobe mit Photonen, Elektronen, oder Neutronen; diese werden auf bestimmte Weise abgelenkt und ergeben auf einem Schirm, zum Beispiel einer photographischen Platte, ein charakteristisches Muster:



Dabei tritt jede Symmetrie der Probe, in etwas modifizierter Form, stets auch als Symmetrie des Beugungsbilds auf. Insbesondere ist das Beugungsbild jedes Kristalls wieder periodisch, wie man auf der rechten Seite von Folie 7 erkennen kann. Auch die Drehsymmetrien übertragen sich auf das Beugungsbild, wie in dem unteren Beispiel von Folie 7. Ausserdem besteht das Beugungsbild eines Kristalls aus isolierten *scharf definierten Maxima*. Das Beugungsbild eines amorphen Materials ist dagegen kontinuierlich.

Das Beugungsbild eines Quasikristalls ähnelt auf den ersten Blick dem eines Kristalls. Ein Beispiel ist auf Folie 20 zu sehen. Es besitzt wieder die fünfzählige Symmetrie des Ausgangsmaterials und besteht aus einzelnen hellen Punkten. Allerdings sind diese nur scheinbar isoliert voneinander. In Wirklichkeit kann man mathematisch beweisen, dass das Beugungsbild aus einzelnen Peaks besteht, die *dicht* in der Ebene liegen. Die Amplitude der Peaks geht aber lokal so schnell gegen Null, dass in der Praxis nur eine diskrete Punktmenge über der gegebenen Messungenauigkeit liegt. Auf

Folie 21 ist die Amplitudenverteilung im eindimensionalen Fall noch einmal graphisch dargestellt. Besonders in dem oberen Bild sieht man gut, wie die grossen Peaks verschiedener Höhe (die wohldefinierte Abstände voneinander haben) aus einem Meer von kleinen Peaks herausragen.

Das Beugungsbild eines Quasikristalls besteht also aus einzelnen Punkten verschiedener Helligkeit, genau wie der uns umgebende Sternenhimmel. Auch bei diesem kann man anhand der Helligkeits-Information allein nicht ohne weiteres ausschliessen, dass es unendlich viele Sterne geben könnte. Denn je weiter weg ein Stern sich befindet, desto weniger Licht erreicht uns von dort; deshalb sehen wir auch bei jeder denkbaren Auflösung stets nur endlich viele Sterne.

In der heutigen Physik werden Quasikristalle genau durch die genannten Eigenschaften der Beugungsbilder charakterisiert:

Definition: Ein Material heisst *Quasikristall*, wenn seine Beugungsbilder aus einzelnen Punkten bestehen, die zwar nicht isoliert liegen müssen, aber deren Amplitude lokal sehr schnell gegen Null geht, und wenn das Material nicht schon ein Kristall ist.

In dem konkreten Beispiel auf Folie 20 kann man sofort erkennen, dass es sich nicht um einen klassischen Kristall handeln kann, denn sonst wäre das Beugungsbild ja gleichzeitig periodisch und drehsymmetrisch der Ordnung 5, was nach dem Satz aus Abschnitt 2 unmöglich ist. Unabhängig davon konnte das auch durch Elektronenmikroskopie bestätigt werden: die auf Folie 22 sichtbar gemachten einzelnen Atome ordnen sich auf ähnliche Weise an wie die Punkte auf Folie 14.

8 Mathematische Quasikristalle

Für die mathematische Beschreibung von Quasikristallen gibt es mehrere nicht ganz äquivalente Möglichkeiten. Ich lege hier eine Definition von Meyer zugrunde. Zunächst präzisiert man die Eigenschaft, dass der Abstand zweier benachbarter Punkte nie zu gross oder zu klein wird und dass die Punkte sich über den gesamten Raum erstrecken:

Definition: Eine Menge L im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n heisst *Delone-Menge*, falls es Zahlen $R > r > 0$ gibt, so dass gilt:

- (a) Jede Kugel vom Radius r trifft L höchstens einmal, und
- (b) Jede Kugel vom Radius R trifft L mindestens einmal.

Sodann fordert man die folgende Quasi-Periodizität:

Definition: Eine Delone-Menge L im \mathbb{R}^n heisst *Meyer-Menge*, falls eine endliche Teilmenge F im \mathbb{R}^n existiert, so dass

$$L - L \subset L + F,$$

das heisst, dass

$$\{x - y \mid x, y \in L\} \subset \{x + z \mid x \in L, z \in F\}.$$

Bildlich gesprochen, geschieht hier folgendes. Für je zwei Punkte x und y in L verschieben wir die Menge L so, dass x in y übergeht. Die resultierende Menge heisst ein Translat von L . Ist L ein Gitter, so sind alle diese Translate gleich L . Für eine Meyer-Menge wird dagegen nur gefordert, dass alle diese Translate schon in einer Vereinigung von endlich vielen Translaten enthalten sind.

Das mathematische Äquivalent des Beugungsbilds einer Punktmenge ist die Fouriertransformierte der entsprechenden Dirac-Distribution. Für sie kann man nun die folgende mathematische Aussage beweisen:

Satz: Die Fouriertransformierte einer Meyer-Menge ist eine abzählbare Summe von Dirac-Massen.

Also erfüllt jede Meyer-Menge die in Abschnitt 7 angegebene physikalische Charakterisierung von Quasikristallen, wenn sie nicht schon periodisch ist.

9 Quasikristalle und Pisotzahlen

Die Eckenmenge der Penrose-Pflasterung ist eine Meyer-Menge. Darüberhinaus ist sie selbstähnlich mit dem Faktor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (vergleiche Abschnitt 5). Für allgemeine selbstähnliche Meyer-Mengen hat man das folgende zahlentheoretische Resultat:

Satz (Meyer [15]): Sei L eine Meyer-Menge und α eine reelle Zahl > 1 mit $\alpha \cdot L \subset L$. Dann ist α eine algebraische Zahl, und alle von ihr verschiedenen Konjugierten haben Absolutbetrag ≤ 1 .

Solche Zahlen α heissen *Pisot-Zahlen* oder *Salem-Zahlen*, je nachdem, ob alle Konjugierten Absolutbetrag < 1 haben oder eine Konjugierte mit Absolutbetrag $= 1$ existiert. Die für viele reale Quasikristalle relevante Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine Pisot-Zahl (vergleiche Abschnitt 3), aber auch andere Pisot-Zahlen sind denkbar.

10 Weitere praktische Beispiele

Zum Schluss des Vortrags möchte ich noch zwei weitere Beispiele von Quasikristallen aus der Praxis erwähnen.

Folie 23 zeigt eine ebene Pflasterung mit näherungsweise Drehsymmetrie der Ordnung 17. Ihre Eckenmenge ist ein Quasikristall. Dieses Arrangement hat, was das Bildungsprinzip, die Selbstähnlichkeit und anderes betrifft, gewisse Gemeinsamkeiten mit der auf Folie 4 gezeigten Blütenanlage des Gänseblümchens.

Das letzte Beispiel betrifft *Resonanzmuster* in einer Flüssigkeit. Während der Behälter bestimmten Schwingungen oder Überlagerungen davon unterworfen wird, registriert man die resultierenden Muster auf der Flüssigkeitsoberfläche. Im einfachsten Fall von Folie 24 entstehen konzentrische Kreise, die wohl den meisten Menschen aus eigener Erfahrung vertraut sind, zum Beispiel von der Kaffeetasse, wenn an den Tisch gestossen wird. Andere rotationsymmetrische Muster, wie das auf Folie 25 mit 32-zähliger Dreh-symmetrie, sind bereits wohlbekannt als Schwingungsmuster einer kreisrunden Trommel; sie werden mathematisch beschrieben mittels Besselfunktionen. Auch das Entstehen sozusagen kristalliner Muster, wie des auf Folie 26,

ordnet sich auf den zweiten Blick in die Reihe bekannter Phänomene ein, wenn man an die regelmässigen Bewegungsmuster von Gasen und Flüssigkeiten bei äusserer Energiezufuhr, zum Beispiel in der Atmosphäre oder in einem Kochtopf, denkt. Dass aber auch nichtperiodische quasikristalline Muster auftreten, wie auf den Folien 27 und 28 mit 12-zähliger Drehsymmetrie, bleibt wirklich überraschend.

Leider ist es eher unwahrscheinlich, dass solche Muster mit ad-hoc-Mitteln wie dem Wein, der bei dem nachfolgenden Apéro gereicht wird, sichtbar zu machen sind. Ich hoffe dennoch, dass Sie dem Getränk gut zusprechen werden. Ich hoffe ausserdem, dass ich Sie mit diesem Vortrag davon überzeugen konnte, dass wir überall von interessanter Mathematik umgeben sind, die darauf wartet, verstanden zu werden. Dabei hat insbesondere auch die Zahlentheorie ihren wichtigen Platz. Ich bedanke mich für Ihr Interesse.

Prof. Richard Pink
Departement Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich
e-mail: pink@math.ethz.ch

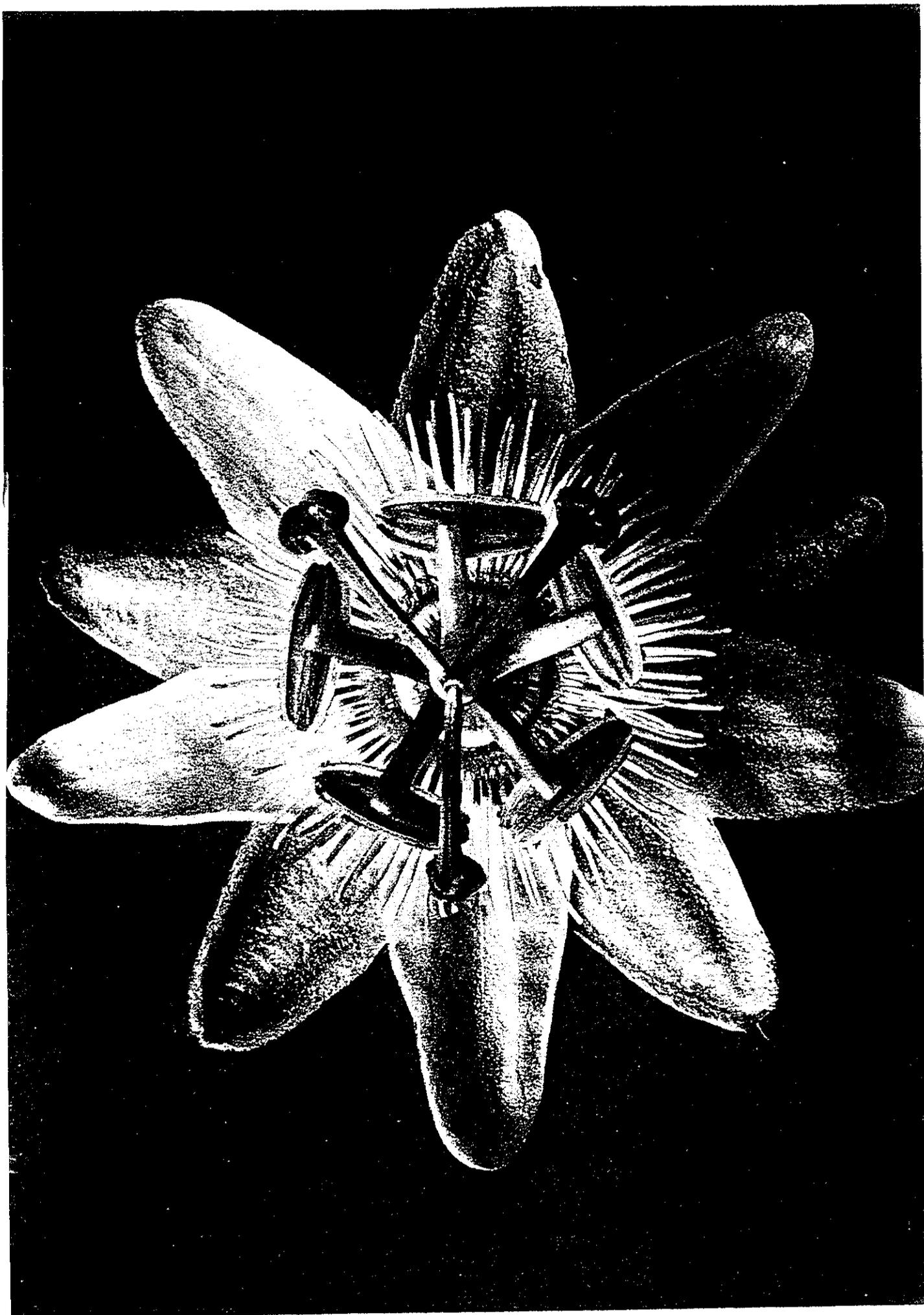
Literatur

- [1] Berman, S., Moody, R.V., The algebraic theory of quasicrystals with five-fold symmetries, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), 115–129.
- [2] Blossfeldt, K., Sachsse, R., *Karl Blossfeldt, photographs 1865 - 1932* Köln etc.: Taschen (1996).
- [3] *Beyond quasicrystals*, Papers from the Winter School held in Les Houches, March 7–18, 1994. Axel, F., Gratias, D. (Eds.), Berlin: Springer-Verlag (1995).
- [4] Conway, J.H., Knowles, K.M., Quasiperiodic tiling in two and three dimensions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** (1986), 3645–3653.
- [5] Edwards, W.S., Fauve, S., Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment, *J. Fluid Mech.* **278** (1994), 123–148.
- [6] Ernst, B., Escher, M.C., *Der Zauberspiegel des Maurits Cornelis Escher*, Berlin: Taco (1986).
- [7] *From number theory to physics*, Papers from the Meeting on Number Theory and Physics held in Les Houches, March 7–16, 1989. Waldschmidt, M., Moussa, P., Luck, M., Itzykson, C. (Eds.). Berlin: Springer-Verlag (1992).
- [8] Grünbaum, B., Shephard, G.C., *Tilings and patterns*. New York: W. H. Freeman and Company (1987).
- [9] *Introduction to the mathematics of quasicrystals*, Jarić, M.V. (Ed.) Aperiodicity and Order, 2. Boston: Academic Press (1989).
- [10] Katz, A., Introduction aux quasicristaux, Sémin. Bourbaki vol. 1997/98, *Astérisque* **252** (1998) exp. 838, 81–103.
- [11] Lagarias, J.C., Meyer’s Concept of Quasicrystal and Quasiregular Sets, *Commun. Math. Phys.* **179** (1996), 365–376.
- [12] Lagarias, J.C., Geometric Models for Quasicrystals I. Delone Sets of Finite Type, *Discrete Comput. Geom.* **21** (1999), 161–191.

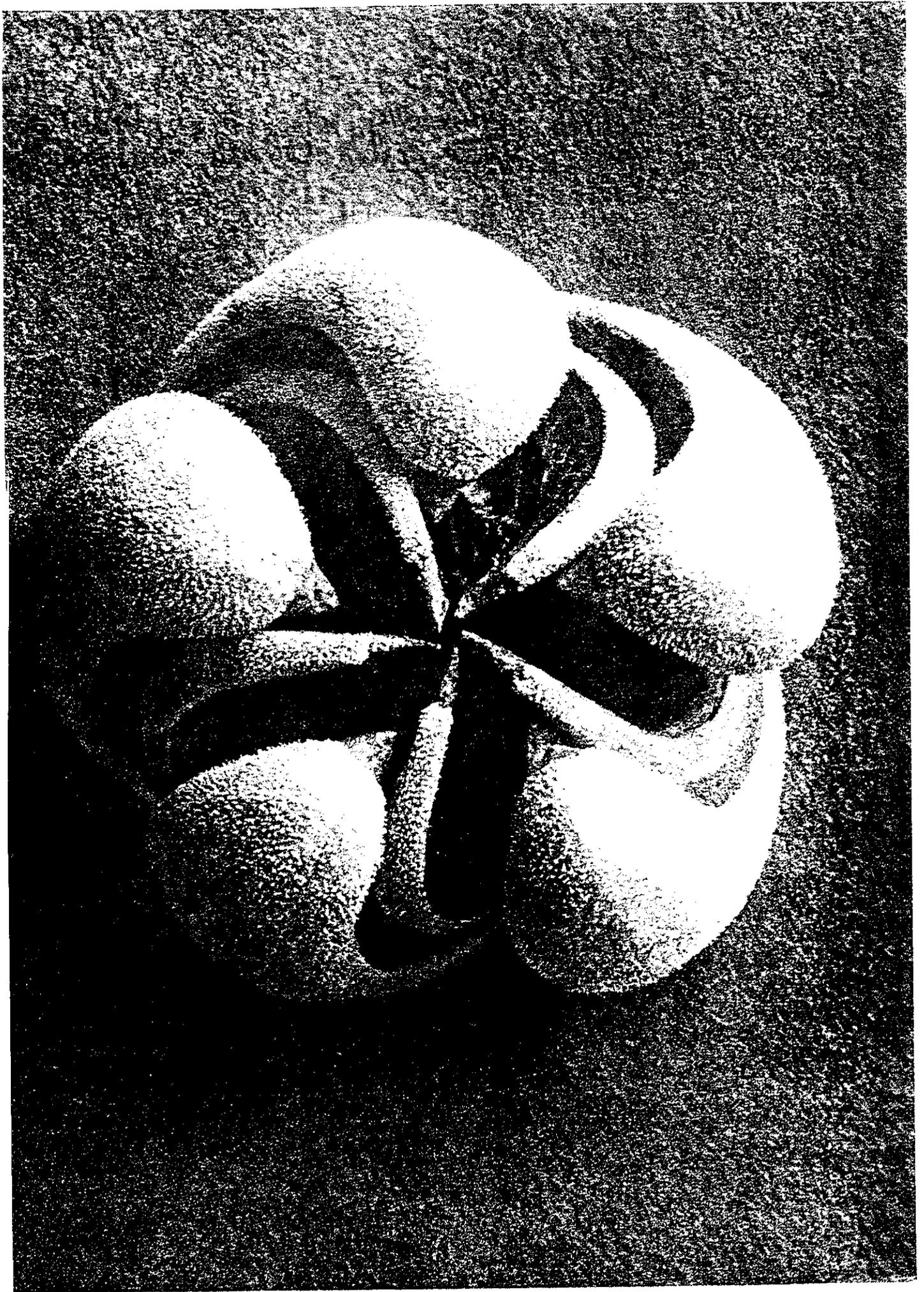
- [13] Luck, J.M., Aperiodic structures: geometry, diffraction spectra, and physical properties, in: *Fundamental problems in statistical mechanics*, VIII (Altenberg, 1993), Amsterdam: North-Holland (1994), 127–167.
- [14] *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, Moody, R.V. (Ed.), Dordrecht: Kluwer (1997).
- [15] Meyer, Y., Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers, in: [3], 3–16.
- [16] Moody, R.V., Patera, J., Quasicrystals and icosians, *J. Phys. A* **26** (1993), no. 12, 2829–2853.
- [17] *From Quasicrystals to More Complex Systems*, Axel, F., Denoyer, F., Gazeau, J.-P. (Eds.), in press (2000).
- [18] Nelson, D.R., Quasikristalle, in: *Chaos und Fraktale*, Jürgens, H. (Ed.) Heidelberg: Spektrum d. Wiss. (1989), 154–163.
- [19] *The physics of quasicrystals*, Steinhardt, P.J., Ostlund, S. (Eds.) Singapore: World Scientific Publishing Co. (1987).
- [20] Penrose, R., Pentaplexity, *Math. Intelligencer* **2** no.1 (1979), 32–37.
- [21] Rivière, N., A botanical quasicrystal. International workshop on aperiodic crystals (Les Houches, 1986). *J. Physique* **47** (1986), no. 7 Suppl. Colloq. C3, C3-299–C3-309.
- [22] Senechal, M., Taylor, J., Quasicrystals: The View from Les Houches, *Math. Intelligencer* **12** no.2 (1990), 54–64.
- [23] Senechal, M., *Quasicrystals and geometry*, Cambridge: Cambridge Univ. Press (1995).

Folien

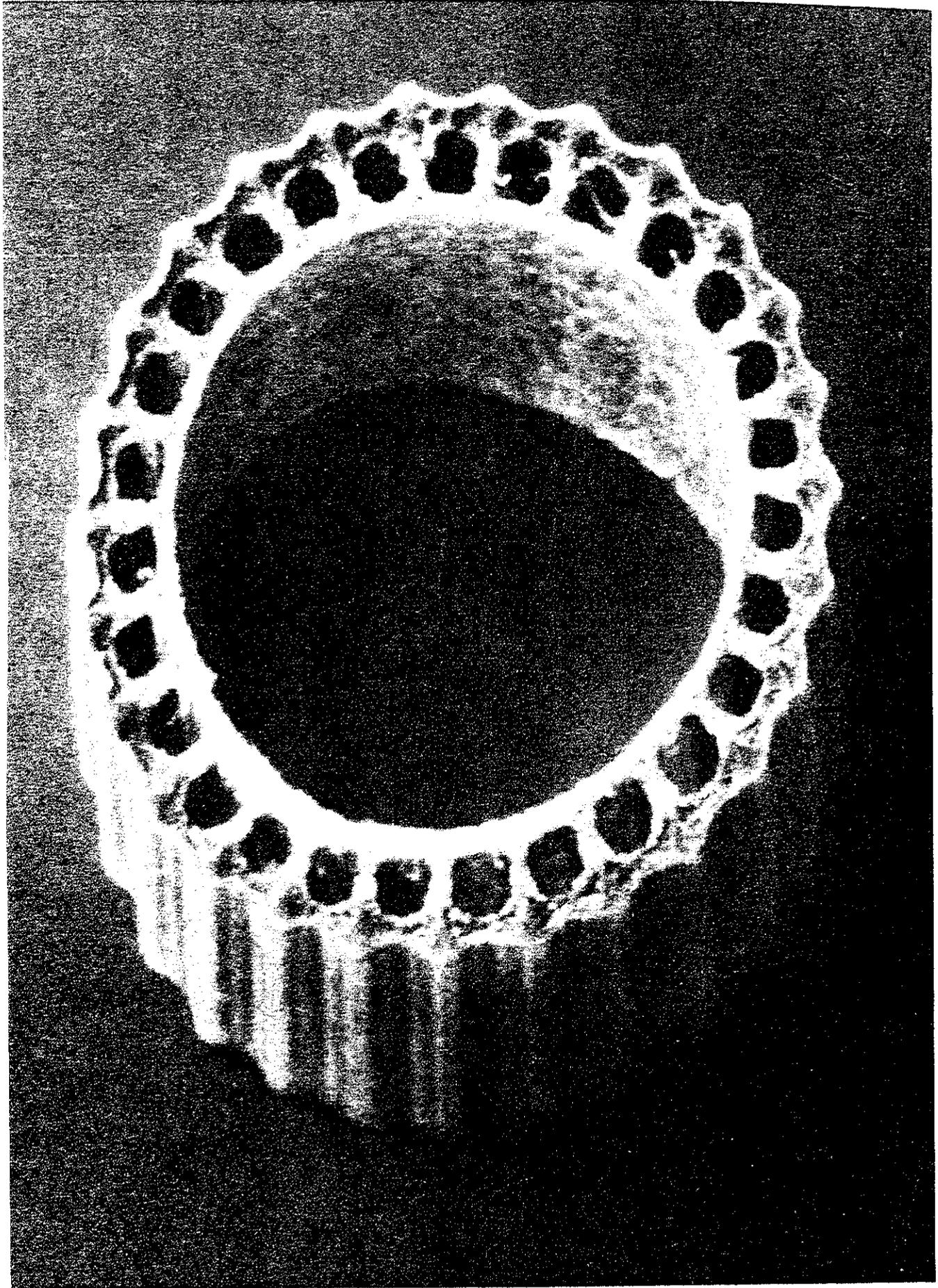
vordere Umschlagseite: Postkarte
hintere Umschlagseite: [18]
Folien 1–3: [2]
Folien 4, 23: [21]
Folien 5–6: ?
Folien 7, 12–13: [23] pp.40, 54–55
Folie 8: [6]
Folien 9–11: [8] pp.544–545
Folie 14: [16]
Folien 15, 18–19: [13]
Folien 16–17: [9] pp.157, 166, 121
Folien 20, 22: [19] pp.238, 192
Folie 21: [3] p.217
Folien 24–28: [5]

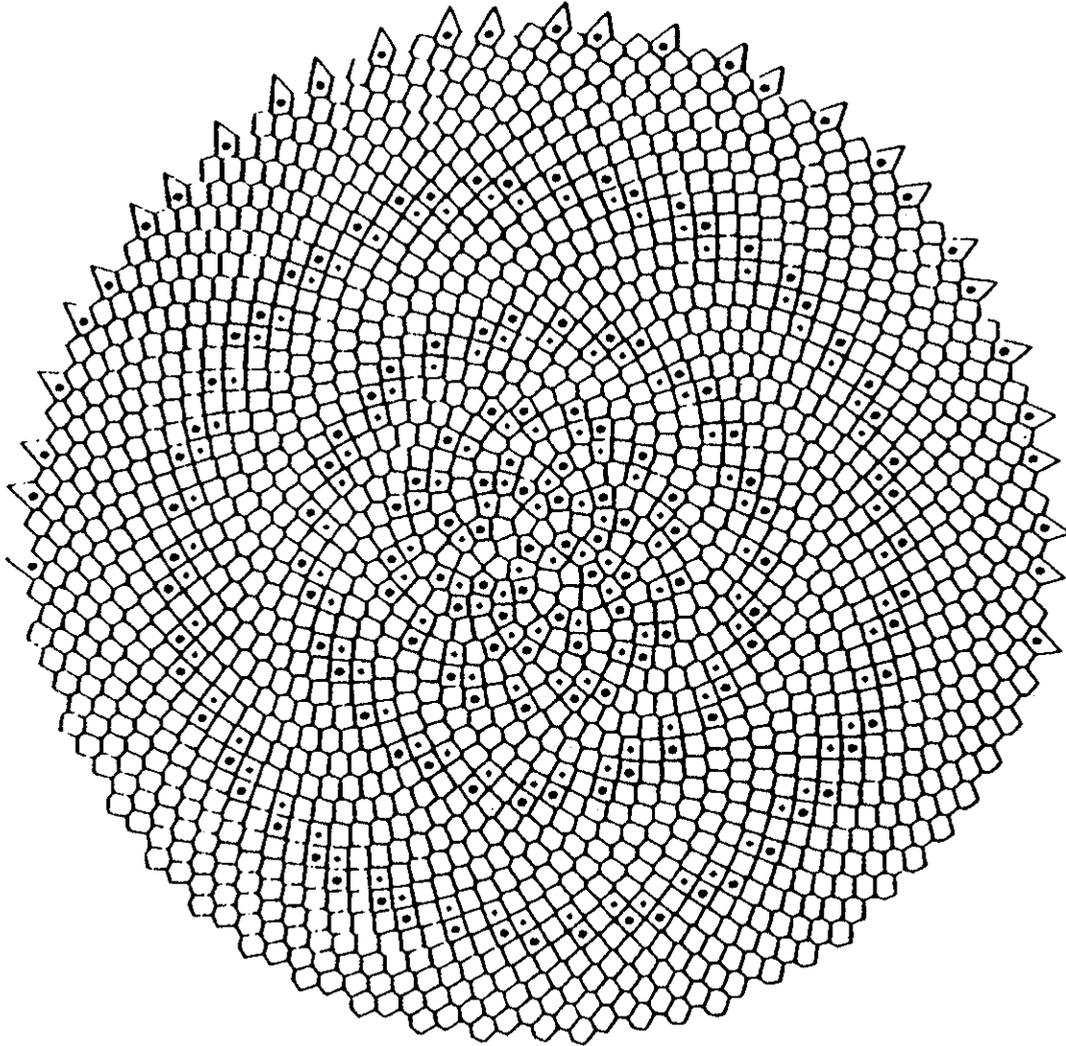


Folie 1



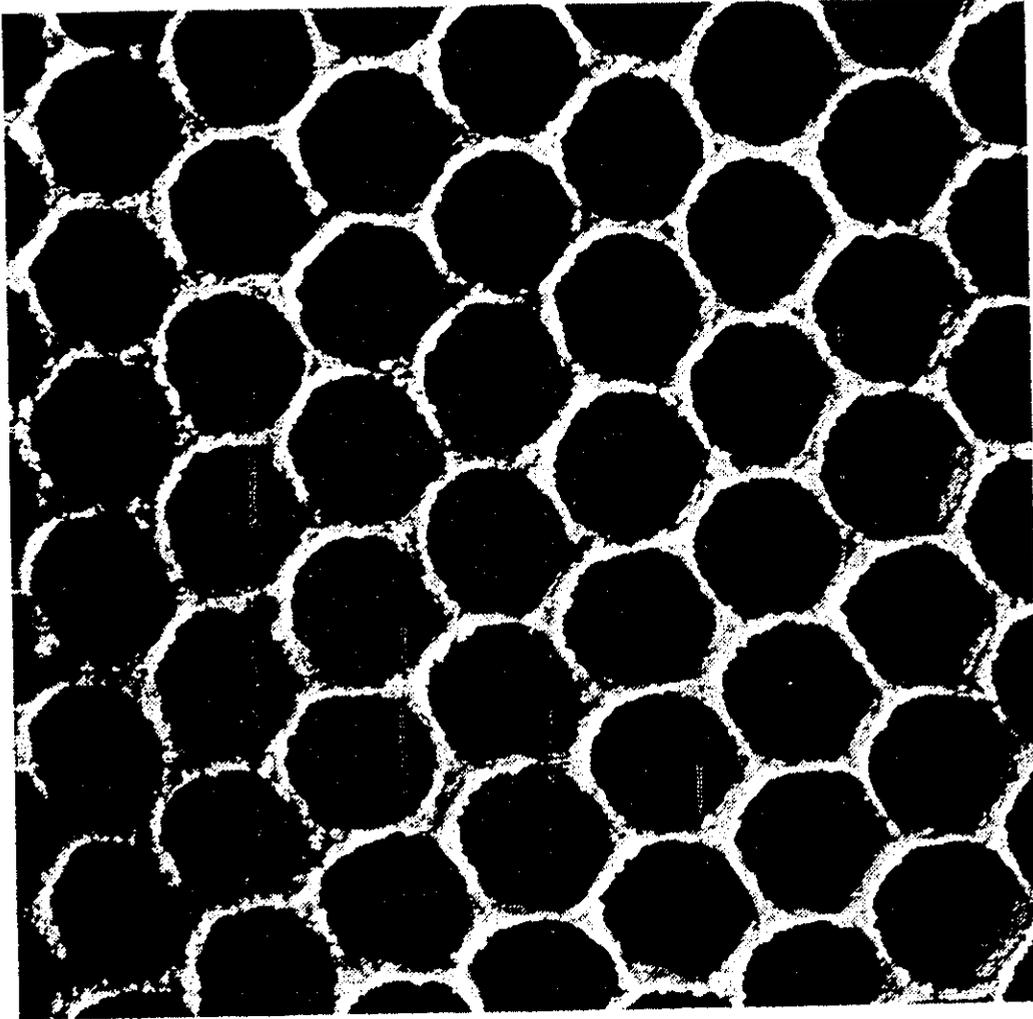
olie 2





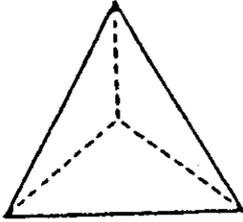
- The Daisy. Florets are Voronoi cells of seeds given by
(1). All are hexagonal, except o = pentagon, + = heptagon.
= dislocation. From R. Occelli, ref. [12].

Geometric Forms in Nature



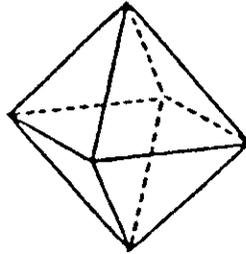
Comb of the honeybee. *Photo: Elvia Hansen.*

The Regular Polyhedra



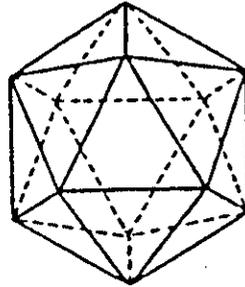
Tetrahedron

24



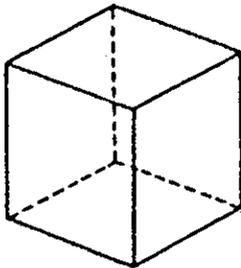
Octahedron

48



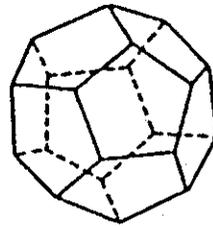
Icosahedron

120



Hexahedron

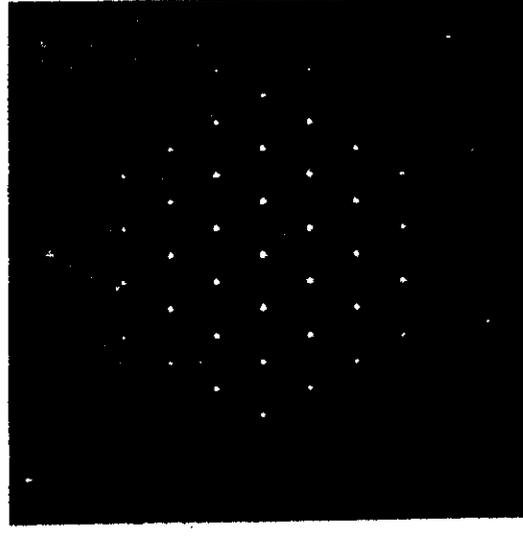
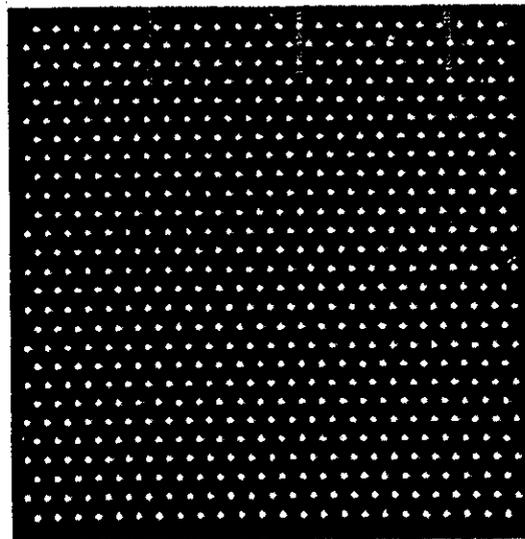
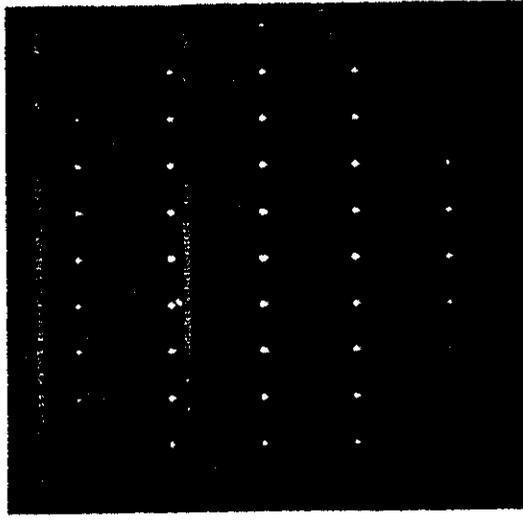
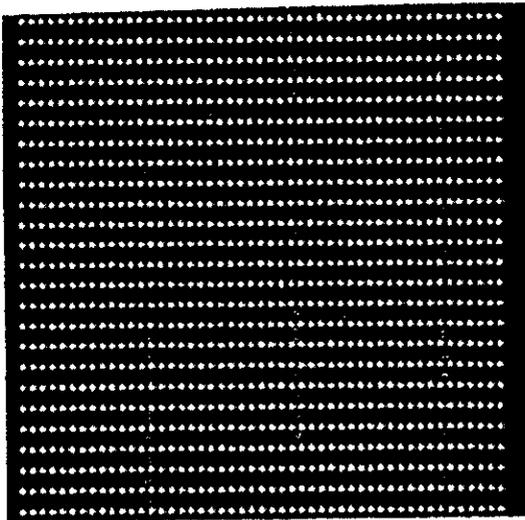
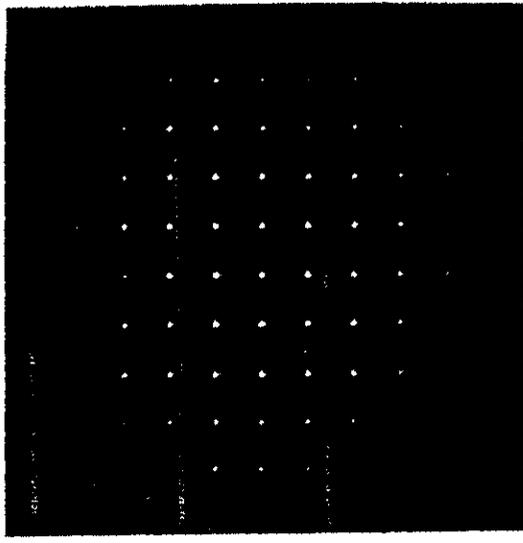
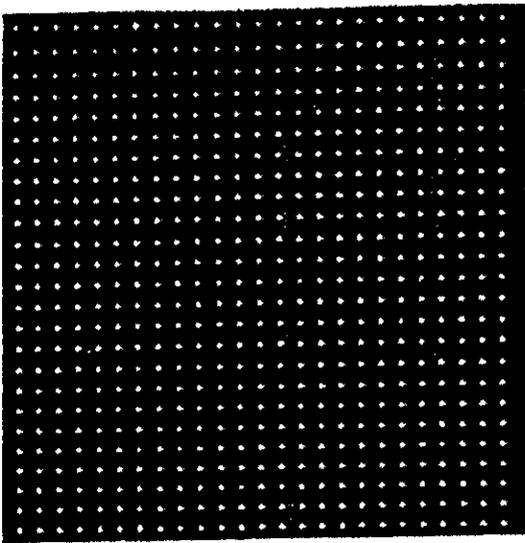
48



Dodecahedron

120

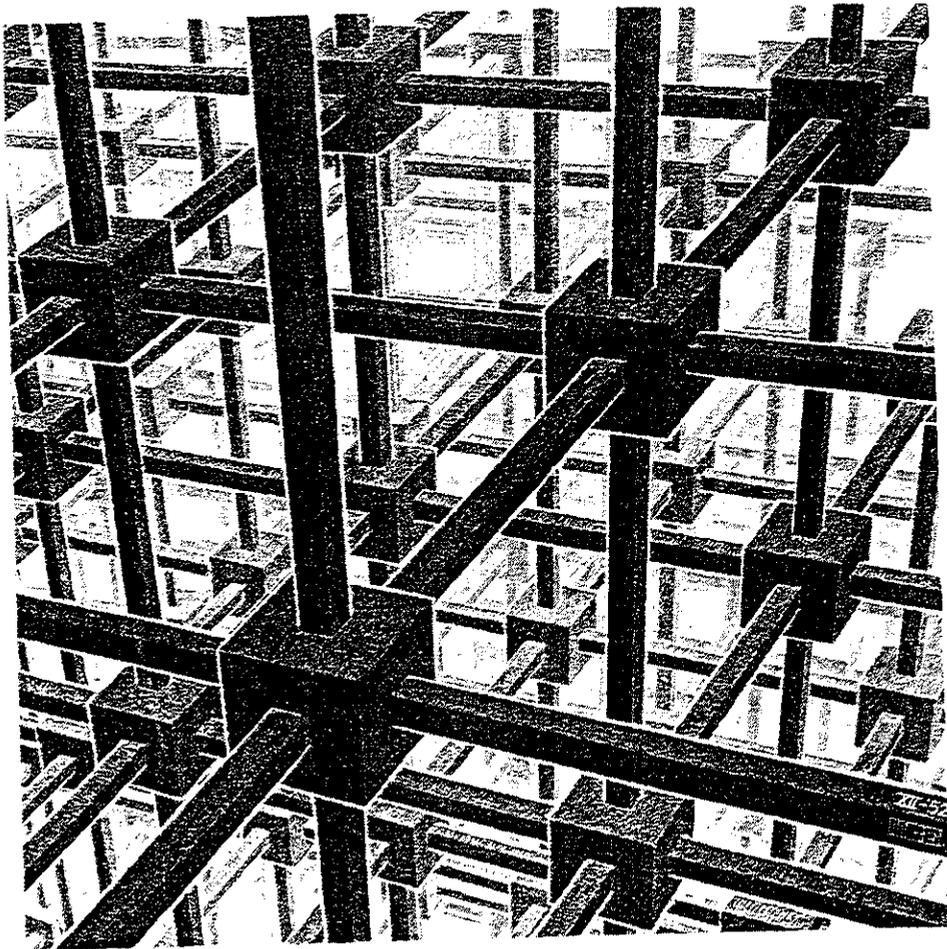
Ikosaeder und Dodekaeder
sind die einzigen mit einer
fünfzähligen Symmetrie.



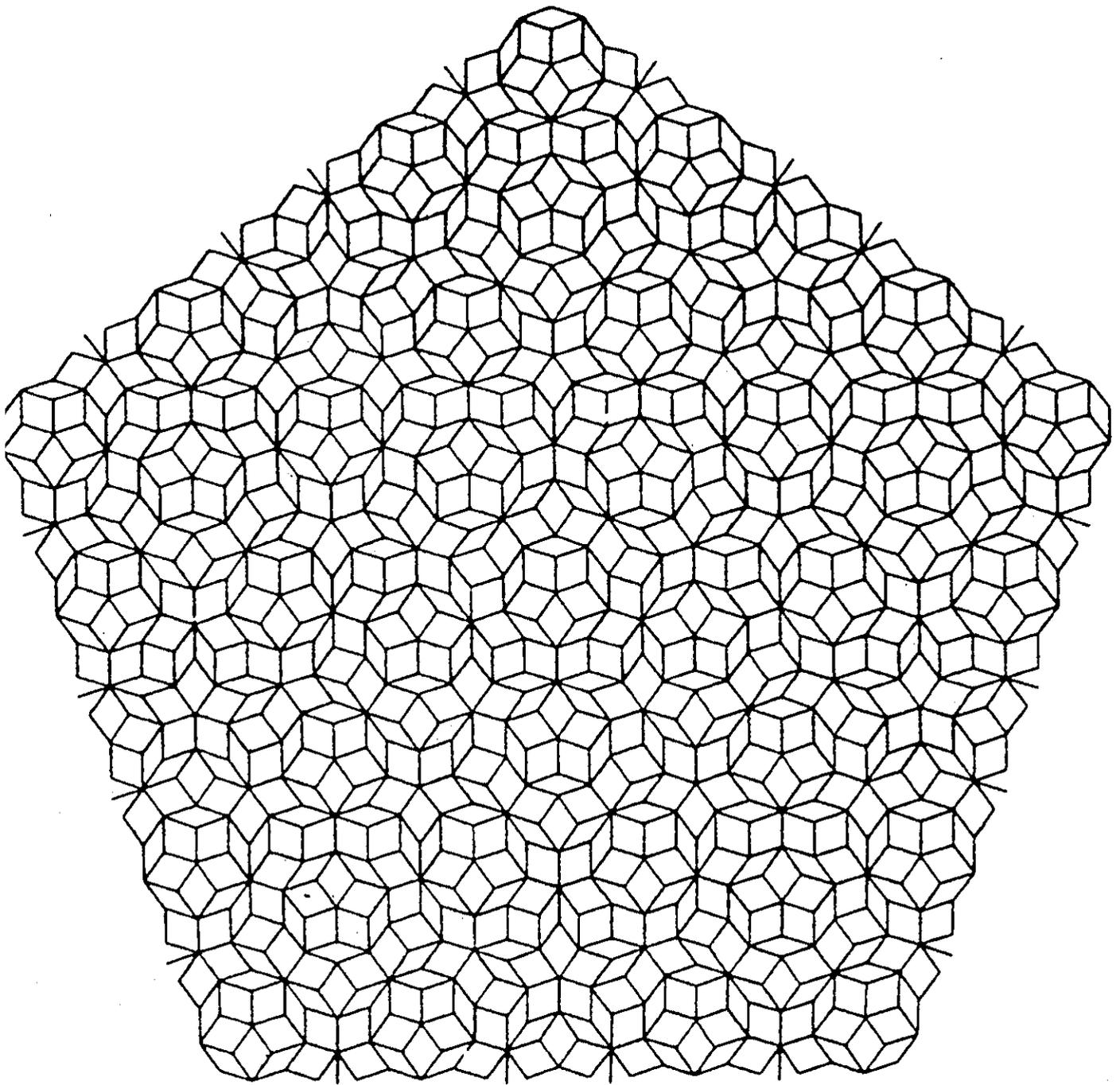
(a)

(b)

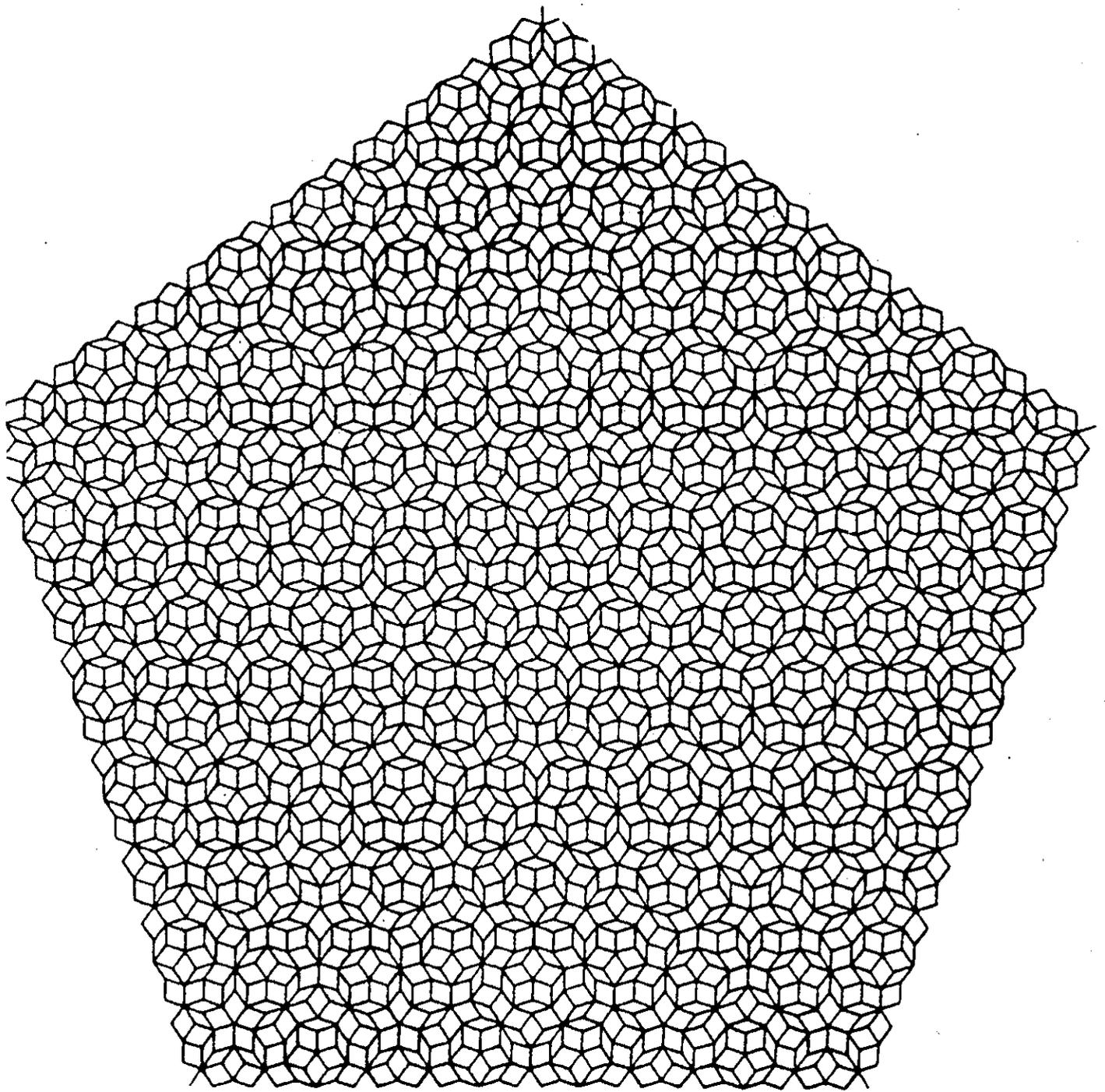
(a) Three point lattices. (b) A diffraction pattern is an orbit of the dual lattice. (From *Atlas of Optical Transforms*.)



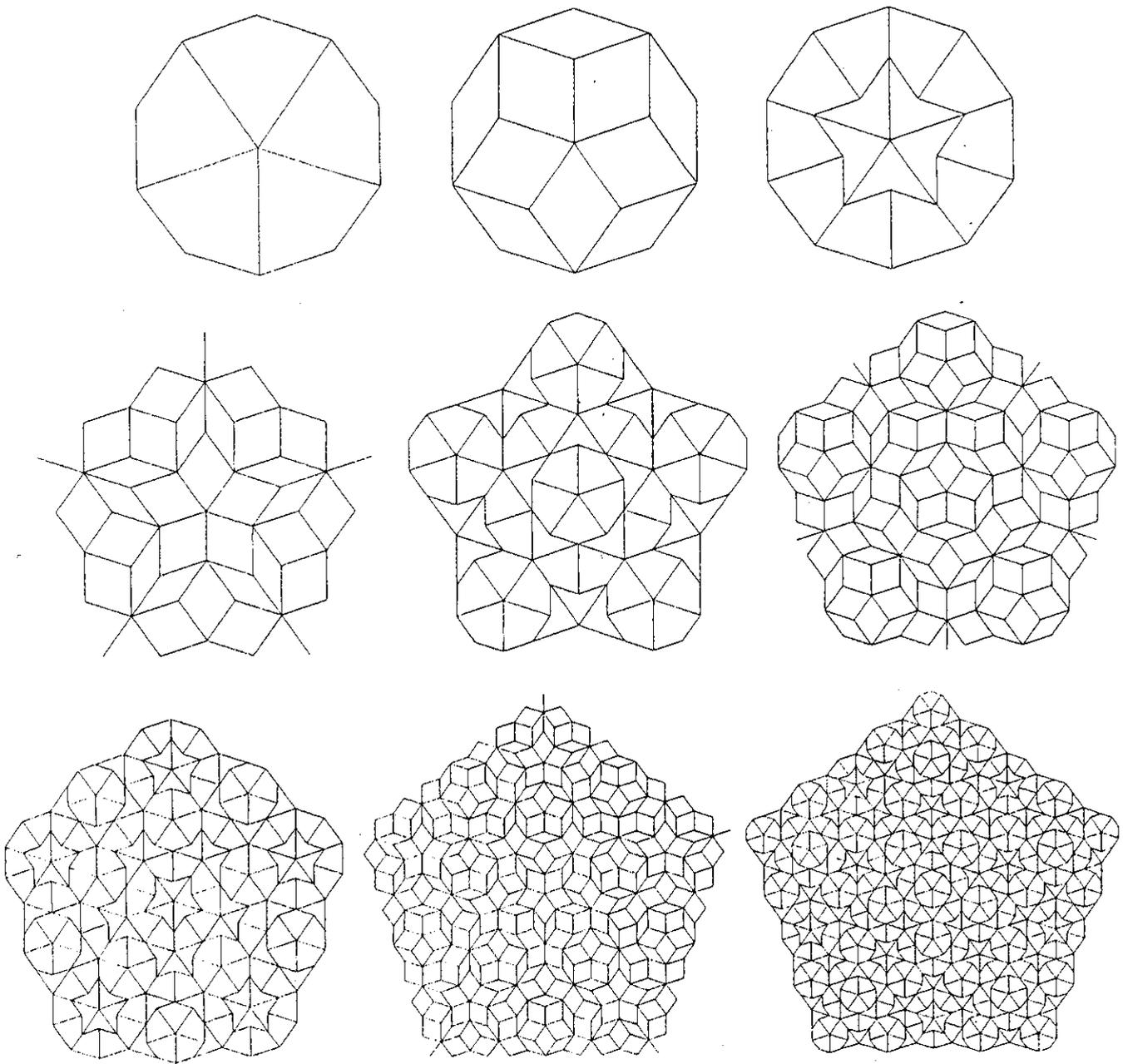
Kubische Raumaufteilung, Lithographie, 1952 Maurits Escher



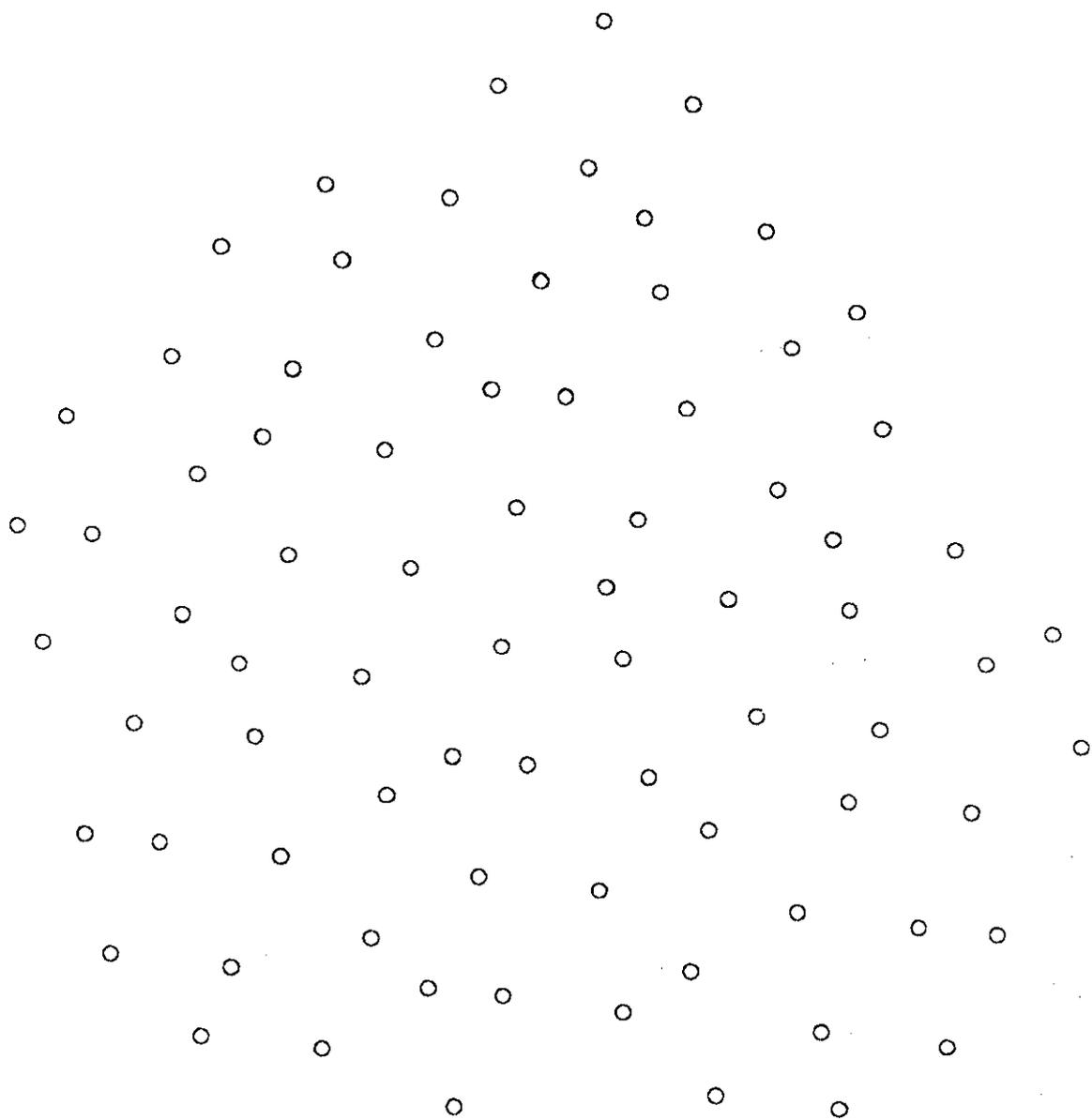
Penrose - Pflasterung mit fünfzähliger
Symmetrie



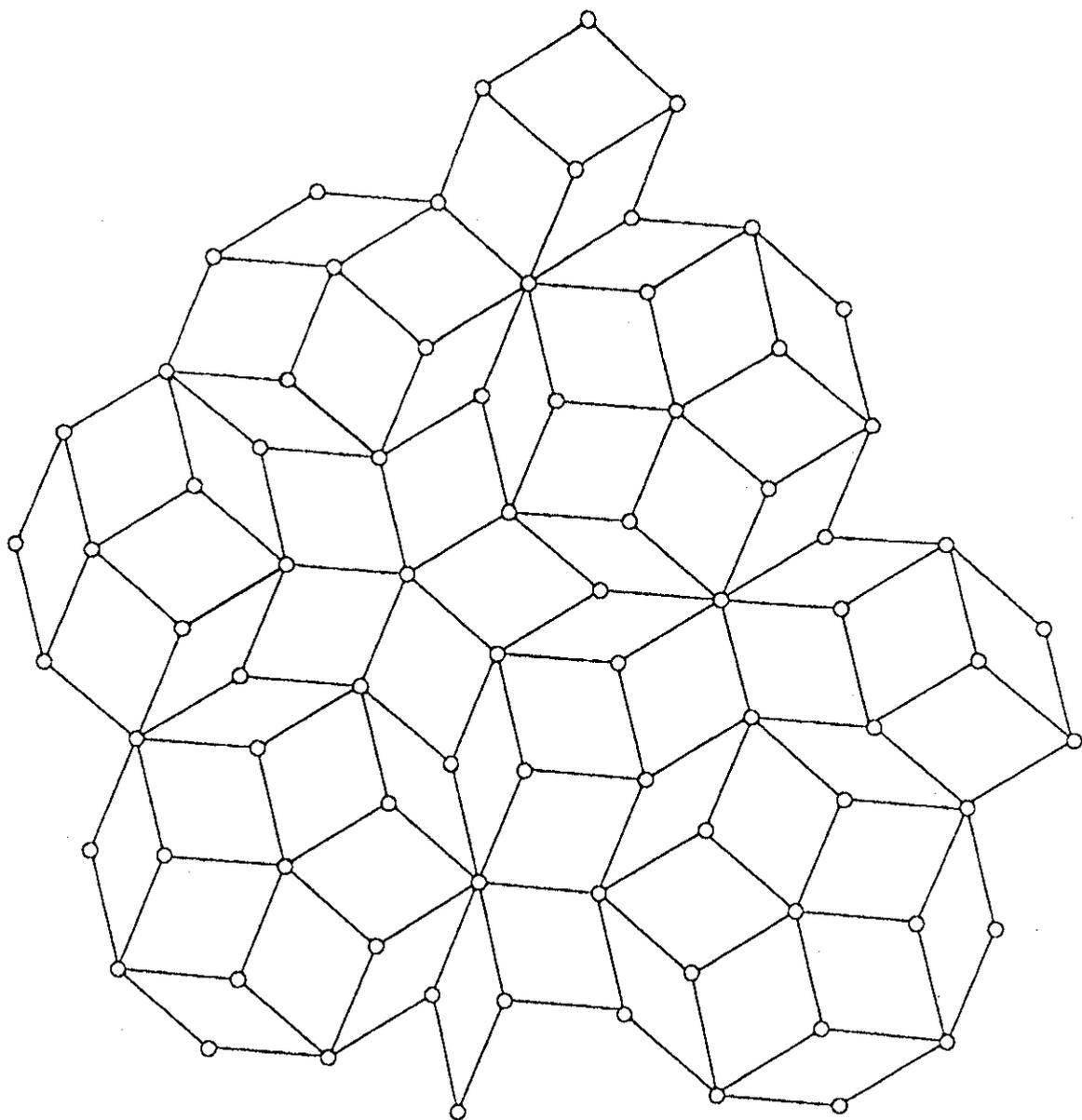
Verfeinerung mit Faktor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

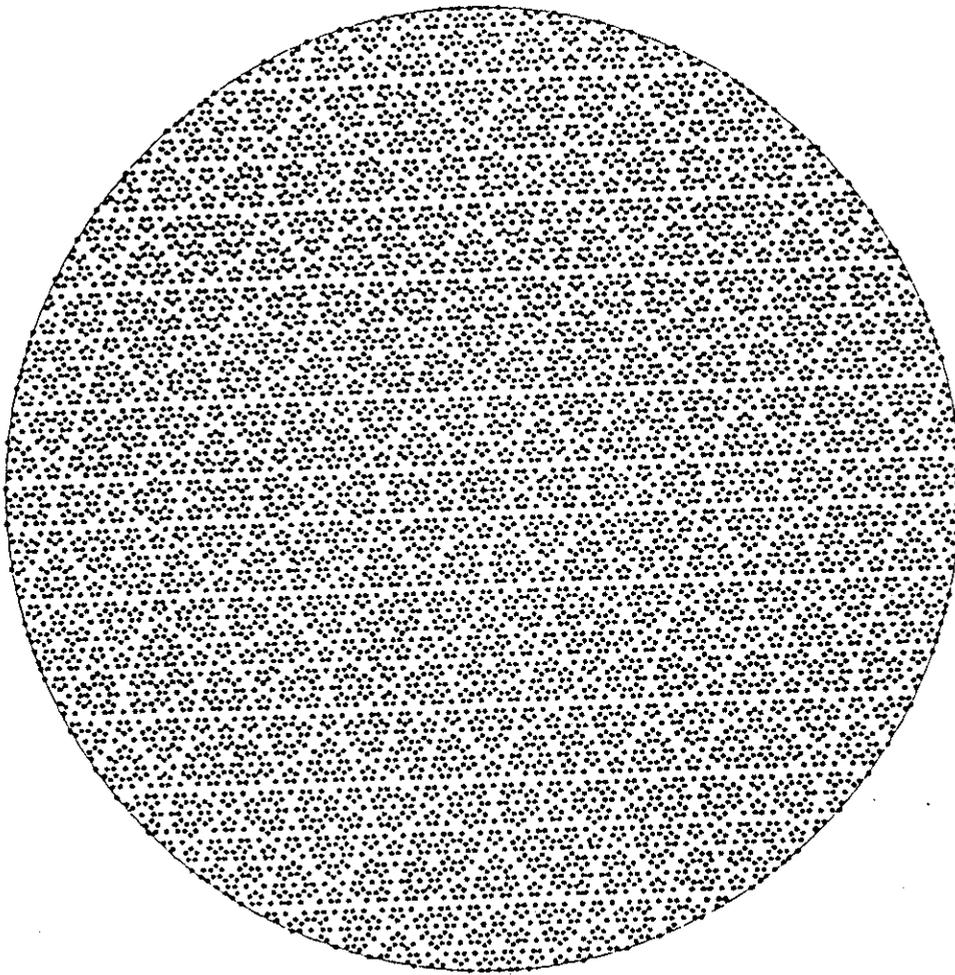


Successive decompositions of patches of tiles of the Penrose sets P2 and P3. These correspond to the decompositions of the underlying A -tiles and B -tiles shown in Figure 10.3.14. Expanding these patches appropriately and using the Extension Theorem (Statement 3.8.1) enables us to construct tilings with symmetry group $d5$. We are indebted to Fred Lunnon for supplying these diagrams drawn by the computer at University College, Cardiff, Wales. Another computer program for drawing a tiling by Penrose tiles was described by Regener [1978].

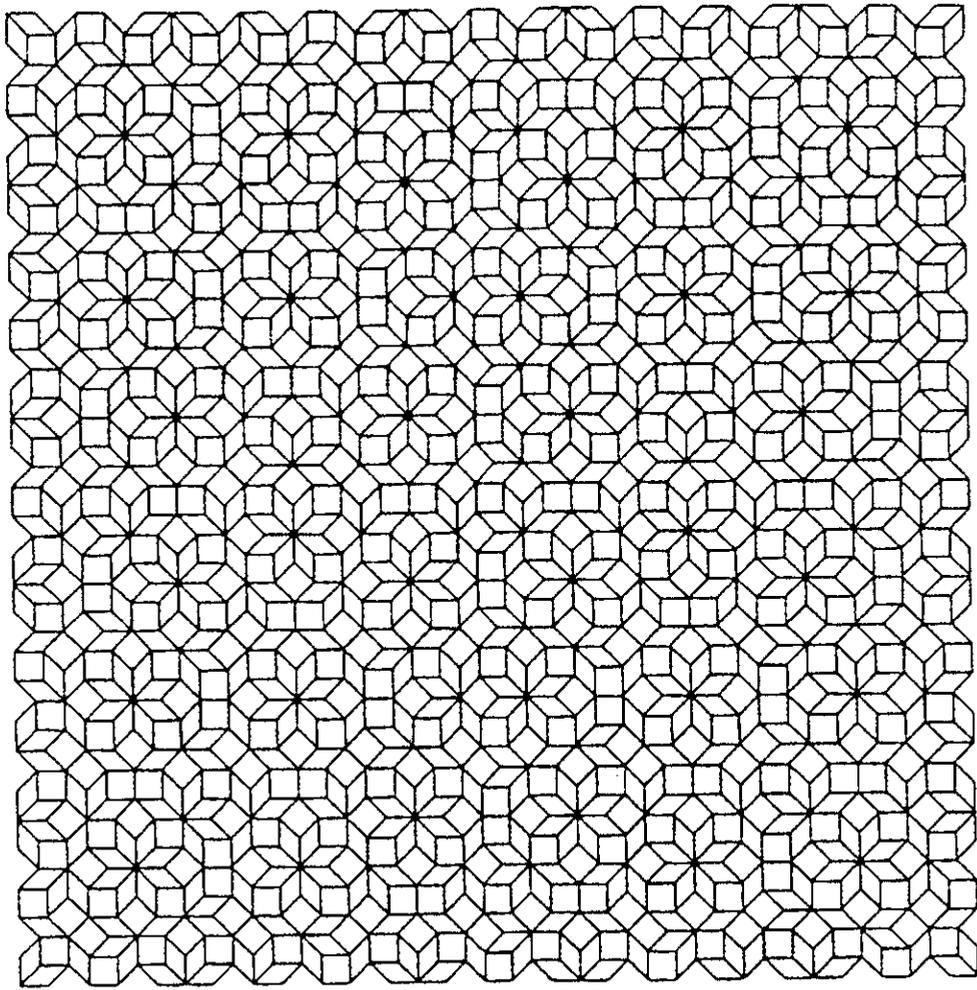


Is any pattern lurking here?

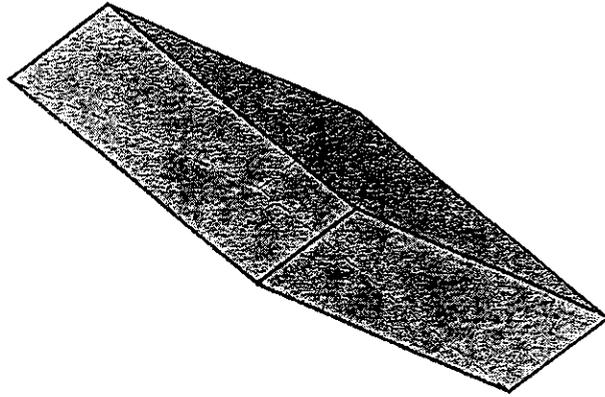
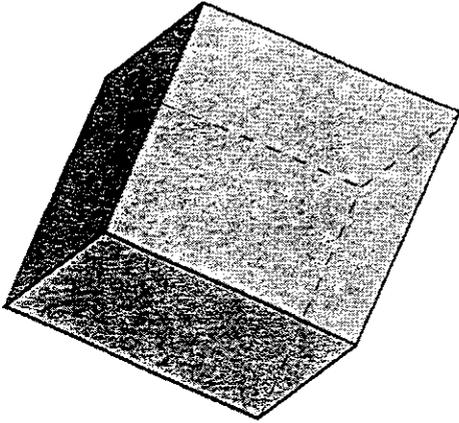




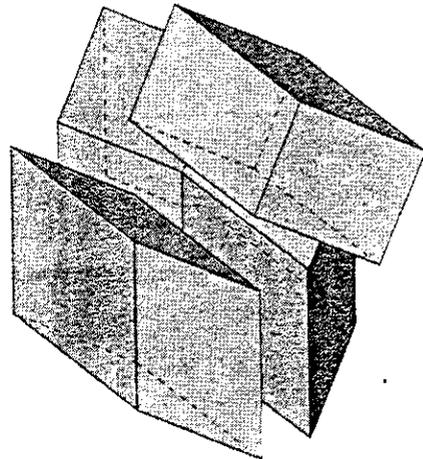
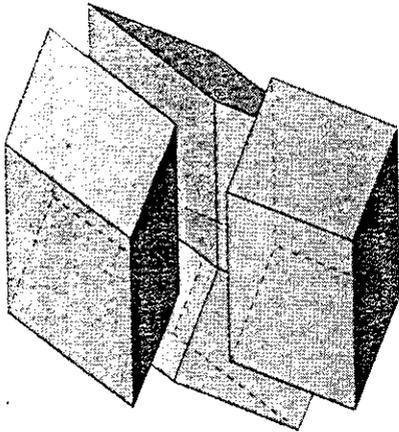
A circular window view of a planar quasicrystal Σ' showing pentagonal symmetry. The projection π_{\parallel} of figure 2 is applied to the points x of the A_4 -root sublattice of the E_8 root lattice provided one has $\pi_{\perp}(x) \cdot \pi_{\perp}(x) < 25$.

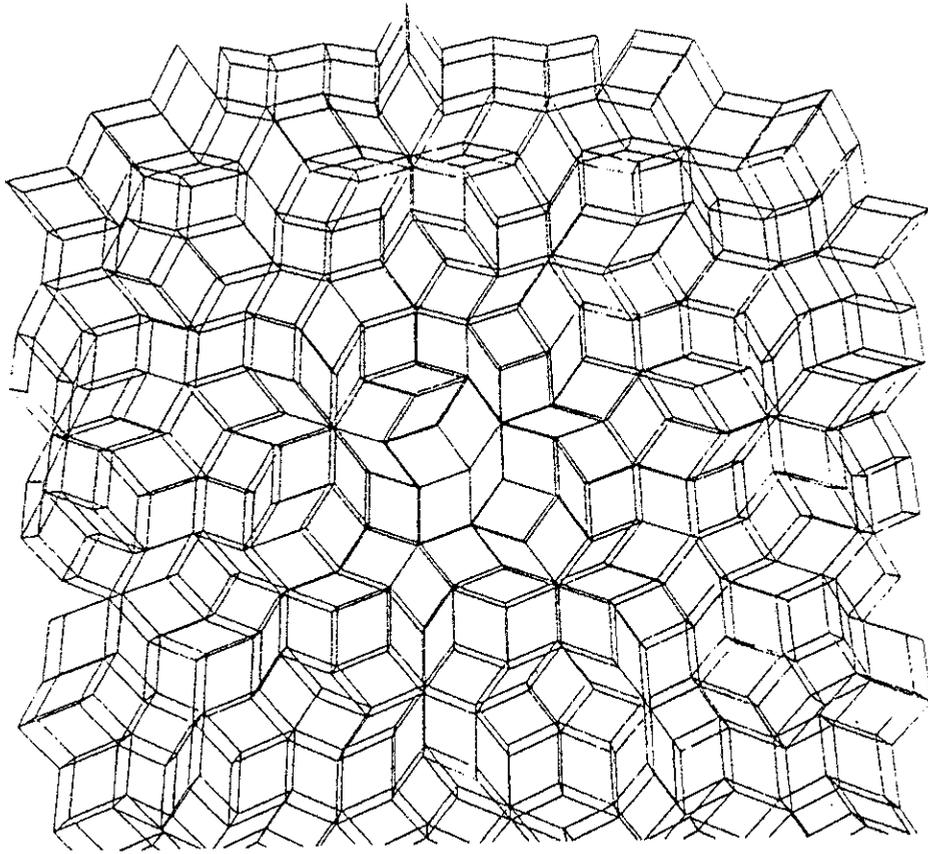


Three-Dimensional Penrose Tilings

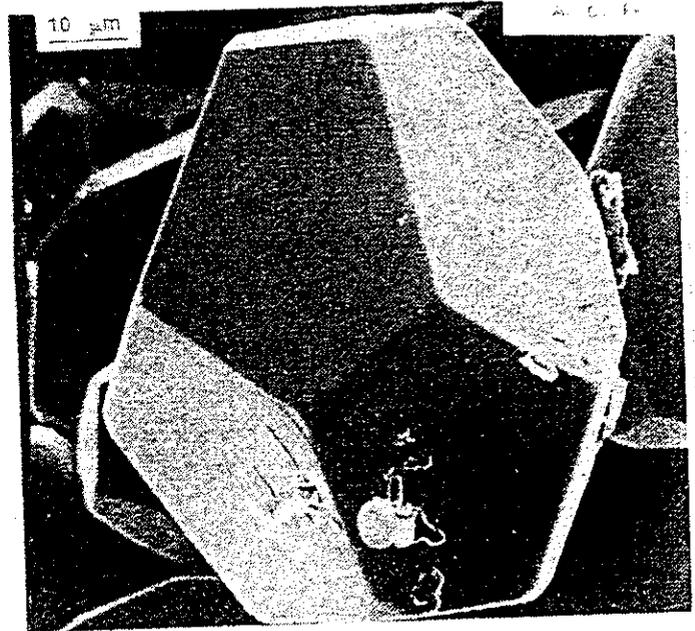
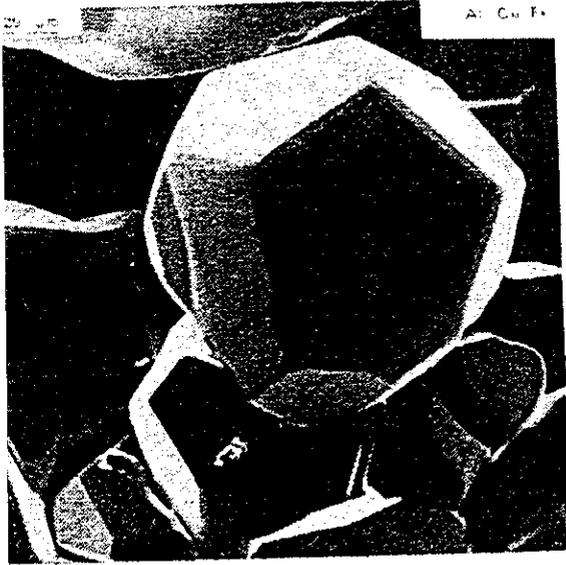


The two Ammann rhombohedra.





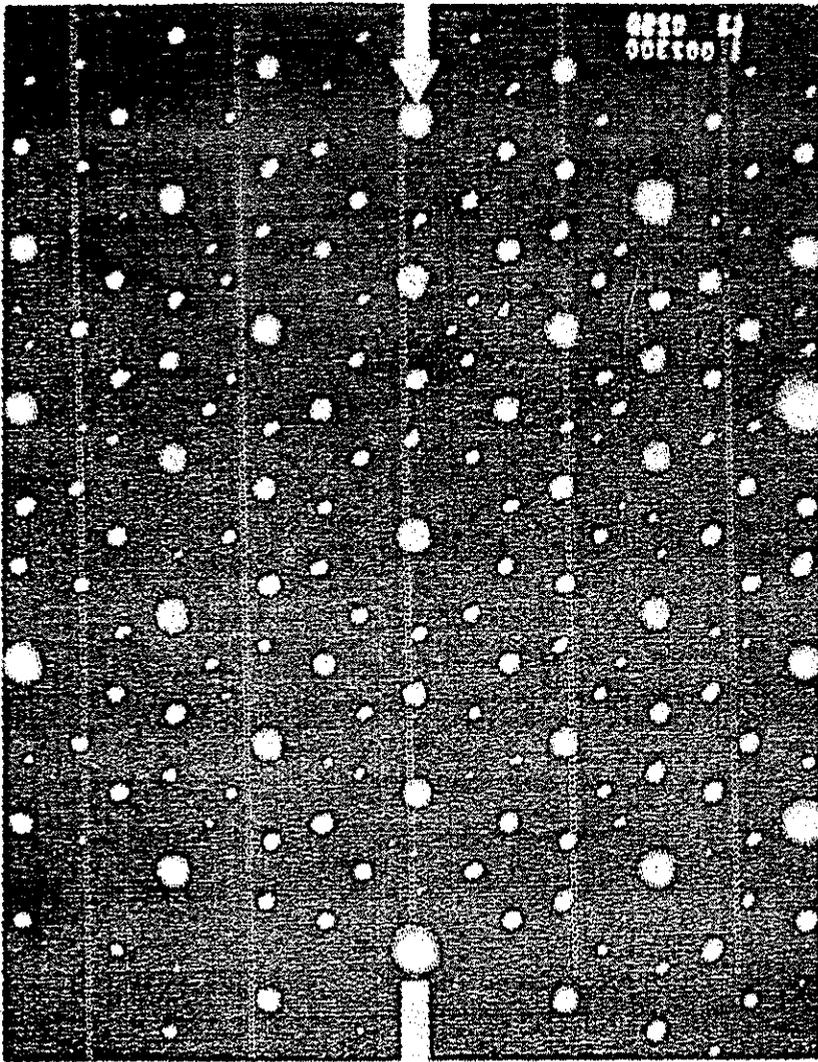
Layer structure of the icosahedral quasilattice. Rhombohedra with four edges perpendicular to a fixed face of the dodecahedron form six systems of infinite parallel layers in the quasilattice. Shown is a single such layer in a central projection.



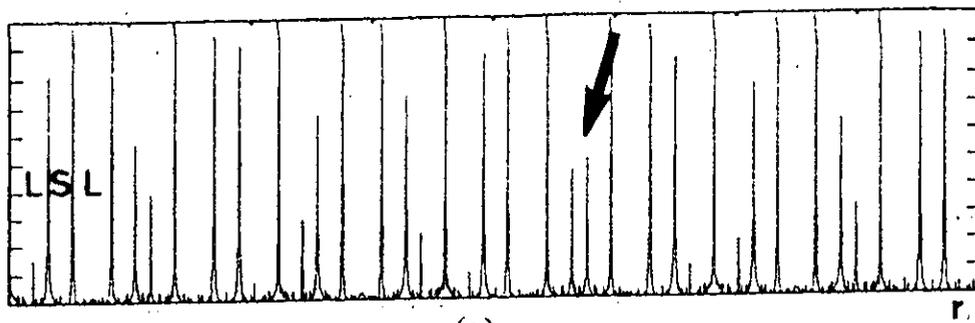
Two dodecahedral growth shapes of grains of icosahedral AlCuFe (courtesy of CM-CNRS, Vitry).



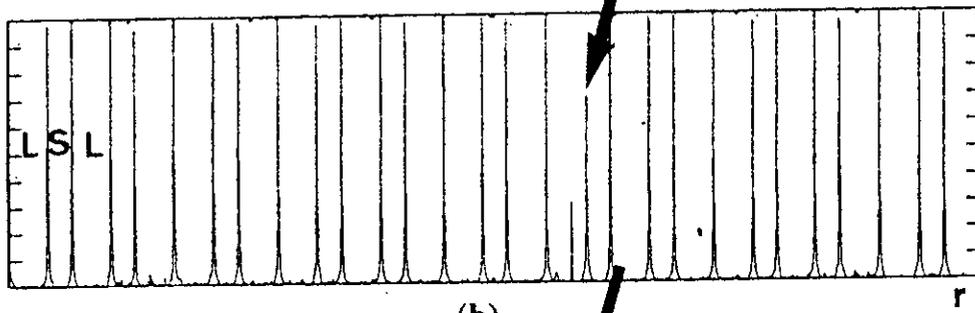
Dendritic growth shape of icosahedral AlLiCu. Notice the pentagonal section the main dendrite, and of the side structures (courtesy of CECM-CNRS, Vitry).



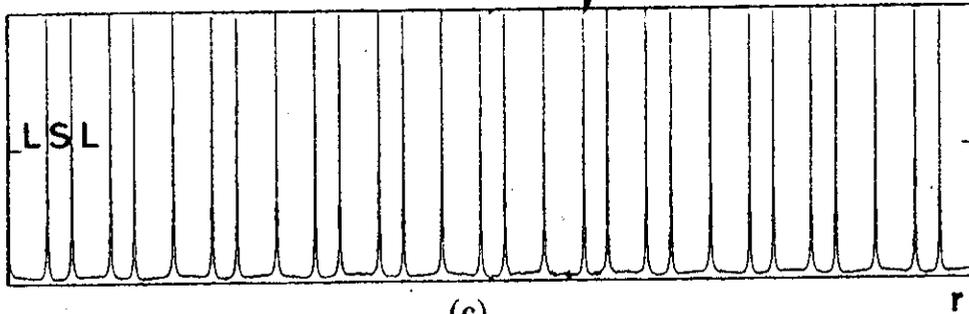
An electron diffraction pattern in a fivefold symmetry plane of the icosahedral phase of $\text{Al}_{78}\text{Cr}_{17}\text{Ru}_5$ which shows particularly large anisotropic shifts in the peak positions similar to Fig. 1. Also note the anisotropic broadening of the individual peaks.



(a)



(b)

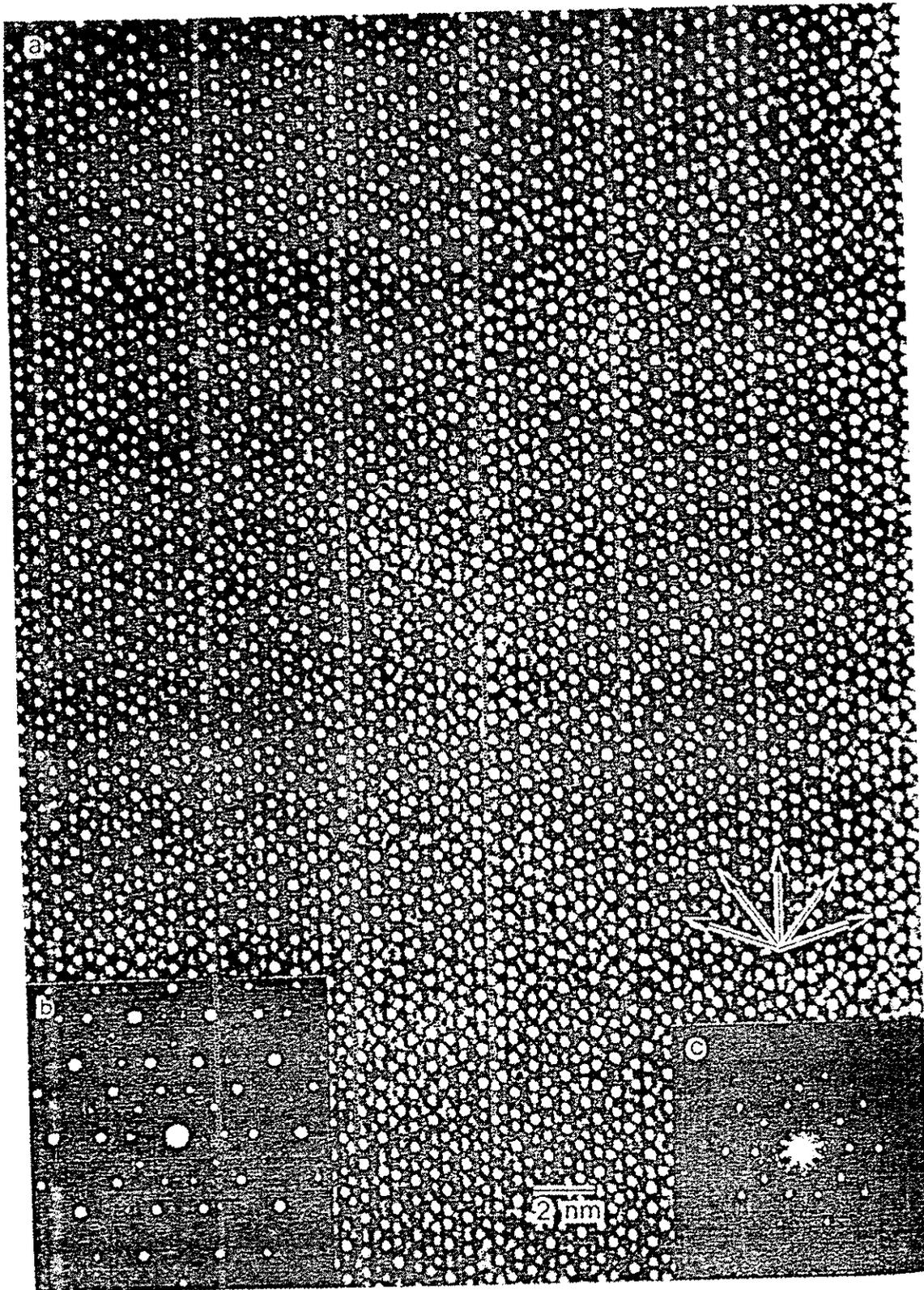


(c)

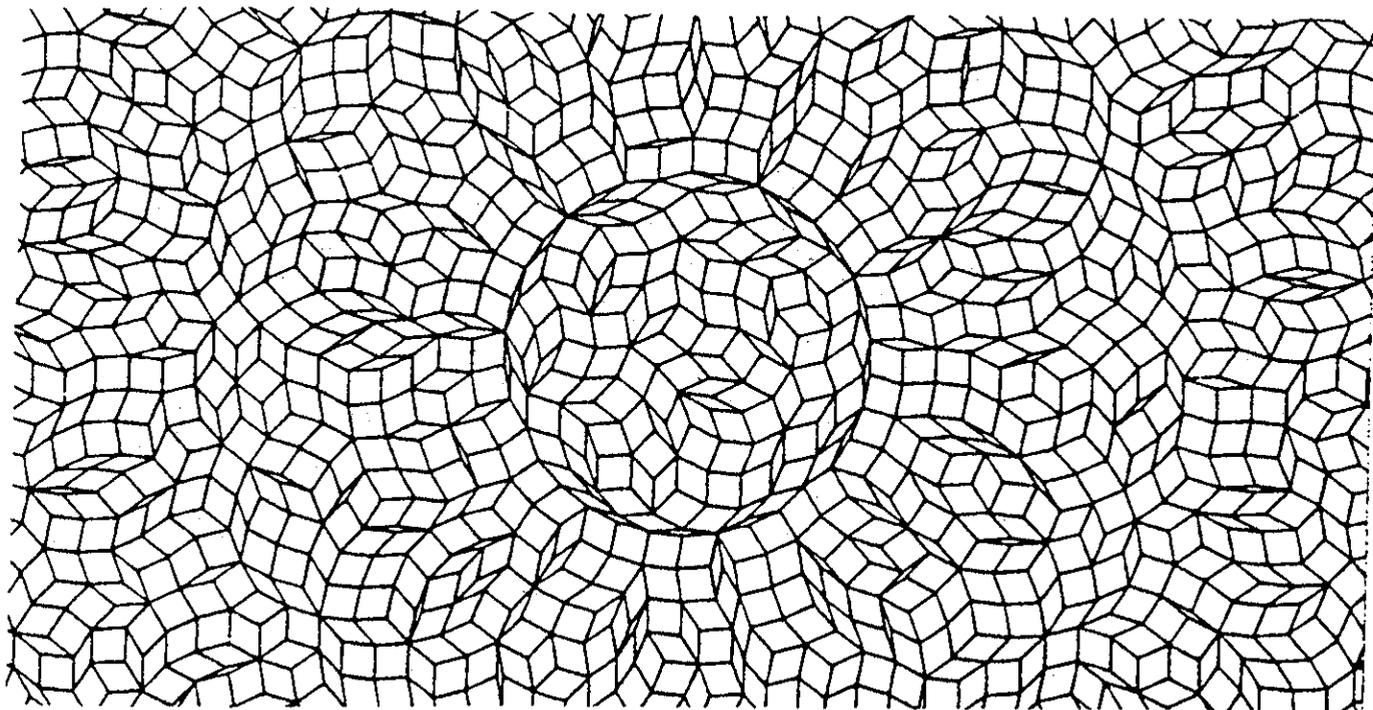


(d)

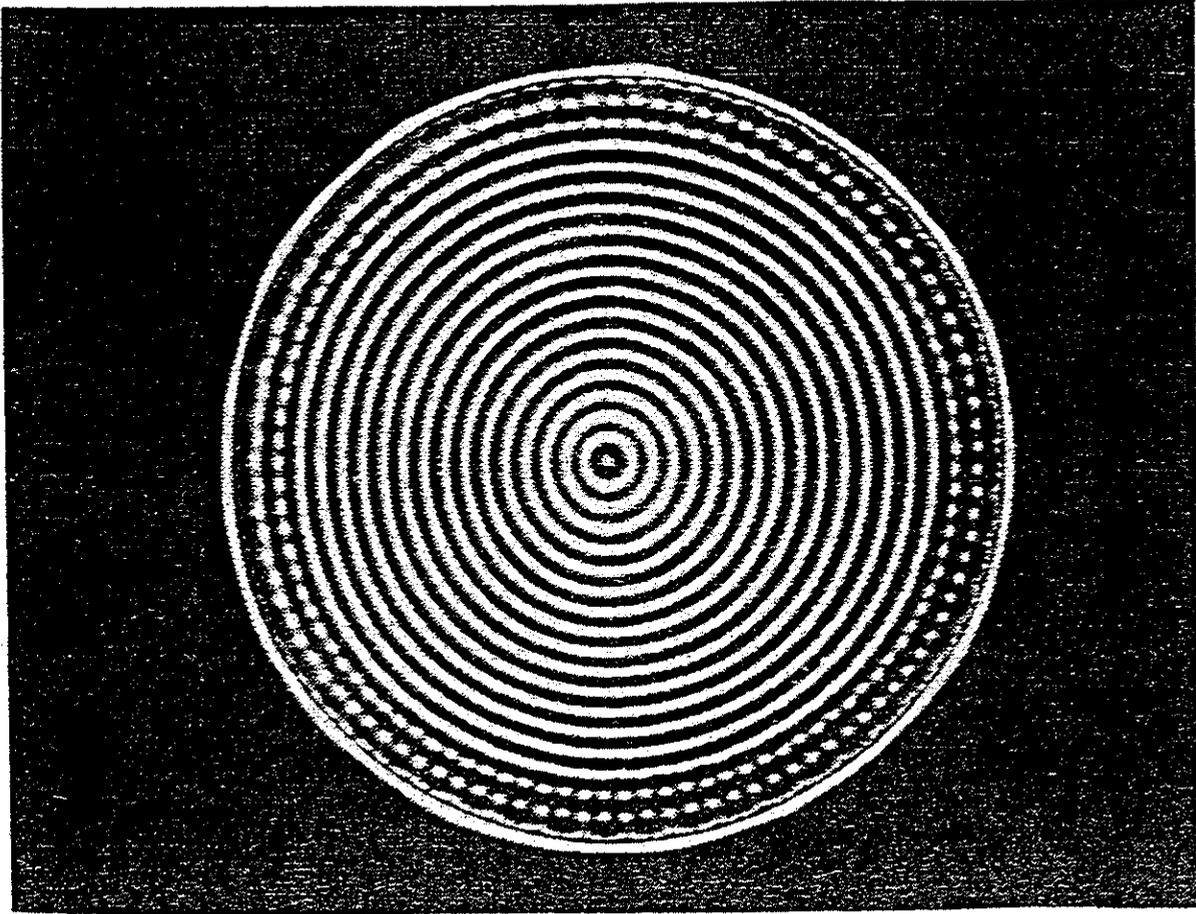
Fourier transforms of different sets of structure factors calculated for an ideal Fibonacci-sequence: (a) all structure amplitudes with $|F(\mathbf{H})| \geq 0.1 |F_{\max}(\mathbf{H})|$, (b) with $|F(\mathbf{H})| \geq 0.01 |F_{\max}(\mathbf{H})|$, and (c) with $|F(\mathbf{H})| \geq 0.001 |F_{\max}(\mathbf{H})|$. An example with missing large structure factors $0.1 |F_{\max}(\mathbf{H})| \geq |F(\mathbf{H})| \geq 0.01 |F_{\max}(\mathbf{H})|$, as this may be the case in real diffraction experiments due to strong, non-correctable extinction effects, is shown in (d).



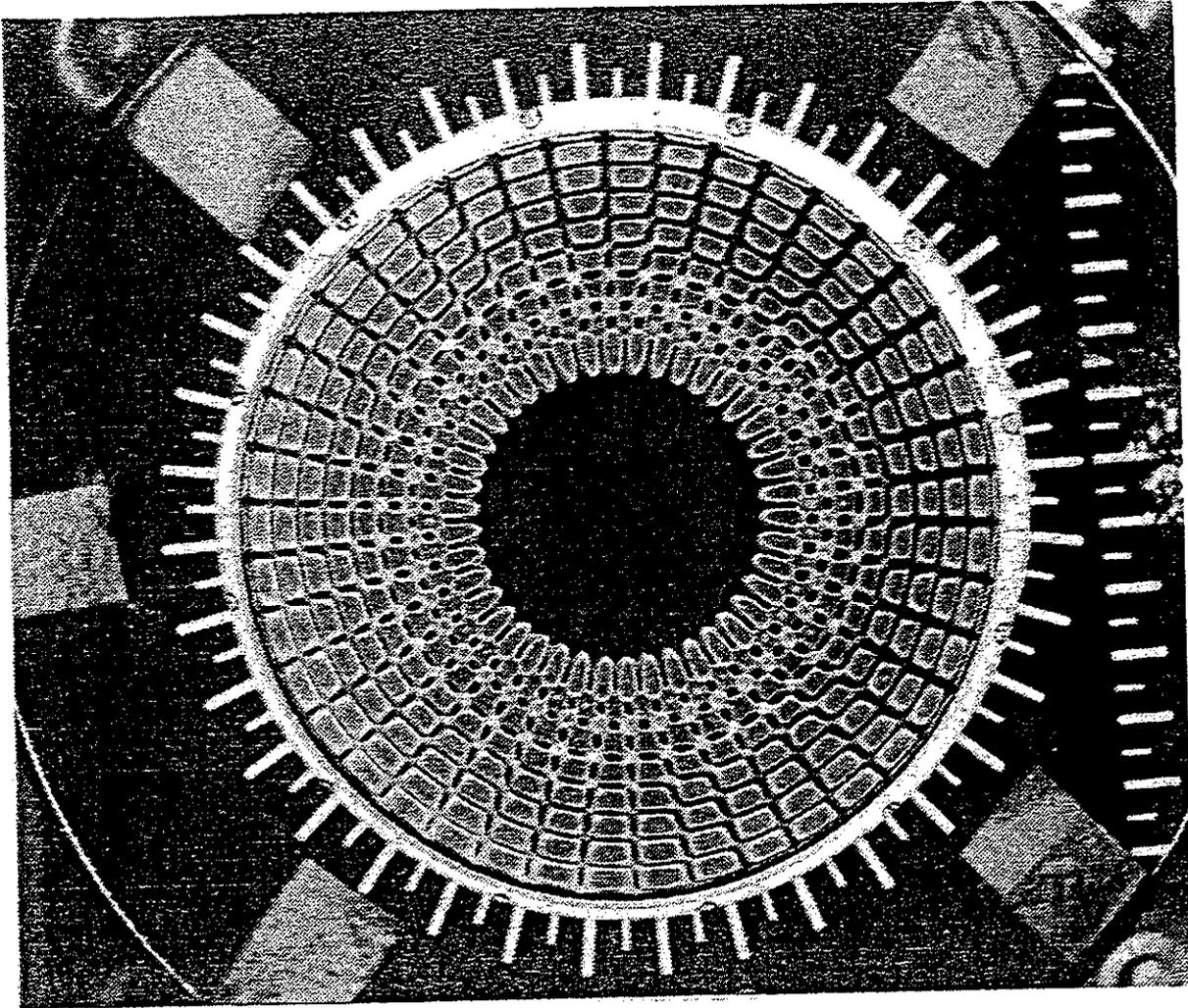
High-resolution electron micrograph (a) and electron diffraction pattern (b) taken with the incident beam parallel to the fivefold symmetry axis. (c) Optical diffractogram of the image.



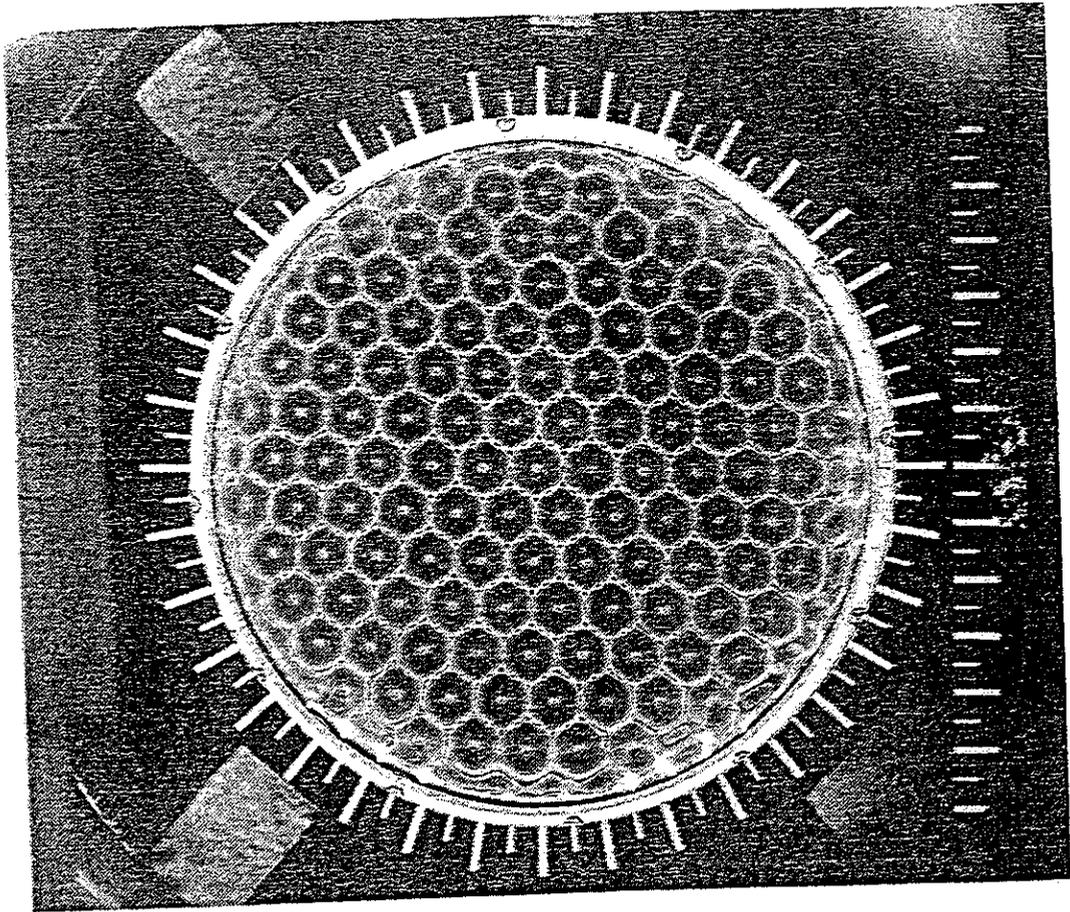
- 2π -disclination in a 17-quasicrystal (Gähler and Rhyner).



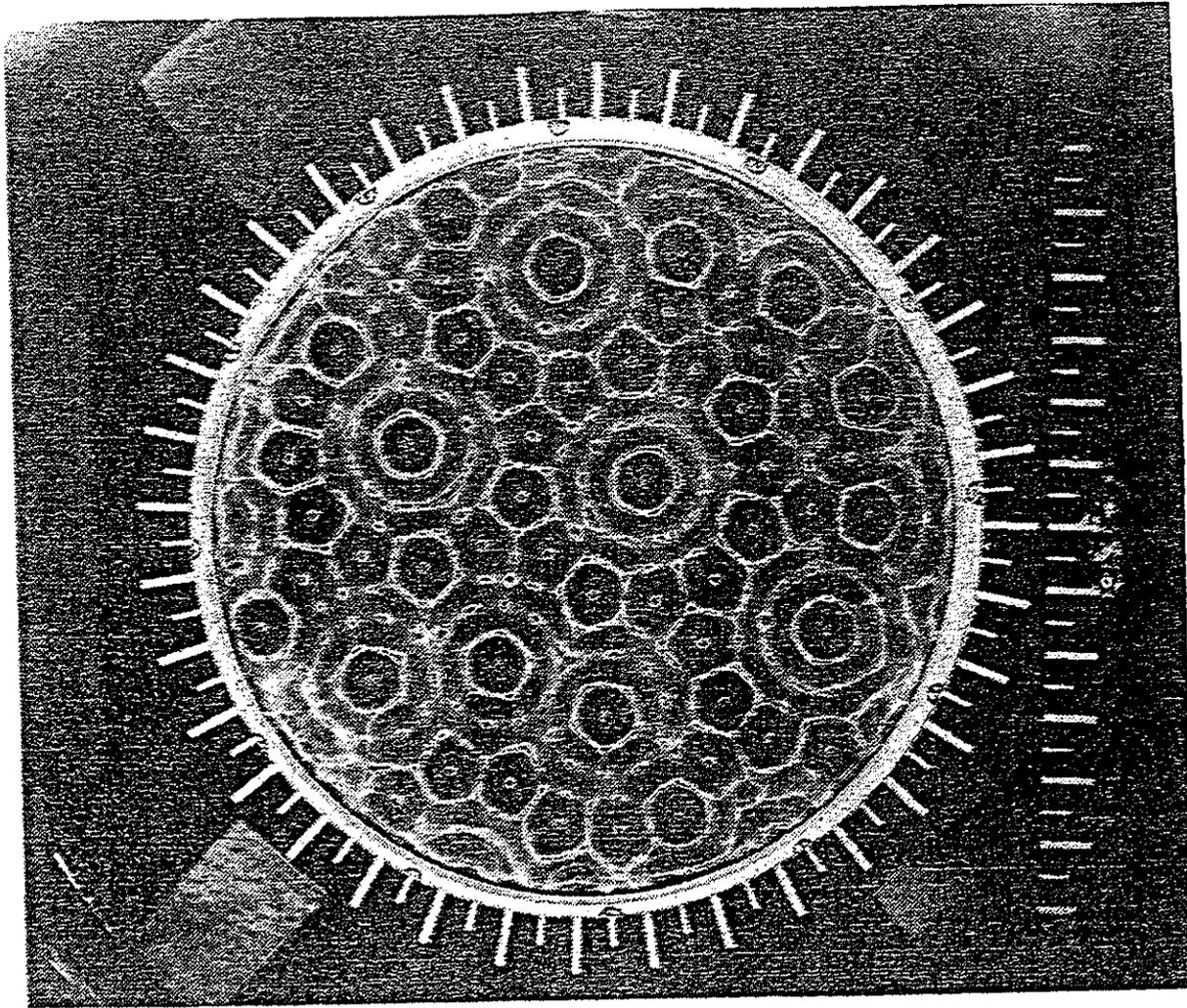
Circular pattern after abrupt transition. The flat surface becomes unstable after a rapid increase in the forcing acceleration a , giving rise to circular waves. The pattern is a result of the circular sidewall. Once created, it persists indefinitely.



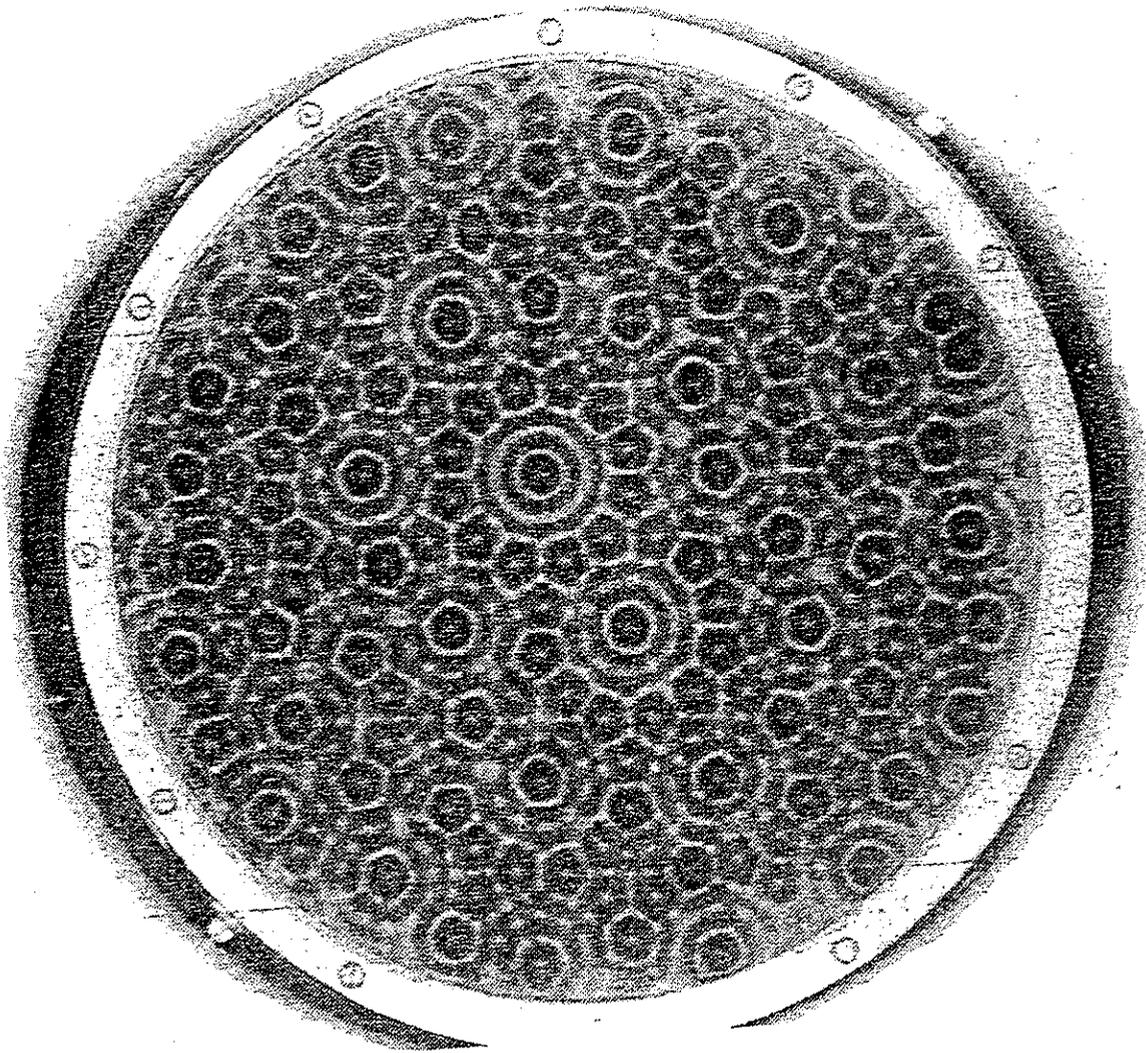
The influence of sidewall geometry at low viscosity. A single standing-wave Bessel mode J_{21} appears on the surface of water in a circular container of 12 cm diameter and depth 0.29 cm subjected to sinusoidal vertical vibration at 75 Hz.



Hexagons produced by two-frequency forcing. The forcing acceleration is $f(t) = a[\cos(\chi)\cos(4\omega t) + \sin(\chi)\cos(5\omega t + \phi)]$, where $\omega/2\pi = 14.6$ Hz, $\phi = 75^\circ$ and $\chi = 45^\circ$. The pattern is observed at the primary transition from the flat surface.



Quasi-pattern of twelvefold symmetry. Photograph of the pattern Q, which has long-range order but no spatial periodicity. The long-range order may be seen by viewing the photograph at a glancing angle; in certain directions there are parallel lines which traverse the container. The parameters are as in figures 12 and 16 with $\chi = 65^\circ$.



Higher-frequency quasi-pattern. The existence of Q does not depend strongly on frequency. Here $\omega/2\pi = 28$ Hz. $\phi = 68.4^\circ$ and $\chi = 72^\circ$.

