Funktionentheorie

R. Pandharipande

HS 2015, ETH Zürich

§ Kurven

- Eine stetige Kurve ist eine stetige Funktion

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \, .$$

  - $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall,
  - $\gamma(a)$ ist der Anfangspunkt,
  - $\gamma(b)$ ist der Endpunkt,
  - die Orientierung der Kurve ist von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.

[Picture]

- Eine differenzierbare Kurve ist eine differenzierbare Funktion

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\,.$$

Wir haben dann eine Ableitung

$$\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}\,.$$

- Eine C^1-Kurve ist eine stetig differenzierbare Funktion

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\,.$$

Dann ist die Ableitung γ' stetig.

Wörterbuch (für uns): eine Kurve ist eine C^1-Kurve.

§ Kurvenintegrale

Seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge,

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion und

$$\gamma : [a, b] \to U$$

eine Kurve.

Wir definieren das Kurvenintegral über f entlang γ als

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt\,.$$

Weil $f \circ \gamma$ und γ' stetig sind, existiert das Riemannintegral.

Beispiel: Sei $F : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, sei

$$f = F' : U \to \mathbb{C}$$

und sei γ eine Kurve in U,

$$\gamma : [a, b] \to U\,.$$

Wir berechnen (mit der Kettenregel):

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Nur der Anfangspunkt $p = \gamma(a)$ und der Endpunkt $q = \gamma(b)$ sind wichtig für das Kurvenintegral über $f = F'$ entlang γ,

$$\int_\gamma f(z)dz = F(q) - F(p)\,.$$

Wenn $f = F'$, ist das Kurvenintegral einfach:

- $e^z = \frac{d}{dz}e^z \;\Rightarrow\; \int_p^q e^z dz = e^q - e^p$,
- $\sin(z) = -\cos'(z) \Rightarrow \int_p^q \sin(z)dz = \cos(p) - \cos(q)$,
- $\cos(z) = \sin'(z) \Rightarrow \int_p^q \cos(z)dz = \sin(q) - \sin(p)$.

Für $n \geq 0$, $\;z^n = \frac{d}{dz}\frac{z^{n+1}}{n+1} \;\Rightarrow$

$$\int_p^q z^n dz = \frac{q^{n+1}}{n+1} - \frac{p^{n+1}}{n+1}$$

Für $n < 0$?

$[n = -1]$ Sei $U = \mathbb{C} \setminus 0 \subset \mathbb{C}$, sei

$$f(z) = \frac{1}{z}\,, \qquad f : U \to \mathbb{C}$$

und sei γ der Einheitskreis,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \qquad \gamma(t) = e^{it}\ .$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\, dt \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

Für den Einheitskreis,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \,, \qquad \gamma(t) = e^{it} \;,$$

sind Anfangspunkt und der Endpunkt gleich:

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1 \;.$$

Gäbe es eine Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$,

dann wäre

$$\int_\gamma f(z)dz = F(1) - F(1) = 0 \,.$$

Aber wir haben berechnet: $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

Deshalb gibt es keine Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit Ableitung

$$f(z) = \frac{1}{z} \;.$$

Jetzt sei γ_r der Kreis mit Radius $r > 0$,

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \qquad \gamma_r(t) = r e^{it}\ .$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}} \cdot i r e^{-it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\, dt \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz$ ist unabhängig vom Radius r.

$[n \leq -2]$ $\quad z^n = \frac{d}{dz}\frac{z^{n+1}}{n+1} \;\; \Rightarrow$

$$\int_p^q z^n dz = \frac{q^{n+1}}{n+1} - \frac{p^{n+1}}{n+1}$$

Wir haben bewiesen:

Satz 6. *Das Kurvenintegral über z^n entlang des Kreises γ_r ist*

$$\int_{\gamma_r} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1\,, \\ 2\pi i & \text{für } n = -1\,. \end{cases}$$

Eine stückweise C^1 -Kurve

$$\gamma : [a, b] \to U$$

hat eine endliche Zerlegung

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : [a = a_0, a_1] &\to U\,, \\
\gamma_2 : [a_1, a_2] &\to U\,, \\
&\vdots \\
\gamma_n : [a_{n-1}, a_n = b] &\to U\,,
\end{aligned}$$

wobei jede Einschränkung γ_i eine C^1-Kurve ist und

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_1)\,, \quad \gamma_2(a_2) = \gamma_3(a_2)\,, \ \ldots \ .$$

Für eine stückweise C^1-Kurve

$$\gamma : [a, b] \to U$$

definieren wir das Kurvenintegral über f entlang γ als

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz \, .$$

[Picture]

§ Umparametrisierung

Eine Umparametrisierung von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist eine stetig differenzierbare Funktion

$$\phi : [\,\widehat{a}, \widehat{b}\,] \to [a, b]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $\phi(\,\widehat{a}\,) = a$
- $\phi(\,\widehat{b}\,) = b$
- $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [\,\widehat{a}, \widehat{b}\,]$

Die Umparametrisierung ϕ ist bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\phi^{-1} : [a, b] \to [\,\widehat{a}, \widehat{b}\,]$$

ist auch eine Umparametrisierung.

Beispiel: $\phi : [0,1] \to [0,2]\ , \quad \phi(t) = t^2 + t\ .$

Seien $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und γ eine Kurve,

$$\gamma : [a,b] \to U\,.$$

Eine Umparametrisierung von γ ist eine Kurve

$$\widehat{\gamma} = \gamma \circ \phi : [\,\widehat{a}, \widehat{b}\,] \to U$$

erzeugt durch eine Umparametrisierung

$$\phi : [\,\widehat{a}, \widehat{b}\,] \to [a,b]\,.$$

Satz 7. *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz\,.$$

Beweis für Satz 7:

Wir berechnen (mit der Substitutionsregel):

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz &= \int_{\widehat{a}}^{\widehat{b}} f(\widehat{\gamma}(t)) \cdot \widehat{\gamma}'(t)dt \\
&= \int_{\widehat{a}}^{\widehat{b}} f(\gamma(\phi(t))) \cdot \gamma'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_\gamma f(z)dz. \qquad \square
\end{aligned}$$

Übung: *Ist die Bedingung*

- $\phi'(t) > 0$ *für alle* $t \in [\widehat{a}, \widehat{b}]$

wichtig für Satz 7?

Beispiel: Sei $\phi : [0,1] \to [0,1]$,

$$\phi(t) = 1 - t\,, \qquad \phi(0) = 1\,, \quad \phi(1) = 0\,,$$

und sei $\gamma : [0,1] \to U$ eine Kurve.

Dann haben wir

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma(\phi)} f(z)dz\,.$$

Die Orientierung ist wichtig für das Vorzeichen.

§ Berechnung der Länge

Sei γ eine Kurve,

$$\gamma : [a, b] \to U \, .$$

Wir definieren die Länge von γ als

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \ .$$

Übung: *Beweisen Sie dass die Länge von γ unabhängig von der Parametrisierung ist.*

Beispiel: Die Länge des Einheitkreises ist

$$\int_0^{2\pi} |cos'(t) + i \cdot sin'(t)| dt \ = \ \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \ .$$

Seien $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und γ eine Kurve,

$$\gamma : [a, b] \to U .$$

Sei M das Maximum von $|f(\gamma(t)|$ für $t \in [a, b]$.

Standardabschätzung für Kurvenintegrale:

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot \ell(\gamma) .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &= M \cdot \ell(\gamma) . \qquad \square \end{aligned}$$

Für eine stückweise C^1-Kurve

$$\gamma : [a, b] \to U$$

definieren wir die Länge von γ als

$$\ell(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\gamma_i).$$

Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale ist auch gültig für eine stückweise C^1-Kurve.

§ Der Cauchysche Integralsatz [Rechteck]

Sei $Q \subset \mathbb{C}$ eine achsenparallele abgeschlossene Rechteckfläche vom Umfang ℓ. Sei

$$\partial Q : [0, \ell] \to \mathbb{C}$$

die Randkurve (mit positiver Orientierung und Länge ℓ):

[Picture]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $Q \subset U$, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion.

Satz 8 (Cauchy). *Für eine analytische Funktion f haben wir*

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = 0 \,.$$

Übung: Wenn f keine analytische Funktion ist, ist

$$\int_{\partial Q} f(z) dz \neq 0$$

möglich. Finden Sie ein Beispiel!

Beweis für Satz 8 (Cauchy):

Seien $0,\ a,\ a+bi,\ bi\ \in \mathbb{C}$ die Ecken von Q:

$$[Picture]$$

Seien S, E, N, W die vier Seiten von Q.

Weil der Umfang ℓ ist

$$2a + 2b = \ell\ .$$

Was ist das Kurvenintegral von 0 bis a (Seite S)?

$$\int_S f(z)dz = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a u(t,0)dt + i\int_0^a v(t,0)dt\ .$$

Hier $f = u + iv$ wie immer.

Und für die andere Seiten (E,N,W)?

$$\begin{aligned}
\int_E f(z)dz &= \int_0^b f(a+it)idt = -\int_0^b v(a,t)dt + i\int_0^b u(a,t)dt \ , \\
\int_N f(z)dz &= -\int_0^a f(t+ib)dt = -\int_0^a u(t,b)dt - i\int_0^a v(t,b)dt \ , \\
\int_W f(z)dz &= -\int_0^b f(it)idt = \int_0^b v(0,t)dt - i\int_0^b u(0,t)dt \ .
\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\partial Q} f(z)dz\right) = \int_0^a u(t,0)dt - \int_0^b v(a,t)dt - \int_0^a u(t,b)dt + \int_0^b v(0,t)dt \ ,$$

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\partial Q} f(z)dz\right) = \int_0^a v(t,0)dt + \int_0^b u(a,t)dt - \int_0^a v(t,b)dt - \int_0^b u(0,t)dt \ ,$$

Sei $\omega = udx - vdy$ und $\widehat{\omega} = vdx + udy$.

Vom Letzten Jahr (Satz von Green/Stokes):

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\partial Q} f(z)dz\right) = \int_{\partial Q} \omega = \int_{Q} d\omega\,.$$

Was ist $d\omega$?

$$\begin{aligned} d\omega &= u_y dy \wedge dx - v_x dx \wedge dy \\ &= (-u_y - v_x) dx \wedge dy \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

mit der Cauchy-Riemann Gleichung $u_y = -v_x$.

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\partial Q} f(z)dz\right) = \int_{\partial Q} \widehat{\omega} = \int_Q d\widehat{\omega}\,.$$

Was ist $d\widehat{\omega}$?

$$\begin{aligned} d\widehat{\omega} &= v_y dy \wedge dx + u_x dx \wedge dy \\ &= (u_x - v_y) dx \wedge dy \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

mit der anderen Cauchy-Riemann Gleichung $u_x = v_y$. $\square$

Der Satz von Green/Stokes im Beweis vom Satz 8 (Cauchy) braucht dass u und v stetig differenzierbar sind. Weil f analytisch ist, sind u and v stetig differenzierbar. Aber der Beweis vom Satz 8 ist nicht gültig für f nur komplex differenzierbar.

Satz 8′ (Cauchy). *Für eine komplex differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ haben wir*

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = 0$$

für ein achsenparalleles Rechteck $Q \subset U$.

Beweis für Satz 8′ (Cauchy):

Wir werden zeigen, dass $|\int_{\partial Q} f(z)dz|$ kleiner als jede positive Zahl ist, also 0 ist.

Sei $\epsilon > 0$.

Wir unterteilen das Rechteck Q vertikal und horizontal und bekommen 4 gleiche Teile:

[*Picture*]

Wir haben

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)dz \,.$$

Deshalb gibt es ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial Q} f(z)dz \right| \;\leq\; 4 \left| \int_{\partial R_j} f(z)dz \right| \;.$$

Sei $Q_1 = R_j$.

$$[Picture]$$

Wir wiederholen die Konstruktion und finden

eine unendliche Kette von immer kleineren Recktecken:

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots \supset Q_n \supset \cdots$$

mit $\left|\int_{\partial Q} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial Q_n} f(z)dz\right|$.

[*Picture*]

Wegen der Kompaktheit der Rechtecke, haben wir einen Grenzpunkt z_0 mit

$$z_0 \in Q_n \quad \text{für alle } n\,.$$

Weil f komplex differenzierbar um z_0 ist, existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Wir schreiben

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \chi(z)$$

und wählen $\delta > 0$ so klein, dass

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\chi(z)| < \epsilon \cdot |z - z_0|\,.$$

Das ursprüngliche Rechteck Q hat Umfang ℓ

$$\Rightarrow \quad Q_n \text{ hat Umfang } 2^{-n}\ell\,.$$

Jetzt wählen wir n so, dass $2^{-n}\ell < \delta$.

Wir berechen

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial Q} f(z)dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{\partial Q_n} f(z)dz\right| \\
&= 4^n \left|\int_{\partial Q_n} \chi(z)dz\right| \\
&\leq 4^n \cdot \epsilon \cdot 2^{-n}\ell \cdot 2^{-n}\ell \\
&\leq \epsilon \cdot \ell^2\,.
\end{aligned}$$

- Wir haben

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial Q_n} f(z)dz &= \int_{\partial Q_n} \Big(f(z_0) + f'(z_0)\cdot(z - z_0) + \chi(z) \Big) dz \\
&= \int_{\partial Q_n} \chi(z)dz
\end{aligned}
$$

weil $f(z_0)$ und $f'(z_0)\cdot(z - z_0)$ Ableitungen sind.

- Die Standardabschätzung gibt

$$
\left| \int_{\partial Q_n} \chi(z)dz \right| \leq \epsilon \cdot 2^{-n}\ell \cdot 2^{-n}\ell\,,
$$

weil wir

$$
|\chi(z)| < \epsilon \cdot |z - z_0| < \epsilon \cdot 2^{-n}\ell \quad \text{und} \quad \ell(Q_n) = 2^{-n}\ell
$$

haben.

§ Der Cauchysche Integralsatz [Bilder von Rechtecken]

Sei $Q \subset \mathbb{C}$ eine achsenparallele abgeschlossene Rechteckfläche vom Umfang ℓ. Sei

$$\partial Q : [0, \ell] \to \mathbb{C}$$

die Randkurve (mit positiver Orientierung und Länge ℓ).

Sei $\phi : Q \to U$ eine C^1-Abbildung:

[Picture]

Satz 8$''$ (Cauchy). *Für eine komplex differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ haben wir*

$$\int_{\phi\circ\partial Q} f(z)dz = 0\,.$$

Beweis für Satz 8$''$:

Die Strategie ist die gleiche wie vorher:

wir teilen die achsenparallelen Rechtecke $Q \subset \mathbb{C}$

in immer kleinere Recktecke:

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots \supset Q_n \supset \cdots$$

mit $\left|\int_{\phi\circ\partial Q} f(z)dz\right| \;\leq\; 4^n \left|\int_{\phi\circ\partial Q_n} f(z)dz\right|$.

Früher haben wir $\ell(\partial Q_n) = 2^{-n}\ell$ benutzt.

Aber jetzt müssen wir $\ell(\phi \circ \partial Q_n)$ beschränken.

Weil ϕ stetig differenzierbar ist, existiert D, so dass

$$\left|\frac{\partial \mathrm{Re}\phi}{\partial x}(p)\right|, \quad \left|\frac{\partial \mathrm{Re}\phi}{\partial y}(p)\right| < \frac{D}{2},$$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{Im}\phi}{\partial x}(p)\right|, \quad \left|\frac{\partial \mathrm{Im}\phi}{\partial y}(p)\right| < \frac{D}{2} \quad \text{für alle } p \in Q.$$

Für jede Kurve $\gamma : [a, b] \to Q$, gilt

$$\ell(\phi \circ \gamma) < D \cdot \ell(\gamma).$$

Deshalb haben wir $\ell(\phi \circ \partial Q_n) < 2^{-n}\ell D$.

Wegen der Kompaktheit der Rechtecke, haben wir einen Grenzpunkt z_0 mit

$$z_0 \in Q_n \quad \text{für alle } n\,.$$

Weil f komplex differenzierbar um $\phi(z_0)$ ist, existiert

$$f'(\phi(z_0)) = \lim_{z \to \phi(z_0)} \frac{f(z) - f(\phi(z_0))}{z - \phi(z_0)}.$$

Wir schreiben

$$f(z) = f(\phi(z_0)) + f'(\phi(z_0)) \cdot (z - \phi(z_0)) + \chi(z)$$

und wählen $\delta > 0$ so klein, dass

$$|z - \phi(z_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\chi(z)| < \epsilon \cdot |z - \phi(z_0)|\,.$$

Jetzt wählen wir n so, dass $2^{-n}\ell D < \delta$.

Wir berechen

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\phi\circ\partial Q} f(z)dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{\phi\circ\partial Q_n} f(z)dz\right| \\
&= 4^n \left|\int_{\phi\circ\partial Q_n} \chi(z)dz\right| \\
&\leq 4^n \cdot \epsilon \cdot 2^{-n}\ell D \cdot 2^{-n}\ell D \\
&\leq \epsilon \cdot \ell^2 D^2 .
\end{aligned}$$

- Wir haben

$$\begin{aligned}\int_{\phi\circ\partial Q_n} f(z)dz &= \int_{\phi\circ\partial Q_n} \Big(f(\phi(z_0)) + f'(\phi(z_0))\cdot(z-\phi(z_0)) + \chi(z)\Big)dz \\ &= \int_{\phi\circ\partial Q_n} \chi(z)dz\end{aligned}$$

weil $f(\phi(z_0))$ und $f'(\phi(z_0))\cdot(z-\phi(z_0))$ Ableitungen sind.

- Die Standardabschätzung gibt

$$\left|\int_{\phi\circ\partial Q_n} \chi(z)dz\right| \leq \epsilon\cdot D2^{-n}\ell\cdot D2^{-n}\ell\,,$$

weil wir

$$|\chi(z)| < \epsilon\cdot|z-\phi(z_0)| < \epsilon\cdot 2^{-n}\ell D \quad \text{und} \quad \ell(\phi\circ Q_n) < 2^{-n}\ell D$$

haben. □

§ Der Cauchysche Integralsatz [noch mehr]

Seien $\overline{B}(z_0, R) \subset \mathbb{C}$ der abgeschlossene Ball mit Radius R und

$$\partial B(z_0, R) : [0, 2\pi] \to \overline{B}(z_0, R)$$

die Randkurve (mit positiver Orientierung).

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine komplex differenzierbare Funktion.

Dann haben wir

$$\int_{\partial B(z_0,R)} f(z)dz = 0\,.$$

Beweis:

Sei $Q \subset \mathbb{C}$ das folgende Rechteck

$$Q = [0, R] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} .$$

Sei $\phi : Q \to \overline{B}(z_0, R) \subset U$,

$$\phi(r, \theta) = z_0 + re^{i\theta} .$$

Satz 8'' $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\phi\circ\partial Q} f(z)dz \\ &= \int_{z_0}^{z_0+R} + \int_{\partial B(z_0,R)} + \int_{z_0+R}^{z_0} + \int_{z_0}^{z_0} f(z)dz \\ &= \int_{\partial B(z_0,R)} f(z)dz . \qquad \square \end{aligned}$$

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Kurve mit

$$\gamma(a) = \gamma(b)\,.$$

Wörterbuch: γ ist eine geschlossene Kurve.

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion.

Übung: *Beweisen Sie, dass*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

§ Homotopie von Kurven

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $p, q \in U$.

Seien $\gamma, \widehat{\gamma} : [0,1] \to U$ zwei C^1-Kurven mit

$$\gamma(0) = \widehat{\gamma}(0) = p\,, \quad \gamma(1) = \widehat{\gamma}(1) = q\,.$$

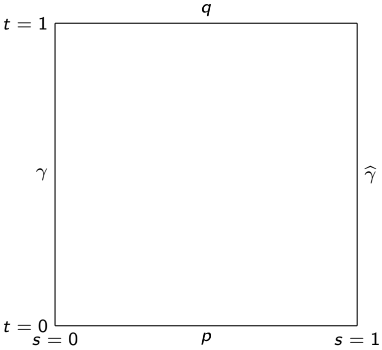
Eine C^1-Homotopie in U zwischen γ und $\widehat{\gamma}$ ist eine C^1-Funktion

$$\phi : [0,1] \times [0,1] \to U$$

sodass wir für alle $s, t \in [0,1]$

$$\phi(s,0) = p\,, \quad \phi(s,1) = q\,, \quad \phi(0,t) = \gamma(t)\,, \quad \phi(1,t) = \widehat{\gamma}(t)$$

haben.



Für $s \in [0,1]$ haben wir eine Kurve

$$\phi_s : [0,1] \to U\,, \qquad \phi_s(t) = \phi(s,t)\,.$$

Von der Definition,

$$\phi_0 = \gamma\,, \quad \phi_1 = \widehat{\gamma}\,.$$

Wir haben

$$\phi_s(0) = p\,, \quad \phi_s(1) = q\,.$$

Übung: *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbare.*
Sei ϕ eine C^1-Homotopie in U zwischen den Kurven

$$\gamma, \widehat{\gamma} : [0,1] \to U\,.$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz\,.$$

Mehr ist Wahr: für alle $s \in [0,1]$ haben wir

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\phi_s} f(z)dz\,.$$

§ Die Cauchyformel

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine komplex differenzierbare Funktion.

Wir schreiben $\int_{|z-z_0|=R}$ für $\int_{\partial B(z_0,R)}$.

Satz 9 (Cauchyformel). *Für $a \in B(z_0, R)$ haben wir*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \, .$$

Beweis für Satz 9 (Cauchyformel):

Aus dem Cauchyschen Integralsatz für Bilder von Rechtecken folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

für genügend kleines ϵ.

Deshalb ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

unabhängig von ϵ.

Wir schreiben

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(a)}{z-a}\,dz\,.$$

- Weil f komplex differenzierbar um a ist, existiert

$$f'(a) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,.$$

Deshalb haben wir für genügend kleines ϵ

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| < |f'(a)| + 1\,.$$

Die Standardabschätzung ergibt

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\right| \;\leq\; \frac{1}{2\pi i}(|f'(a)|+1)\cdot 2\pi\epsilon\,.$$

Mit $\epsilon \to 0$, sehen wir, dass auch das Integral $\to 0$ muss.

- Wir haben

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{f(a)}{z-a}\,dz \;=\; \frac{f(a)}{2\pi i}\int_{|z-a|=\epsilon}\frac{1}{z-a}\,dz \;=\; \frac{f(a)}{2\pi i}2\pi i = f(a)\;.$$

Hier haben wir Satz 6 benutzt. □

§ Der Mittelwertsatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine komplex differenzierbare Funktion.

Satz 10 (Mittelwertsatz). *Der Wert $f(z_0)$ ist der Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand des Kreises:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt\,.$$

Beweis für Satz 10 (Mittelwertsatz):

Die Cauchyformel gibt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt\,. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 9 und 10 sagen, dass f von den Randwerten bestimmt ist.

Das ist nicht so für eine reelle differenzierbare Funktion.

§ Die Potenzreihenentwicklung

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine komplex differenzierbare Funktion.

Satz 11 (Potenzreihenentwicklungssatz).

Für $z_0 \in U$ gibt es genau eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit positivem Konvergenzradius, die in einer Umgebung von z_0 die Funktion f darstellt.

Beweis für Satz 11 (Potenzreihenentwicklungssatz):

Sei $z_0 = 0$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit), und sei $\overline{B}(0, R) \subset U$.

Für $z \in B(0, R)$ gibt die Cauchyformel

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \, d\zeta \,. \end{aligned}$$

Für festes $|z| < R$ haben wir absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k : \partial B(0, R) \to \mathbb{C} \,.$$

Deshalb können wir schreiben:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} z^k\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}$$

hat einen Konvergenzradius von mindestens R und stellt f auf $B(0,R)$ dar.

Wir haben gesehen, dass die Potenzenreihe auf $B(0, R)$ unendlich oft differenzierbar ist.

Dann haben wir

$$\frac{d^n f}{dz^n}(0) \;=\; \frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\Big|_{z=0} \;=\; n! a_n\,.$$

Deshalb gibt es nur eine Potenzenreihe mit positivem Konvergenzradius, die in einer Umgebung von z_0 die Funktion f darstellt. $\square$

Im Beweis des letzten Satzes haben wir gesehen, dass f unendlich oft differenzierbar ist und

$$\frac{d^n f}{dz^n}(0) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\,.$$

Satz 12 (Goursat). *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Dann ist f unendlich oft komplex differenzierbar.*

Wir haben definiert:

• f ist analytisch auf U, falls f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist und die entstehende Funktion

$$z \mapsto f'(z) \quad \text{stetig ist.}$$

Aus Satz 12 folgt:

f ist komplex differenzierbar auf $U \iff f$ ist analytisch auf U.

§ Cauchysche Abschätzung

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion. Für

$$z_0 \in \overline{B}(z_0, R) \subset U$$

haben wir bewiesen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k , \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für $z \in B(z_0, R)$.

Satz 13 (Cauchysche Abschätzung). *Sei* $|f(z)| < M$ *für alle* $z \in \partial B(z_0, R)$. *Dann gilt*

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}.$$

Beweis für Satz 13:

Standardabschätzung $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \\ &= \frac{M}{R^k}. \qquad \square \end{aligned}$$

Eine ganze Funktion ist eine analytische Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ .$$

Satz 14 (Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis für Satz 14:

Sei M so, dass $|f(z)| < M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Weil f eine ganze Funktion ist, haben wir eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \, .$$

Cauchy Abschätzung $\Rightarrow$

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k} \quad \text{für alle} \quad R > 0\,.$$

Deshalb haben wir

$$a_k = 0 \quad \text{für} \quad k > 0\,.$$

Nur a_0 kann von 0 verschieden sein. $\square$

§ Polynome

Ein Polynom f hat den Grad n wenn

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

Satz 15 (Fundamentalsatz der Algebra).

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis für Satz 15:

Sei $f(z) = \sum_{i=1}^{n} a_n z^n$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$.

Wir haben $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

Das heisst: $\forall M > 0 \;\; \exists R$

$$|z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > M\,.$$

Hätte f keine Nullstelle, dann wäre

$$\frac{1}{f(z)}$$

eine beschränkte ganze Funktion, also konstant (Satz 14). $\square$

Übung: Ein Polynom $f(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ist

ein Produkt aus n Linearfaktoren:

$$f(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i) \ , \qquad a_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C} \, .$$

Ein Polynom f vom Grade n ist normiert wenn $a_n = 1$.

Dann können wir schreiben:

$$f(z) = z^n + e_1 z^{n-1} + \cdots + e_{n-1} z + e_n \quad \text{und} \quad f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \zeta_i)\,.$$

Übung: Beweisen Sie die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{i=1}^{n} \zeta_i\,, \\
e_2 &= \sum_{i<j} \zeta_i \zeta_j\,, \\
e_3 &= \sum_{i<j<k} \zeta_i \zeta_j \zeta_k\,, \\
&\ \vdots \\
e_n &= \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n\,.
\end{aligned}$$

§ Nullstellen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

Sei $z_0 \in U$ ein Punkt mit $f(z_0) = 0$.

Wir nehmen an, dass f nicht konstant in der Nähe von z_0 ist:
Es gibt keine offene Menge $W \subset U$ mit $z_0 \in W$ und $f = 0$ auf W.

Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $\Rightarrow$ $\exists R > 0$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in B(z_0, R) \subset U \ .$$

f nicht konstant in der Nähe von z_0 $\Rightarrow$

nicht alle a_k können 0 sein.

Die Ordnung um z_0 ist das kleinste $n \geq 1$ mit $a_n \neq 0$.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$.

Ein Punkt $z_0 \in U$ ist eine Nullstelle mit Ordnung $n > 0$ von f falls:

- $\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) \neq 0$ und
- $\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = 0$ für alle $0 \leq k < n$.

$z_0 \in U$ ist eine Nullstelle mit Ordnung $n > 0$ $\Rightarrow$

$f(z_0) = 0$ und f ist nicht konstant in der Nähe von z_0.

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ ist eine einfache Nullstelle (Ordnung=1).

Beispiel: $f(z) = \sin(z)^2 - z^2$ hat eine Nullstelle mit Ordnung 4 um $z = 0$.

Satz 16. *Sei z_0 eine Nullstelle von einer analytischen Funktion*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

mit Ordnung $n > 0$. Dann existiert eine analytische Funktion

$$g : W \to \mathbb{C}$$

definiert in einer Umgebung $W \subset U$ von z_0 mit

$$f(z) = g(z)^n \quad \text{für alle } z \in W\ .$$

Wenn $f(z)$ anfängt mit

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + \cdots\,, \quad a_n \neq 0\,,$$

müssen wir

$$g(z) = \zeta(z - z_0) + \cdots\,, \quad \zeta^n = a_n$$

haben. Deshalb ist

$$g'(z_0) = \zeta \neq 0\,.$$

Aus dem analytischen Umkehrfunktionsatz folgt:

Es existiert eine offene Teilmenge $\widehat{U} \subset U$, so dass $z_0 \in \widehat{U}$ und

$$g : \widehat{U} \to g(\widehat{U}) \ \text{ ist bijektiv mit } g(\widehat{U}) \subset \mathbb{C} \text{ offen.}$$

Dann sehen wir:

- die Nullstelle z_0 von f ist isoliert:

$$g(z) \neq 0 \text{ für } z_0 \neq z \in \widehat{U} \quad \Rightarrow$$

$$f(z) = g(z)^n \neq 0 \text{ für } z_0 \neq z \in \widehat{U}\,.$$

- $f(U)$ enthält eine offene Umgebung um $0 \in \mathbb{C}$:

$$0 \in B(0, R) \subset g(\widehat{U}) \;\Rightarrow\; 0 \in B(0, R^n) \subset g^n(\widehat{U}) = f(\widehat{U})\,.$$

Korollar. *Sei z_0 eine Nullstelle von einer analytischen Funktion*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

mit Ordnung $n > 0$. Dann ist z_0 eine isolierte Nullstelle und $f(U)$ enthält eine offene Umgebung um 0.

Beweis für Satz 16:

Sei $z_0 = 0$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit).

Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots \\ &= z^n \left(a_n + a_{n+1} z + a_{n+2} z^2 + \cdots \right) \end{aligned}$$

mit $a_n \neq 0$ und $z \in B(0, R)$.

Sei $h : B(0, R) \to \mathbb{C}$ die analytische Funktion mit

der konvergenten Potenzreihenentwicklung

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k \,.$$

Wir haben $f(z) = z^n h(z)$ für alle $z \in B(0, R)$.

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = h(0) = a_n$, $\quad a_n \neq 0 \Rightarrow \zeta \neq 0$.

Sei $\phi(z) = z^n$. Wir haben

$$\phi(\zeta) = a_n \qquad \phi'(\zeta) = n\zeta^{n-1} \neq 0 \ .$$

Dann gibt es eine offene Teilmenge $\widehat{W}$,

$$a_n \in \widehat{W} \subset \mathbb{C} \, ,$$

und eine analytische Umkehrfunktion $\widehat{\phi} : \widehat{W} \to \mathbb{C}$,

$$\phi \circ \widehat{\phi}(z) = z \quad \text{für alle} \quad z \in \widehat{W}$$

mit $\widehat{\phi}(a_n) = \zeta$.

Weil h stetig ist, gibt es eine offene Teilmenge $W \subset U$ mit

$$0 \in W, \quad h(W) \subset \widehat{W}.$$

Dann haben wir auf W:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n h(z) \\ &= z^n \cdot \phi\left(\widehat{\phi}(h(z))\right) \\ &= z^n \cdot \widehat{\phi}(h(z))^n \\ &= (z\widehat{\phi}(h(z)))^n. \end{aligned}$$

Sei $g = z\widehat{\phi}(h(z))$. $\square$

Übung: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Falls es eine (nicht leere) offene Teilmenge $W \subset U$ gibt mit f konstant auf W, dann ist f konstant auf U .

Satz 17 (Gebietstreue). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge, und sei*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann ist

$$f(U) \subset \mathbb{C}$$

eine offene Teilmenge.

Beweis für Satz 17 (Gebietstreue):

Sei $z_0 \in U$. Die Funktion

$$\widehat{f}(z) = f(z) - f(z_0) : U \to \mathbb{C}$$

ist auch nicht-konstant und analytisch.

Deshalb ist $\widehat{f}$ nicht konstant in der Nähe von z_0,

nach der letzten Übung.

Die Nullstelle z_0 von f hat Ordnung $n > 0$ $\Rightarrow$

$\widehat{f}(U)$ enthält eine offene Umgebung um 0 $\Rightarrow$

$f(U)$ enthält eine offene Umgebung um $f(z_0)$. $\square$

Satz 18 (Maximumprinzip). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge, und sei*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine nicht-konstante analytische Funktion. Dann kann f kein Betragsmaximum haben.

Beweis für Satz 18 (Maximumprinzip):

Satz 17 (Gebietstreue) $\Rightarrow$

$$f(U) \subset \mathbb{C} \text{ ist eine offene Teilmenge.}$$

Eine offene Tielmenge in $\mathbb{C}$ kann kein Betragsmaximum haben. $\square$

Satz 19 (Identitätssatz). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zwei analytische Funktionen*

$$f, g : U \to \mathbb{C}\,,$$

die auf einer Teilmenge $S \subset U$ mit Häufungspunkt in U übereinstimmen, stimmen auf ganz U überein.

Beweis für Satz 19 (Identitätssatz):

Sei $h = f - g \quad \Rightarrow \quad h$ ist eine analytische Funktion auf U mit

$$h(s) = 0 \quad \text{für alle } s \in S\ .$$

Weil S einen Häufungspunkt hat, ist S nicht leer.

- Falls die Funktion h konstant ist, dann ist $h = 0$ und $f = g$.

Sei $z_0 \in U$ ein Häufungspunkt der Teilmenge S, $h(z_0) = 0$.

- Wäre die Funktion h nicht konstant, dann

  U zusammenhängend $\Rightarrow$

  h ist nicht konstant in der Nähe von z_0 $\Rightarrow$

  die Nullstelle z_0 von h ist isoliert. $\square$

Am Ende haben wir das Korollar von Satz 16 benutzt.

§ Satz von Morera

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Wir haben eine Umkehrung für den Cauchyschen Integralsatz.

Satz 20 (Morera). *Wenn, für alle geschlossene Dreiecksfläche $\Delta \subset U$,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

gilt, dann ist f analytisch auf U.

Beweis für Satz 20:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei

$$0 \subset B(0,R) \subset U\,.$$

Es ist genug zu beweisen, dass f analytisch auf $B(0,R)$ ist.

Wir definieren eine Funktion $F : B(0,R) \to \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_{L_{0,z}} f(z)dz\,.$$

Hier $L_{0,z}$ ist die gerade Linie von 0 nach z,

$$L_{0,z} : [0,1] \to B(0,R)\,, \qquad L_{0,z}(t) = tz\ .$$

Wir sehen

$$F(z) = \int_0^1 f(tz)\,z\,dt\,, \qquad F(0) = 0\,.$$

Weil f stetig ist, das Integral $\int_0^1 f(tz)\, z\, dt$ existiert.

Sei $z \in B(0,R)$ und $\delta z \in \mathbb{C}$ sehr klein.

Dann liegt die Dreieck Δ mit Ecken

$$0\,,\;\; z\,,\;\; z+\delta \;\; \in B(0,R)$$

in $B(0,R)$. Die drei Seiten von Δ sind

$$\partial\Delta = L_{0,z} \,\cup\, L_{z,z+\delta z} \,\cup\, L_{0,z+\delta z}\;.$$

Hier $L_{z,z+\delta z}$ ist die gerade Linie von z nach $z+\delta z$,

$$L_{z,z+\delta z} : [0,1] \to B(0,R)\,, \qquad L_{z,z+\delta z}(t) = z + t\delta z\;\;.$$

Weil $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, haben wir

$$\int_{L_{0,z+\delta z}} f(z)dz = \int_{L_{0,z}} f(z)dz + \int_{L_{z,z+\delta z}} f(z)dz\,.$$

Dann sehen wir

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z} &= \frac{1}{\delta z}\int_{L_{z,z+\delta}} f(z)dz \\ &= \frac{1}{\delta z}\int_0^1 f(z+t\delta z)\,\delta z\,dt \\ &= \int_0^1 f(z+t\delta z)dt\,.\end{aligned}$$

Weil f stetig ist, haben wir den Grenzwert

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z} = f(z)\ .$$

Deshalb ist F komplex differenzierbar mit Ableitung f.
F und f sind beide analytisch auf $B(0,R)$.