Funktionentheorie

R. Pandharipande

HS 2015, ETH Zürich

§ Zahlensysteme

- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$,
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R} \ni \{\sqrt{2}, e, \pi, \ldots\}$,
- Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Letztes Jahr haben Sie Analysis für reelle Funktionen studiert.
Wir studieren jetzt Analysis für komplexe Funktionen,

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

§ Komplexe Zahlen

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- $x \in \mathbb{R}$ ist der Realteil von z ,
- $y \in \mathbb{R}$ ist der Imaginärteil von z .

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} \ni r \mapsto r + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$.

Wir definieren $i \in \mathbb{C}$ als $i = 0 + i \cdot 1$.

Für zwei komplexe Zahlen,

$$z_1 = x_1 + iy_1 \,, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad :$$

Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$,

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$,

$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein (kommutativer) Körper.

$\mathbb{C} \ni z = x + iy \neq 0$, dann

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \; .$$

Wir haben

$$(x+iy) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \left(x \frac{x}{x^2+y^2} - y \frac{-y}{x^2+y^2} \right) + i \left(x \frac{-y}{x^2+y^2} + y \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) + i \cdot 0 \; = \; 1 + i \cdot 0 \; = \; 1 \; .$$

Matrixdarstellung:

$$\mathbb{C} \ni \quad z = x + iy \qquad \longmapsto \qquad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \mathrm{M}(z) \quad \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \ .$$

Für $\quad z_1 = x_1 + iy_1 \, , \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad :$

Addition: $\mathrm{M}(z_1 + z_2) = \mathrm{M}(z_1) + \mathrm{M}(z_2)$,

Multiplikation: $\mathrm{M}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{M}(z_1) \cdot \mathrm{M}(z_2)$.

$$\mathbb{C} \ni \quad i \qquad \longmapsto \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}(i) \quad \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \ .$$

Der Betrag: $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\quad |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$,

(i) $z \in \mathbb{C}$, $\quad |z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$,

(ii) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

(iii) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(ii) ist die Dreiecksungleichung ,

(i)+(ii) $\Longrightarrow$ $\mathbb{C}$ ist ein metrischer Raum mit einer Topologie.

In der Matrixdarstellung:

$$|z = x + iy| = \sqrt{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}} = \sqrt{\operatorname{Det} M(z)} \; .$$

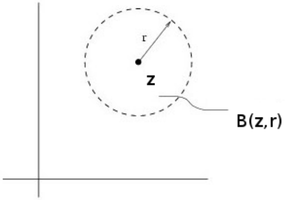
Als metrische Räume: $(\mathbb{C}, |\cdot|) \overset{\sim}{=} (\mathbb{R}^2, |\cdot|_{\text{Euclid}})$.

$\mathbb{C}$ ist vollständig, zusammenhängend, lokal kompakt .

Wir haben offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.

Wichtig für uns ist der offene Ball mit Radius r um $z \in \mathbb{C}$:

$$B(z, r) = \{ \, w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r \, \} \subset \mathbb{C} \,,$$



Wir haben auch den abgeschlossenen Ball mit Radius r um z:

$$\overline{B}(z,r) = \{\ w \in \mathbb{C} \mid |w-z| \leq r\ \} \subset \mathbb{C}\,.$$

Der Rand des Balls ist ein Kreis mit Radius r um z:

$$\partial B(z,r) = \{\ w \in \mathbb{C} \mid |w-z| = r\ \} \subset \mathbb{C}\,.$$

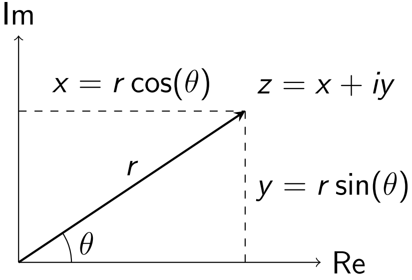
Wir haben $\overline{B}(z,r) = B(z,r) \ \cup\ \partial B(z,r)$.

Für einen Ball ist der Radius r immer positiv.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$.

Wir haben viele Möglichkeiten um z zu schreiben:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= |z| \cdot (\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)) \\ &= r\cos(\theta) + ri\ \sin(\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta}\ . \end{aligned}$$



Komplexe Konjugation: $z = x + iy \;\mapsto\; \bar{z} = x - iy$

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

$z = x + iy \Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$,

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \; ,$$

$$z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z} \; .$$

Wir haben

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \; .$$

In der Matrixdarstellung:

- Inverse in $\mathbb{C}$ $\mapsto$ inverse Matrix:

$$\mathrm{M}(z^{-1}) = \mathrm{M}(z)^{-1} \ .$$

- komplexe Konjugation in $\mathbb{C}$ $\mapsto$ transponierte Matrix:

$$\mathrm{M}(\overline{z}) = \mathrm{M}(z)^{t} \ .$$

- Betrag in $\mathbb{C}$ $\mapsto$ Wurzel der Determinante der Matrix:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Det}\,\mathrm{M}(z)} \ .$$

- $\mathrm{M}(e^{i\theta})$ ist die Rotation um θ:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \mathrm{M}(e^{i\theta}) \ .$$

§ Komplexe Differenzierbarkeit

Sei f eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

• f ist komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$, falls

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

• f ist analytisch auf U, falls f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist und die entstehende Funktion

$$z \mapsto f'(z)$$

stetig ist.

Später sehen wir, dass die Bedingung f' stetig ist überflüssig ist (Satz von Goursat).

Wörterbuch: holomorph = analytisch

Der Ausdruck $\lim_{z \to z_0}$ bedeutet, dass wir den Grenzwert im metrischen Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ nehmen.

• f ist komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$ mit Ableitung $f'(z_0)$, falls:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon \,.$$

Oder mit mehr Symbolen ...

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall z \in U \setminus \{z_0\}$$

$$|z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon \,.$$

Hier $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$!

Sei $\gamma : [-1, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = z_0$ eine stetige einfache Kurve:

- γ ist eine stetige Funktion,
- γ ist injektiv.

[Picture]

• f ist komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U \quad \Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{\gamma(t) - \gamma(0)}$$

existiert und ist gleich $f'(z_0)$.

Wir müssen beweisen:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in [-1,1] \setminus \{0\}$

$$|t - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| f'(z_0) - \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{\gamma(t) - \gamma(0)} \right| < \epsilon\,.$$

Sei $\epsilon > 0$.

Wir haben von der komplexen Differenzierbarkeit von f:

$\exists \widehat{\delta} > 0 \ \forall z \in U \setminus \{z_0\}$

$$|z - z_0| < \widehat{\delta} \quad \Longrightarrow \quad \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon\,.$$

Wir haben von der Stetigkeit von γ:

$\exists \delta > 0 \ \forall t \in [-1,1] \setminus \{0\}$

$$|t - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(t) - \gamma(0)| < \widehat{\delta}\,.$$

Weil γ injektiv ist, haben wir $\gamma(t) \neq \gamma(0) = z_0$.

§ Cauchy-Riemann Gleichungen

Sei f eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

- Sei u der Realteil von f ,
- Sei v der Imaginärteil von f .

Das heisst für $x + iy \in U$,

$$f(x + iy) = u(x + iy) + i \cdot v(x + iy)\,.$$

Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$

- x_0 ist der Realteil von z_0 ,
- y_0 ist der Imaginärteil von z_0 .

Sei $f = u + iv$ komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in U$.

- Wir nehmen den $\lim_{z \to z_0}$ mit der Kurve

$$\gamma(t) = (x_0 + t) + iy_0 \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,, \qquad t \to 0 \,.$$

Dann haben wir:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t}$$

Weil $f = u + iv$ ist, können wir schreiben:

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t + iy_0) - u(x_0 + iy_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t + iy_0) - v(x_0 + iy_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \,.$$

f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in U \Longrightarrow$

- Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ existieren in z_0 ,
- $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

- Wir nehmen den $\lim_{z \to z_0}$ mit der Kurve

$$\gamma(t) = x_0 + i(y_0 + t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \qquad t \to 0\,.$$

Dann haben wir:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + t)) - f(x_0 + iy_0)}{it}$$

Weil $f = u + iv$ ist, können wir schreiben:

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + i(y_0 + t)) - u(x_0 + iy_0)}{it} + i\frac{v(x_0 + i(y_0 + t))) - v(x_0 + iy_0)}{it}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,.$$

f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in U \Longrightarrow$

- Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ existieren in z_0 ,
- $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$.

Wir haben

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Das bedeutet

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,,$$

die Cauchy-Riemann Gleichungen.

Satz 1. *Sei $f = u + iv$ eine komplexwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.*

$$f \text{ ist analytisch auf } U \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \text{ und } v \text{ sind stetig differenzierbar} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Wir haben die Richtung $\Rightarrow$ gesehen.

Beweis für $\Leftarrow$:

Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ und sei $\delta z = \delta x + i\delta y$ klein.

Nach dem Satz von Taylor,

$$\begin{pmatrix} u(z_0 + \delta z) \\ v(z_0 + \delta z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \mathrm{D}f(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \text{Fehler}\,,$$

Cauchy-Riemann Gleichungen $\Rightarrow$

$$\mathrm{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}f(z_0) \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_x(z_0)\delta x - v_x(z_0)\delta y \\ v_x(z_0)\delta x + u_x(z_0)\delta y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Big(\big(u_x(z_0) + iv_x(z_0)\big) \cdot \delta z\Big) \\ \mathrm{Im}\Big(\big(u_x(z_0) + iv_x(z_0)\big) \cdot \delta z\Big) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Deshalb haben wir

$$f(z_0 + \delta z) = f(z_0) \; + \; (u_x(z_0) + iv_x(z_0)) \cdot \delta z \; + \; \text{Fehler}$$

und dann

$$f(z) = f(z_0) \; + (u_x(z_0) + iv_x(z_0)) \cdot (z - z_0) \; + \; \text{Fehler}\,,$$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(z_0) + iv_x(z_0) + \frac{\text{Fehler}}{z - z_0}\,.$$

Wir kontrollieren den Fehler mit den Methoden aus der Analysisvorlesung des letzen Jahres.

Dann sehen wir, dass den Grenzwert existiert:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(z_0) + iv_x(z_0)\,.$$

Deshalb ist f komplex differenzierbar auf U und ist dei Ableitung f' stetig.

Übung: *Benutzen Sie stetige Differenzierbarkeit, um zu zeigen:*

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z} = \frac{(u_x(z_0) + iv_x(z_0)) \cdot \delta z}{\delta z}$$

$$= u_x(z_0) + iv_x(z_0)\,.$$

Sie müssen den Fehler kontrollieren:

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\mathit{Fehler}}{\delta z} = 0\,.$$

Hinweis: Mittelwertsatz.

Beispiel: Sei $f(z) = \frac{1}{z}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

Dann haben wir $f = u + iv$ mit

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \qquad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}\ .$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,, \qquad u_y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \qquad v_y = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Die Cauchy-Riemann Gleichungen sind erfüllt

$\Rightarrow$ f ist analytisch.

Beispiel: Sei $f(z) = \overline{z}$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Dann haben wir $f = u + iv$ mit

$$u = x\,, \quad v = -y\;.$$

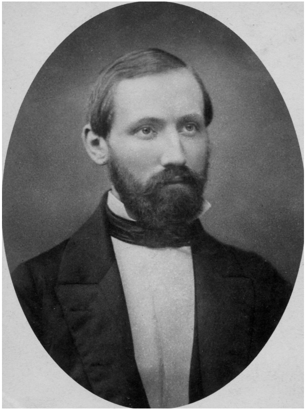
Die partiellen Ableitungen sind:

$$u_x = 1\,, \qquad u_y = 0$$

$$v_x = 0\,, \qquad v_y = -1$$

Die Cauchy-Riemann Gleichungen sind nicht erfüllt

$\Rightarrow$ f ist nicht analytisch.



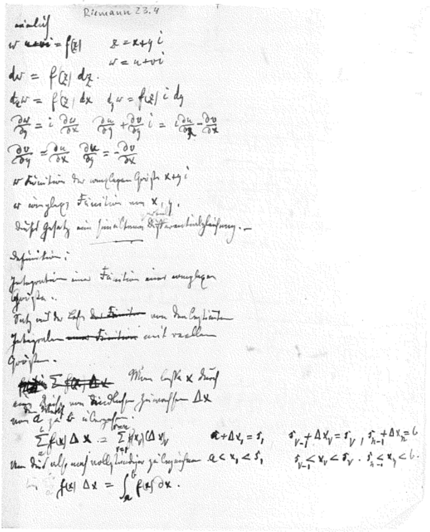
Augustin-Louis Cauchy

(1789 - 1857)

Georg Friedrich Bernhard Riemann

(1826 - 1866)

wikipedia.org



Riemann 23.4

nämlich

$w = f(z) \qquad z = x+yi$

$\qquad\qquad w = u+vi$

$dw = f'(z)\,dz.$

$d_x w = f'(z)\,dx \qquad d_y w = f'(z)\,i\,dy$

$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i = i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

w Function der complexen Größe $x+yi$

w complexe Function von x, y.

Dieses Gesetz eine hinreichende Differentialgleichung. –

Definition:

Integration einer Function einer complexen Größe.

Zuerst erst die Lehre von den bestimmten Integralen mit reellen Größen.

~~$\Sigma f(x)\Delta x$~~ Man lasse x durch eine Reihe von discreten zwischen Δx von a zu b übergehen:

$\Sigma f(x)\Delta x = \sum_{1}^{n} f(x_\nu)(\Delta x_\nu) \qquad a+\Delta x_1 = s_1 \qquad s_{\nu-1}+\Delta x_\nu = s_\nu,\ s_{n-1}+\Delta x_n = b$

Man lasse diese nach unendlich klein werden $a < x_1 < s_1 \qquad s_{\nu-1} < x_\nu < s_\nu .\ s_{n-1} < x_n < b.$

$\lim \Sigma f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$

Cod. Ms. Riemann 23.4, Bl. 10 recto

Von den Heften von Riemann (E. Neuenschwader, ed.)

§ Analytische Funktionen: Ein Überblick

Beispiele von analytischen Funktionen sind:

- Polynome, konvergente Potenzreihen, insbesondere e^z, $\sin(z)$, $\cos(z)$,
- Gleichmässige Grenzwerte analytischer Funktionen ,
- Spezielle Funktionen wie die Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \text{für } \operatorname{Re} z > 0$$

oder die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} \qquad \text{für } \operatorname{Re} z > 1 \, .$$

Eigenschaften analytischer Funktionen:

- Analytische Funktionen sind unendlich oft komplex differenzierbar.
- Die Taylorreihe einer analytischen Funktion um einen Punkt z_0 konvergiert in einer nicht leeren, offenen Umgebung des Punktes z_0 und stellt dort die Funktion dar.
- Identitätssatz: Sei U zusammenhängend. Zwei analytische Funktionen auf U, die auf einer Teilmenge von U mit Häufungspunkt in U übereinstimmen, stimmen auf ganz U überein.
- Maximumprinzip: Sei U zusammenhängend. Eine analytische Funktion auf U, die in U das Maximum ihres Betrages annimmt, ist konstant.
- Konformalität: Analytische Funktionen sind winkeltreu.

Wozu sind analytische Funktionen gut?

- Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ,
- Beweis des Primzahlsatzes (die Anzahl der Primzahlen $\leq n$ verhält sich asymptotisch wie $\frac{n}{\log n}$) ,
- Berechnung von Integralen wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \ dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e} \qquad , \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+\cos\varphi)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$$

§ Quaternionen

Es gibt weitere Zahlensysteme, zum Beispiel die Quaternionen:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

$$\mathbb{H} = \{ x + iy + jz + kw \,|\, x, y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\,,$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

Warum haben wir keinen Kurs über

Quaternionische Funktiontheorie?

Die Multiplikation von $\mathbb{H}$ ist nicht kommutativ.

Deshalb ist es nicht einfach eine $\mathbb{H}$-Ableitung zu definieren.

Sehr wenige Funktionen sind $\mathbb{H}$-differenzierbar.

Übung: *Probieren Sie eine $\mathbb{H}$-Ableitung zu definieren.*

Ist $f(z) = z^2$ $\mathbb{H}$-differenzierbar für Ihre Definition?

Quaternion plaque on Brougham (Broom) Bridge, Dublin:

Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ and cut it on a stone of this bridge.

William Rowan Hamilton Plaque - geograph.org.uk

§ Harmonische Funktionen

Sei $f = u + iv$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist (immer der Fall),

Cauchy-Riemann $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} .$$

Deshalb ist $u(x, y)$ eine harmonische Funktion,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

$v(x, y)$ ist auch harmonisch (mit dem gleichen Beweis),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

Der Laplace Operator auf dem $\mathbb{R}^2$ ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad .$$

Die Laplace Gleichungen für u und v sind

$$\Delta u = 0\,, \quad \Delta v = 0 \quad .$$

Beispiel: Sei $f = u + iv$ mit

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy\,.$$

Die Cauchy-Riemann Gleichungen sind erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Deshalb sind $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, u und v harmonisch.

Einfacher zu schreiben ist f als $f(z) = z^2$:

$$\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}\left((x + iy)^2\right) = x^2 - y^2\,,$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left((x + iy)^2\right) = 2xy\,.$$

Sei u eine (zweimal stetig differenzierbare) harmonische

Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$,

$$u : U \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \Delta u = 0.$$

Eine (zweimal stetig differenzierbare) harmonische Funktion

$$v : U \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad \Delta v = 0$$

ist eine zu u konjugiert harmonische Funktion falls

$$f = u + iv : U \to \mathbb{C}$$

analytisch auf U ist.

Übung: *Für jede harmonische Funktion*

$$u : U \to \mathbb{R}$$

gibt es eine harmonische Funktion $v : U \to \mathbb{R}$,

die zu u konjugiert harmonisch ist?

Hinweis: Nein.

Übung: *Finden Sie ein Beispiel.*

Hinweis: Sei $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

Später sehen wir, dass die Antwort Ja ist, wenn U

keine löcher hat.

§ Jacobi-Matrix

Sei $f = u + iv$ eine komplexwertige Funktion

$$f : U \to \mathbb{C}$$

mit $u, v : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Für $z_0 \in U$ haben wir die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} .$$

Die Jacobi-Matrix erzeugt eine lineare Abbildung

$$\mathrm{D}f(z_0) : T_{z_0} \to T_{f(z_0)}$$

(Analysisvorlesung des letzen Jahres).

$T_{z_0} \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^2$ ist der Tangentialraum im Punkt z_0,

$T_{f(z_0)} \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^2$ ist der Tangentialraum im Punkt $f(z_0)$,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot \widehat{x} \oplus \mathbb{R} \cdot \widehat{y} \quad \text{mit} \quad \widehat{x} = (1,0)\,, \ \widehat{y} = (0,1)\,.$$

Einen Vektor $a\widehat{x} + b\widehat{y}$ schreiben wir als

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dann ist die lineare Abbildung

$$\mathrm{D}f(z_0) : T_{z_0} \to T_{f(z_0)}$$

gleich der Matrixmultiplikation:

$$\mathrm{D}f(z_0)\Big(a\widehat{x} + b\widehat{y}\Big) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Jetzt sei f eine komplex differenzierbare Funktion.

Mit den Cauchy-Riemann Gleichungen haben wir

$$\mathrm{D}f(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} .$$

Für $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ haben wir die Matrixdarstellung:

$$\mathrm{M}(f'(z_0)) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist gleich der Matrixdarstellung von $f'(z_0)$:

$$\mathrm{D}f(z_0) = \mathrm{M}(f'(z_0)) .$$

Übung: *Weil wir* $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ *als* $\mathbb{R}$*-Vektorräume mit*

$$\widehat{x} = (1,0) \mapsto 1\,, \quad \widehat{y} = (0,1) \mapsto i$$

haben, können wir schreiben:

$$T_{z_0} \cong \mathbb{C}\,, \qquad T_{f(z_0)} \cong \mathbb{C}\,.$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{D}f(z_0) : T_{z_0} \to T_{f(z_0)}$$

gleich der Multiplikation mit $f'(z_0)$*,*

$$T_{z_0} \cong \mathbb{C} \xrightarrow{\bullet f'(z_0)} \mathbb{C} \cong T_{f(z_0)}\,,$$

ist.

§ Konformalität

Sei $f = u + iv$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$,

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

Sei $z_0 \in U$ und $\mathbf{v}\,,\mathbf{w} \in T_{z_0} \cong \mathbb{R}^2$.

Sei $0 \leq \theta \leq \pi$ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}\,.$$

Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das normale Skalarprodukt und ist

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

die normale Länge für $\mathbb{R}^2$.

Für den Winkel nehmen wir an, dass $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ nicht null sind.

Wir haben

$$\langle Df(z_0)\mathbf{v}, Df(z_0)\mathbf{w}\rangle = |f'(z_0)|^2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \, .$$

Beweis: Zuerst haben wir

$$\langle Df(z_0)\mathbf{v}, Df(z_0)\mathbf{w}\rangle \; = \langle \mathbf{v}, Df(z_0)^t Df(z_0)\mathbf{w}\rangle \, .$$

Danach berechen wir

$$\begin{aligned}
Df(z_0)^t Df(z_0) &= \begin{pmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ -v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_x^2(z_0) + v_x^2(z_0) & 0 \\ 0 & u_x^2(z_0) + v_x^2(z_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |f'(z_0)|^2 & 0 \\ 0 & |f'(z_0)|^2 \end{pmatrix} \, .
\end{aligned}$$

Also ist $Df(z_0)^t Df(z_0)$ eine diagonale Matrix.

Jetzt nehmen wir an, dass $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Sei $0 \leq \widehat{\theta} \leq \infty$ der Winkel zwischen $\mathrm{D}f(z_0)\mathbf{v}$ und $\mathrm{D}f(z_0)\mathbf{w}$,

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\theta}) &= \frac{\langle \mathrm{D}f(z_0)\mathbf{v}, \mathrm{D}f(z_0)\mathbf{w}\rangle}{|\mathrm{D}f(z_0)\mathbf{v}| \cdot |\mathrm{D}f(z_0)\mathbf{w}|} \\
&= \frac{|f'(z_0)|^2 \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{|f'(z_0)| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |f'(z_0)| \cdot |\mathbf{w}|} \\
&= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} \\
&= \cos(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist winkeltreu im Punkt $z_0 \in U$:

$$\widehat{\theta} = \theta\,.$$

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

- f ist konform auf U, falls

$$\operatorname{Det} \mathrm{D}f > 0$$

und f winkeltreu in jedem Punkt $z \in U$ ist.

- f ist analytisch auf U und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$

$$\Rightarrow \quad f \text{ ist winkeltreu und } \operatorname{Det} \mathrm{D}f(z) = |f'(z)|^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ ist konform auf } U\,.$$

- $f(z) = \bar{z}$ ist winkeltreu, aber nicht konform weil

$$\operatorname{Det} \mathrm{D}f = -1\,.$$

Übung: *Mit linearer Algebra und den Cauchy-Riemann Gleichungen beweisen Sie, dass*

f ist konform auf U $\Rightarrow$ f ist analytisch auf U mit f' nie 0.

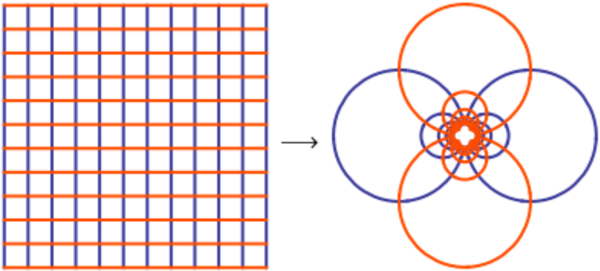
Zusammen haben wir:

f ist konform auf U $\Leftrightarrow$ f ist analytisch auf U mit f' nie 0.

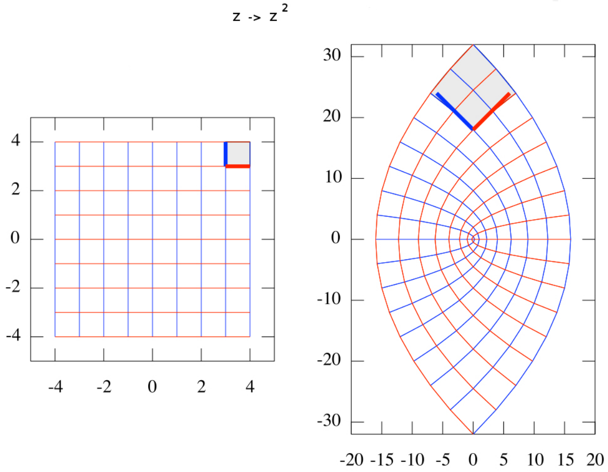
Konformalität ist eine geometrische Bedingung, die wir fast sehen können.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{z}$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$f'(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad f$ ist konform auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

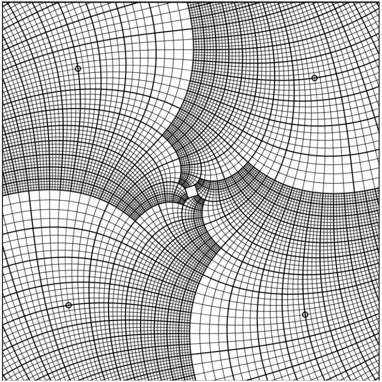


Beispiel: $f(z) = z^2$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:



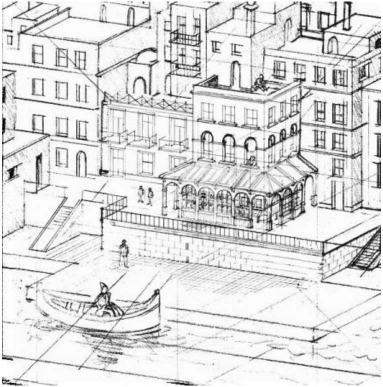
von Adam Hausknecht: http://www.math.umassd.edu/˜ahausknecht/

Beispiel: M. C. Escher



Finden Sie die Funktion hier: http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/

Auf der anderen Seite der Funktion:



http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/

§ Polynome

Die konstanten Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind analytisch:

$$f(z) = 17 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0\,.$$

Die Identität $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist analytisch:

$$f(z) = z \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 1\,.$$

Die polynomialen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind analytisch:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}\,.$$

Hier $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Satz 2. *Seien f, g analytische Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.*

(i) *$f + g$ ist analytisch auf U und $(f+g)' = f' + g'$,*

(ii) *$f \cdot g$ ist analytisch auf U und $(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.*

Beweis für (ii):

$$\frac{f \cdot g(z) - f \cdot g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} .$$

Deshalb $\lim_{z \to z_0} \frac{f \cdot g(z) - f \cdot g(z_0)}{z - z_0} = f' \cdot g(z_0) + f \cdot g'(z_0)$. $\square$

Der Beweis für (i) is noch einfacher.

Mit $+$ and $\cdot$ können wir alle Polynome aus

$$f = konstant \quad \text{und} \quad f(z) = z\,.$$

konstruieren.

Theorem 2 $\quad\Rightarrow\quad$ Polynome sind analytisch.

Korollar. *Sei $f(z)$ ein Polynome. Dann*

$$\Delta\,\mathrm{Re}\,f(x+iy) = 0\,, \quad \Delta\,\mathrm{Im}\,f(x+iy) = 0\,.$$

$$f(z) = z^3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,f(x+iy) = x^3 - 3xy^2\,,$$

$$\mathrm{Im}\,f(x+iy) = 3x^2y - y^3\,.$$

§ Eigenschaften von analytischen Funktionen

(1) *Sei f eine analytische Funktion auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$. Dann ist f konstant.*

Beweis (gut): Sei $f = u + iv$.

Mit den Cauchy-Riemann Gleichungen sehen wir:

$$f' = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x = u_y = v_x = v_y = 0$$

auf U. Dann sind u und v konstant (nach Resultaten aus früheren Analysisvorlesungen). □

Beweis (besser): Seien $p, q \in U$ und sei

$$\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{C} \quad \text{mit } \gamma \text{ differenzierbar}$$

und $\gamma(0) = p\,,\ \gamma(1) = q$.

Für $t \in [0,1]$ ist die Ableitung $\gamma'(t)$ eine komplexe Zahl,

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{Re}(\gamma(t)) + i\frac{d}{dt}\operatorname{Im}(\gamma(t)) \ .$$

Dann haben wir (mit der Kettenregel)

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \ .$$

Deshalb ist $f(\gamma(t))$ konstant und $f(p) = f(q)$. $\square$

(2) *Sei f eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Sei*

$$\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{C} \quad \textit{mit } \gamma \textit{ differenzierbar.}$$

Die Kettenregel ist erfüllt:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,.$$

(3) *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und*

$$g : U \to V\,, \quad f : V \to \mathbb{C}$$

analytische Funktionen. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ analytisch und die Kettenregel ist erfüllt:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Übung: *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge. Für $p, q \in U$ beweisen Sie, dass eine differenzierbare Kurve*

$$\gamma : [0,1] \to U \subset \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad \gamma(0) = p\,, \quad \gamma(1) = q$$

existiert.

Übung: *Beweisen Sie (2) and (3) mit der Kettenregel aus der Analysisvorlesung des letzten Jahres (und Satz 1).*

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und sei $p \in U$ mit

$$f(p) = q \quad \text{und} \quad f'(p) \neq 0.$$

(4) *Eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{C}$ mit $q \in W$ und eine analytische Umkehrfunktion $g : W \to U$ existieren:*

$$f \circ g(z) = z \quad \textit{für alle} \quad z \in W$$

und $g'(q) = \frac{1}{f'(p)}$.

[Picture]

Beweis für **(4)**:

$f = u + iv$ ist eine differenzierbare Funktion

$$f : U \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \,.$$

Die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(p)$ ist

$$\mathrm{D}f(p) = \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \,.$$

Mit den Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$\det\Big(\mathrm{D}f(p)\Big) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(p)|^2 \neq 0 \,.$$

Der Satz von der Umkehrabbildung aus der Analysis gibt eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{C}$ und eine differenzierbare Funktion

$$g : W \to U \,, \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_W \,.$$

Wir müssen die Cauchy-Riemann Gleichungen für g beweisen.

Der Satz von der Umkehrabbildung sagt

$$\mathrm{D}g(z) = \mathrm{D}f(g(z))^{-1} = \begin{pmatrix} u_x(g(z)) & u_y(g(z)) \\ v_x(g(z)) & v_y(g(z)) \end{pmatrix}^{-1}$$

Wir berechnen:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u_x v_y - u_y v_x} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

Deshalb erfüllt g die Cauchy-Riemann Gleichungen. $\square$

§ Rationale Funktionen

• Sei $g(z)$ ein Polynom und sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit

$$g : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \,.$$

Das heisst $z \in U \Rightarrow g(z) \neq 0$.

• Sei $h(z) = \frac{1}{z}$, $\quad h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$.

Weil g und h analytisch sind, ist $h \circ g$ analytisch:

$$h \circ g = \frac{1}{g(z)} : U \to \mathbb{C} \,.$$

- Sei $f(z)$ ein Polynom

Dann ist $f \cdot \frac{1}{g}$ analytisch:

$$f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f(z)}{g(z)} : U \to \mathbb{C}\,.$$

Definition: $\frac{f(z)}{g(z)}$ ist eine rationale Funktion.

Beispiel: $r(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ ist eine rationale Funktion,

$$r : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}\,.$$

Übung: *Sei $f, g : U \to \mathbb{C}$ analytische Funktionen mit g nie 0. Zeigen Sie dass $\frac{f}{g}$ analytisch auf U ist und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.$$

§ Potenzreihen

Sei f eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \,.$$

Sei $0 \leq R \leq \infty$ der Konvergenzradius,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \,.$$

Beispiel: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (7^k + 1) z^k \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{7}$.

Satz 3 (Abel). *Sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} \ .$$

(i) $f(z)$ *ist konvergent für* $|z| < R$.

(ii) $f(z)$ *ist gleichmässig konvergent auf*

$$B(0,\rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}$$

für $\rho < R$.

(iii) $f(z)$ *ist nicht konvergent für* $|z| > R$.

Wörterbuch: divergent $=$ nicht konvergent.

Der Satz sagt nichts, wenn $|z| = R$ ist.

Ein paar Beispiele:

(1) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k$,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |2^k|^{\frac{1}{k}} = 2 \ .$$

$|z| < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ f(z) = \frac{1}{1-2z}$, f ist eine rationale Funktion.

Am Rand: f ist divergent für alle z mit $|z| = \frac{1}{2}$.

$|z| > \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ f(z)$ ist divergent.

(2) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{k}} = 1 \ .$$

$|z| < 1 \ \Rightarrow \ f(z) = -\log(1-z)$.

Am Rand: $f(z=1)$ divergent und $f(z=-1)$ konvergent.

$|z| > 1 \ \Rightarrow \ f(z)$ ist divergent.

Was ist passiert für die anderen Punkte am Rand:

$$|z| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \; = ?$$

Übung: *Zeigen Sie dass für* $|z| = 1$ *und* $z \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

konvergent ist.

(3) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k^2}\right|^{\frac{1}{k}} = 1 \ .$$

$|z| < 1 \ \Rightarrow \ f(z)$ heisst Dilogarithmus $Li_2(z)$.

Am Rand: $f(z)$ ist immer konvergent.

$|z| > 1 \ \Rightarrow \ f(z)$ ist divergent.

Übung: *Zeigen Sie dass für* $|z| = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

immer konvergent ist.

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist vollständig, deshalb

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \zeta^k| < \infty \qquad \Rightarrow$$

die Potenzreihe $f(z)$ ist konvergent im $z = \zeta$.

Beweis für $\Rightarrow$:

Wir benutzen die Methode von Cauchy:

$f(\zeta)$ ist konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall m > n > N,$$

$$\Big| \sum_{k=n}^{m} a_k \zeta^k \Big| < \epsilon\,.$$

Weil wir $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \zeta^k| < \infty$ haben, gilt

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall m > n > N,$$

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k \zeta^k| < \epsilon\,.$$

Nach der Dreiecksungleichung,

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k \zeta^k|\;. \qquad \square$$

Beweis (von Satz 3 (Abel)):

(i) $|z| < R \Rightarrow \exists \rho > 0$ mit $|z| < \rho < R$.

Nach Definition

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} .$$

Für alle genügend grossen k,

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\rho}$$

Dann $|a_k z^k| < \frac{|z^k|}{\rho^k}$ und

$$|a_k z^k| + |a_{k+1} z^{k+1}| + \cdots < \frac{|z|^k}{\rho^k} + \frac{|z|^{k+1}}{\rho^{k+1}} + \cdots$$

Wir haben rechts eine konvergente geometrische Reihe. □

Beweis (von Satz 3 (Abel)):

(ii) Das Argument ist dasselbe wie für (i).

(iii) $|z| > R \Rightarrow \exists \rho > 0$ mit $R < \rho < |z|$.

Nach Definition,

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} .$$

Unendlich oft ist

$$\frac{|z|^k}{\rho^k} < |a_k z^k|$$

deshalb ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nicht konvergent. □

Satz 4. *Sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius* $R > 0$.

(i) f *ist analytisch auf* $B(0, R)$.

(ii) *die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ *hat Konvergenzradius* R,

(iii) *für* $\zeta \in B(0, R)$,

$$f'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \zeta^{k-1} .$$

Beweis für (ii):

$$\begin{aligned}
\log(R) &= -\log\left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= -\limsup_{k\to\infty} \log(|a_k|^{\frac{1}{k}}) \\
&= -\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log(|a_k|) .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\log\left(\limsup_{k\to\infty} |ka_k|^{\frac{1}{k}}\right) &= -\limsup_{k\to\infty} \log(|ka_k|^{\frac{1}{k}}) \\
&= -\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\log(k) + \frac{1}{k}\log(|a_k|)\right) \\
&= -\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log(|a_k|) \\
&= \log(R)\ .
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir

$$
\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |ka_k|^{\frac{1}{k}}\ ,
$$

R ist der Konvergenzradius von

$$
\sum_{k=0}^{\infty} ka_k z^k = z\sum_{k=0}^{\infty} ka_k z^{k-1},
$$

R ist der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k z^{k-1}$.

Beweis für (i) + (iii) zusammen:

Sei $|\zeta| < \rho < R$, und

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k , \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} .$$

Wir müssen zeigen:

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = g(\zeta) .$$

Wir schreiben

$$f(z) = \mathrm{S}_n(z) + \mathrm{R}_n(z) , \quad \mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k , \ \mathrm{R}_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k .$$

Wir haben:

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}-g(\zeta)\right| \leq$$

$$\left|\frac{\mathrm{S}_n(z)-\mathrm{S}_n(\zeta)}{z-\zeta}-\mathrm{S}_n'(\zeta)\right| + \left|\frac{\mathrm{R}_n(z)-\mathrm{R}_n(\zeta)}{z-\zeta}\right| + \left|\mathrm{S}_n'(\zeta)-g(\zeta)\right| \ .$$

Sei $\epsilon > 0$.

- Der zweite Term ist beschränkt durch:

$$\left|\frac{\mathrm{R}_n(z)-\mathrm{R}_n(\zeta)}{z-\zeta}\right| = \left|\frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k(z^k-\zeta^k)}{z-\zeta}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left|a_k(z^{k-1}+z^{k-2}\zeta+\cdots+\zeta^{k-1})\right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|(\rho+\delta)^{k-1}, \qquad |z-\zeta|<\delta\,.$$

Teil (ii) $\Rightarrow$ $\sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|(\rho+\delta)^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}$ für $\delta < \frac{R-\rho}{2}$ und n genügend gross.

- Der dritte Term ist beschränkt durch:

$$\left|S_n'(\zeta) - g(\zeta)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} k a_k \zeta^{k-1}\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1}.$$

Teil (ii) $\Rightarrow$ $\sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}$ für n genügend gross.

- Der erste Term

Sei $\delta < \frac{R-\rho}{2}$ und n genügend gross für

die Abschätzungen oben.

$S_n(z)$ ist ein Polynom $\Rightarrow$ $S_n(z)$ analytisch,

Deshalb $\exists\, \widehat{\delta} < \delta$,

$$|z-\zeta| < \widehat{\delta} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{S_n(z) - S_n(\zeta)}{z-\zeta} - S_n'(\zeta)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Für $|z-\zeta| < \widehat{\delta}$ haben wir

$$\left| \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - g(\zeta) \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\,.$$

$f(z)$ ist differenzierbar im Punkt $\zeta \in B(0,R)$ mit Ableitung

$$f'(\zeta) = g(\zeta)\,.$$

Wir sehen, dass f komplex differenzierbar auf $B(0,R)$ ist.

Die Ableitung g ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R

$\Rightarrow$ g ist auch komplex differenzierbar auf $B(0,R)$

$\Rightarrow$ g ist stetig auf $B(0,R)$.

Deshalb ist $f' = g$ stetig und ist f analytisch auf $B(0,R)$. $\square$

$f' = g$ ist eine Potenzreihe mit konvergenzradius R:

$$\text{Satz 4} \quad \Rightarrow \quad f' \text{ ist analytisch auf } B(0,R)$$

Dann sind f'', f''', f'''', ... auch analytisch auf $B(0,R)$.

Wir haben bewiesen, dass $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ unendlich oft komplex differenzierbar in $B(0,R)$ ist und

$$\frac{d^n f}{dz^n}(0) = n! a_n \,.$$

Potenzreihen geben uns viele analytische Funktionen.

Wir definieren $\exp(z)$ mit einer Potenzreihe:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \,.$$

§ Die Exponentialfunktion

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k > \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow$

$$(k!)^{\frac{1}{k}} > \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\,.$$

Deshalb sehen wir

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} \;\le\; \limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \;=\; 0\,.$$

Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} = 0\,, \qquad R = \infty\,.$$

Satz 5. *Sei* $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *:*

(i) exp *ist analytisch auf* $\mathbb{C}$,

(ii) $\frac{d\exp}{dz} = \exp$,

(iii) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ *für* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(iv) $\exp(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Wir haben (i) schon bewiesen, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Von Satz 5 sehen wir (ii) :

$$\frac{d\exp}{dz}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(z)\,.$$

$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist die einzige konvergente Potenzreihe mit

$$exp(0) = 1\,, \quad \frac{d\exp}{dz} = \exp\ .$$

Beweis für (iii):

Sei $\phi(z) = \exp(z) \cdot \exp(c - z)$ mit $c \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= \frac{d\exp}{dz}(z) \cdot \exp(c-z) - \exp(z) \cdot \frac{d\exp}{dz}(c-z) \\ &= \exp(z) \cdot \exp(c-z) - \exp(z) \cdot \exp(c-z) = 0\,. \end{aligned}$$

Deshalb ist $\phi(z)$ eine Konstante:

Wir haben $\phi(0) = \exp(0) \cdot \exp(c) = \exp(c)$

$$\Rightarrow \quad \phi(z) = \exp(c) \ \text{ für alle } \ z \in \mathbb{C}\,.$$

Sei $z = z_1$ und $c = z_1 + z_2$:

$$\phi(z_1) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \phi(z_1) = \exp(z_1 + z_2)\,. \qquad \square$$

Beweis für (iv):

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0.$

Wir definieren:

- $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.718281828459045\ldots$,
- $e^z = \exp(z)$,
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \cdots$,
- $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \cdots$,

$\sin(z)$ und $\cos(z)$ sind analytisch auf $\mathbb{C}$ (weil $\exp(z)$ analytisch ist) und haben Potenzreihen mit $R = \infty$.

Drei bekannte Eigenschaften:

- $\sin'(z) = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \cos(z)$,
- $\cos'(z) = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -\sin(z)$,
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 = 1$.

Bei den Potenzreihen sehen wir:

$$z \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \sin(z)\,,\cos(z) \in \mathbb{R} \;.$$

Aber $\sin(z)$ und $\cos(z)$ können auch nicht reell sein:

$$\sin(i) = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) \;.$$

§ Die Zahl π

Wir studieren $\sin(\cdot)$ auf der reellen Achse:

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \theta \mapsto \sin(\theta)\ .$$

Wir haben:

- $\sin(0) = 0$,
- $\sin(\theta) > 0$ für kleine $\theta > 0$ weil

$$\sin'(0) = \cos(0) = 1\,,$$

- $\sin(4) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$< \sum_{k=0}^{4}(-1)^k \frac{4^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\frac{240128}{361880} < 0\,.$$

Wir definieren $\pi \in \mathbb{R}$ als die kleinste positive Zahl mit

$$\sin(\pi) = 0\ .$$

sin ist stetig $\Rightarrow$ π existiert und $0 < \pi < 4$.

Übung: *Mit dieser Definition beweisen Sie, dass der Umfang des Einheitskreises 2π ist. Benutzen Sie ein Kurvenintegral zur Berechnung der Länge.*

Für $0 < \theta < \pi$ ist $\sin(\theta) > 0$ und deshalb

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta) < 0\,.$$

Wir haben $\cos(\pi) < 1$. Also

$$\sin^2(\pi) + \cos^2(\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(\pi) = -1\,.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{iz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cos(z) + i\sin(z)\ .$$

Wir haben bewiesen: $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1\ .$

Im Analysiskurs sehen wir

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = 0.78539816339...$$

Beweis (einfach): Studieren Sie $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Viel schwieriger (mit sehr schnellerer Konvergenz) ist die Formel von Ramanujan:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{(k!)^4} \frac{1103 + 26390k}{396^{4k}} .$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.3183098861\ldots ,$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}(1103) = 0.3183098783\ldots ,$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(1103 + \frac{4! \cdot (1103 + 26390)}{396^4}\right) = 0.3183098860\ldots .$$

- $e^{z+2\pi in} = e^z \cdot e^{2\pi in} = e^z$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis. Wir haben eine bijektive Funktion:

$$[0, 2\pi) \to S^1\,, \quad \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,.$$

Es ist besser zu schreiben:

$$\exp(i\,\cdot) : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} S^1\,.$$

Wir haben eine bijektive Funktion:

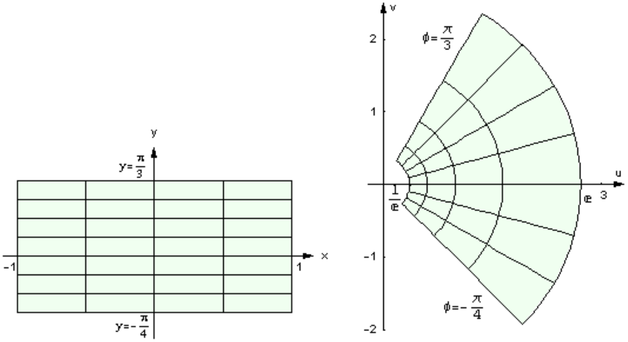
$$\mathbb{R}\times[0, 2\pi) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \quad z = r + i\theta \mapsto e^z = e^r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\,.$$

Es ist besser zu schreiben:

$$\exp : \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Beispiel: $\exp(z)$ ist analytisch auf $\mathbb{C}$,

$\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad$ exp ist konform auf $\mathbb{C}$:



von John Matthews: http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/