Funktionentheorie

R. Pandharipande

HS 2015, ETH Zürich

§ Algebra von Potenzreihen

• Sei f eine analytische Funktion in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$. Es gibt eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und einem positiven Konvergenzradius,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \, ,$$

die f darstellt (Satz 11).

• Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und einem positiven Konvergenzradius. Die Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ist analytisch innerhalb des Konvergenzradius (Satz 4).

• Seien f and g zwei analytische Funktionen, deren Potenzreihenentwicklungen im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ gleich sind. Dann haben wir

$$f = g$$

in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$.

• Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ and $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, die die gleiche Funktion in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ darstellen. Dann haben wir

$$\forall k\,, \quad a_k = b_k$$

von Satz 4.

$\Rightarrow$ Wenn wir analytische Funktionen in der Nähe von $0 \in \mathbb{C}$ studieren, können wir die Potenzreihen benutzen. Wir verlieren nichts.

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ and $g(z) = \sum_{k=0} b_k z^k$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien.

- Addition/Subtraktion ist einfach:

$$(f \pm g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) z^k \ .$$

- Multiplikation ist interessanter:

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ , \qquad c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r} \ .$$

Übung: *Beweisen Sie die Regel für Multiplikation mit der Regel von Leibnitz.*

- Sei $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $\quad S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$,

$$f = 1 + S \ .$$

Dann können wir die Potenzreihe für $\frac{1}{f}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(z)} &= 1 - S + S^2 - S^3 + S^4 - S^5 + \dots \\
&= 1 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)^3 + \dots \\
&= 1 - a_1 z + (a_1^2 - a_2) z^2 + (-a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3) z^3 + \dots \ .
\end{aligned}$$

Übung: *Beweisen Sie die Formel für* $\frac{1}{f(z)}$.

Beispiel: Sei $f(z) = 1 + z + 2z^2$. Dann haben wir

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z - z^2 + 3z^3 - z^4 - 5z^5 + 7z^6 + 3z^7 - 17z^8 + \dots .$$

- Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_0 \neq 0$. Dann

$$f(z) = a_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k \right)$$

und haben wir

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0} \left(1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} z^k \right)^2 - \dots \right) .$$

- Wenn b_0 nicht null ist, können wir dividieren:

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{g(z)} &= f(z)\cdot\frac{1}{g(z)}\\ &= \frac{a_0}{b_0}-\frac{a_0b_1-a_1b_0}{b_0^2}z-\frac{a_0b_0b_2-a_0b_1^2+a_1b_0b_1-a_2b_0^2}{b_0^3}z^2+\dots\ .\end{aligned}$$

Wenn $b_0=0$ ist, ist $\frac{f(z)}{g(z)}$ nicht immer eine analytische Funktion in einer Umgebung von $0\in\mathbb{C}$.

- Sei b_n der erste Koefficient, der nicht null ist. Dann ist

$$h(z) = \frac{g(z)}{z^n} = b_n + b_{n+1}z + b_{n+2}z^2 + \dots$$

eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius.

Für $z \neq 0$ klein haben wir

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{g(z)} &= f(z) \cdot \frac{1}{h(z)} \cdot \frac{1}{z^n} \\ &= \frac{a_0}{b_n} z^{-n} - \frac{a_0 b_{n+1} - a_1 b_n}{b_n^2} z^{-n+1} + \dots , \end{aligned}$$

eine Laurentreihe.

Beispiel: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=3}^{\infty} z^k$.
Dann haben wir

$$h(z) = \frac{g(z)}{z^3} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)}{g(z)} &= f(z) \cdot \frac{1}{h(z)} \cdot \frac{1}{z^3} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k \right) \cdot (1 - z) \cdot \frac{1}{z^3} \\
&= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 4 + 8z + 16z^2 + \dots \quad .
\end{aligned}$$

§ Laurentreihen

Eine Laurentreihe $f(z)$ im Punkt $0 \in \mathbb{C}$ wird von zwei Potenzreihen gemacht:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ .$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ hat variable z^{-1}, die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hat variable z.

Seien R_- , R_+ die zwei Konvergenzradien:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k} \text{ ist Konvergent für } |z^{-1}| < R_- \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ ist Konvergent für } |z| < R_+ \ .$$

Seien $0 \in \mathbb{C}$ und $0 < R_1 < R_2 < \infty$ reele Zahlen.

Sei $B(0, R_1, R_2)$ der Kreisring,

$$B(0, R_1, R_2) = \{\ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\ \}.$$

Wenn wir $\frac{1}{R_1} < R_- $ und $R_2 < R_+$ haben, dann ist

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

konvergent auf $B(0, R_1, R_2)$ weil

$$|z^{-1}| < \frac{1}{R_1} < R_- \quad \text{und} \quad |z| < R_2 < R_+ .$$

$f(z)$ ist eine analytische Funktion auf $B(0, R_1, R_2)$.

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 < R_1 < R_2 < \infty$ reele Zahlen.

Sei $B(z_0, R_1, R_2)$ der Kreisring,

$$B(z_0, R_1, R_2) = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2 \ \}$$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit

$$\overline{B}(z_0, R_1, R_2) \subset U\,.$$

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.

Dann hat f eine Laurentreihenentwicklung auf $B(z_0, R_1, R_2)$,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $\frac{1}{R_1} < R_-$ und $R_2 < R_+$.

Satz 21 (Laurentreihenentwicklungssatz).
Es gibt genau eine konvergent Laurentreihe auf $B(z_0, R_1, R_2)$, die die Funktion f darstellt.

Beweis für Satz 11 (Laurentreihenentwicklungssatz):
Sei $z_0 = 0$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit),
und sei $\overline{B}(0, R_1, R_2) \subset U$.
Die Cauchyformel gibt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\, d\zeta \end{aligned}$$

für $z \in B(0, R_1, R_2)$.

Für festes $|z| \in B(0, R_1, R_2)$ haben wir absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k : \partial B(0, R_1) \to \mathbb{C}\,.$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k : \partial B(0, R_2) \to \mathbb{C}\,.$$

Deshalb können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1}\frac{f(\zeta)}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\zeta|=R_1}\frac{f(\zeta)}{z}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\zeta|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}\int_{|\zeta|=R_1}f(\zeta)\zeta^{k-1}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\int_{|\zeta|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta\,.
\end{aligned}$$

Die Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k\,, \qquad \begin{cases} k<0\,, & a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta \\ k\geq 0\,, & a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta \end{cases}$$

ist Konvergent auf $B(0, R_1, R_2)$ und stellt f dar.

Wenn wir eine konvergente Laurentreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{-k}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

haben, die f auf $B(0, R_1, R_2)$ darstellt, dann Satz 6 uns

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

für alle $R \in [R_1, R_2]$ gibt. Deshalb haben wir

$$a_k = b_k$$

für alle k. $\square$

§ Cauchysche Abschätzung (nochmals)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und sei

$$f : U \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion. Für

$$\overline{B}(z_0, R_1, R_2) \subset U$$

haben wir bewiesen:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für $z \in B(z_0, R_1, R_2)$ und $R \in [R_1, R_2]$.

Satz 22 (Cauchysche Abschätzung).

Sei $R \in [R_1, R_2]$ *und sei* $|f(z)| < M$ *für alle* $z \in \partial B(z_0, R)$.

Dann gilt

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}\,.$$

Beweis für Satz 22:

Standardabschätzung $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \\ &= \frac{M}{R^k}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

§ Isolierte Singularitäten

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$, und sei

$$f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion.

Von Satz 22 haben wir eine konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für $0 < |z - z_0| < \epsilon$ (und $0 < \delta < \epsilon$ klein).

Wir sagen, dass z_0 eine isolierte Singularität von f ist.

Es gibt drei Möglichkeiten für die isolierte Singularität z_0:

(i) $a_k = 0$ *für alle* $k < 0$.

Dann definieren wir $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ als

$$\tilde{f}|_{U \setminus \{z_0\}} = f\,, \quad \tilde{f}(z_0) = a_0\,.$$

Weil die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

konvergent ist und $\tilde{f}$ auf $B(z_0, \epsilon)$ darstellt, ist $\tilde{f}$ analytisch auf $B(z_0, \epsilon)$. $\tilde{f}$ ist analytisch auf $U \setminus \{z_0\}$, weil f ist.

Deshalb ist

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$$

analytisch.

In diesem Fall ist z_0 eigentlich keine Singularität von f.

Wir sagen, dass z_0 eine hebbare Singularität von f ist.

(ii) $\exists n > 0$ *mit* $a_{-n} \neq 0$ *und* $\ell < -n \Rightarrow a_\ell = 0$.

Wir sagen, dass z_0 ein Pol von f ist und f auf U meromorph ist. Die Ordnung des Pols ist n.

Für $0 < |z - z_0| < \epsilon$ können wir schreiben

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^n}\,, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-n+k} z^k$$

mit g analytisch auf $B(z_0, \epsilon)$.

(iii) $a_n \neq 0$ *unendlich oft für* $n < 0$.

Wir sagen, dass z_0 eine wesentliche Singularität von f ist.

Die Funktion $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ hat eine wesentliche Singularität im Punkt $0 \in \mathbb{C}$,

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} .$$

Das Residuum von f in der isolierten Singularität z_0 ist

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} \ .$$

- Für eine hebbare Singularität ist das Residuum null.
- Für alle isolierte Singularitäten z_0 haben wir

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \delta} f(\zeta) d\zeta$$

  für δ klein.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$, und sei

$$f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion.

Satz 23 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).

Wenn es gibt ϵ und M sodass

$$0 < |z - z_0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < M\,,$$

dann ist die isolierte Singularität z_0 hebbare.

Beweis für Satz 23 (Riemannscher Hebbarkeitssatz):

Sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ die Laurentreihe im Punkt z_0.

Von Satz 22 haben wir

$$|a_k| \leq \frac{M}{R^k}$$

für alle $0 < R < \epsilon$. Für $k < 0$, ist der Grenzwert

$$\lim_{R\to 0} \frac{M}{R^k} \;=\; \lim_{R\to 0} M \cdot R^{|k|} \;=\; 0 \;.$$

Deshalb ist $a_k = 0$ für alle $k < 0$. $\square$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $z_0 \in U$, und sei

$$f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

eine analytische Funktion.

Satz 24 (Casorati-Weierstrass).

Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann für jede offene Teilmenge

$$W_R \;=\; B(z_0, R) \cap (U \setminus \{z_0\}) \;\subset\; U \setminus \{z_0\} \;,$$

ist $f(W_R)$ offen und dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis für Satz 24 (Casorati-Weierstrass):

Von Satz 17 (Gebietstreue) ist $f(W_R)$ offen.

Wir nehemen an, dass $f(W_R)$ nicht dicht ist für ein $R > 0$.

Dann gibt es einen Punkt $q \in \mathbb{C}$, sodass

$$q \notin \overline{f(W_R)} .$$

Das heisst:

$$\exists \delta , \qquad z \in W_R \ \Rightarrow \ |f(z) - q| > \delta .$$

Wir definieren $g : W_R \to \mathbb{C}$ als

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - q} .$$

Wir haben

$$z \in W_R \ \Rightarrow \ |g(z)| < \frac{1}{\delta} .$$

Dann ist die Sigularität z_0 von g hebbar (von Satz 23).

Für $z \in W_R$ haben wir

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + q \; .$$

Deshalb hat f nur einen Pol im Punkt z_0.

Wir haben einen Widerspruch. $\square$

§ Der Residuenkalkül

Wir berechen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

mit dem Residuenkalkül.

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ hat einen Pol in den Punkten

$$\exp\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \exp\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \exp\left(\frac{5\pi}{4}\right), \quad \exp\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad \in \mathbb{C}.$$

Nur $p = \exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $q = \exp\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ haben $\mathrm{Im} > 0$.

Wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} \;=\; 2\pi i\,(\mathrm{Res}_p(f) + \mathrm{Res}_q(f))\ .$$

- Im Punkt $p \Rightarrow z^4+1 = 4p^3(z-p) + 6p^2(z-p)^2 + \dots\,,$

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4p^3(z-p)} + \dots\,, \qquad \mathrm{Res}_p(f) = \frac{1}{4p^3}\,.$$

- Im Punkt $q \Rightarrow z^4+1 = 4q^3(z-q) + 6q^2(z-q)^2 + \dots\,,$

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4q^3(z-q)} + \dots\,, \qquad \mathrm{Res}_q(f) = \frac{1}{4q^3}\,.$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} &= 2\pi i \left(\frac{1}{4p^3} + \frac{1}{4q^3} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \, .
\end{aligned}
$$

Wir berechen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

mit dem Residuenkalkül.

Die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+1}$ hat einen Pol in den Punkten

$$i, -i \in \mathbb{C}$$

Nur i hat $\mathrm{Im} > 0$.

- Im Punkt $i \Rightarrow z^2 + 1 = 2i(z-i) + (z-i)^2$,

$$\frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{-1}}{2i(z-i)} + \dots \ , \quad \mathrm{Res}_i(f) = \frac{e^{-1}}{2i} .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx = \mathrm{Re}\Big(\, 2\pi i\,\mathrm{Res}_i(f)\Big)$$

$$= \frac{\pi}{e}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+1}dx = \mathrm{Re}\Big(\, 2\pi i\,\mathrm{Res}_i\left(\frac{e^{nz}}{z^2+1}\right)\Big)$$

$$= \frac{\pi}{e^n}\,. \quad \square$$

§ Das Gausssche Integral

Können wir das Gausssche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

mit dem Residuenkalkül berechnen?

Ja, aber es ist nicht so direkt (wir müssen ein $\sqrt{\pi}$ nicht ein π finden). Der Beweis ist von H. Kneser.

Sei $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{C}$. Wir haben

$$a^2 = (1+i)^2 \frac{\pi}{2} = i\pi \ .$$

Sei $f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}$. Auf welcher offener Menge

$$U \subset \mathbb{C}$$

ist f definiert?

$$\begin{aligned}
1 + e^{-2az} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-2az} = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad -2az = \pi i + 2n\pi i\,, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad -2az = a^2 + 2na^2\,, \quad n \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad z = -\frac{a}{2} - na\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Deshalb ist f eine analytische Funktion auf

$$U = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{2} + na\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

Wie sieht f in einer Umgebung von $z = \frac{a}{2}$ aus?

Die beide Funktionen e^{-z^2} und $1 + e^{-2az}$ sind analytisch:

$$\begin{aligned} e^{-z^2} &= e^{-\frac{a^2}{4}} - ae^{-\frac{a^2}{4}}(z - \frac{a}{2}) + \dots , \\ 1 + e^{-2az} &= 2a(z - \frac{a}{2}) + \dots . \end{aligned}$$

In einer Umgebung von $z = \frac{a}{2}$ können wir schreiben

$$f(z) = \frac{\frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{2a}}{z - \frac{a}{2}} + g(z)$$

mit $g(z)$ analytisch im Punkt $z = \frac{a}{2}$.

Wir haben

$$\frac{\frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{2a}}{z-\frac{a}{2}} = \frac{\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2a}}{z-\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2i\sqrt{\pi}}}{z-\frac{a}{2}}$$

und deshalb ist

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2i\sqrt{\pi}}}{z-\frac{a}{2}} + g(z)$$

mit $g(z)$ analytisch im Punkt $z = \frac{a}{2}$.

Das Kurvenintegral von f entlang $\partial B(\frac{a}{2}, \epsilon)$ ist

$$\int_{\partial B(\frac{a}{2},\epsilon)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}\,.$$

Sei $r \in \mathbb{R}$ positiv. Sei $Q_r \subset \mathbb{C}$ das Reckteck mit Ecken

$$-r\,,\ r\,,\ r + i \cdot \mathrm{Im}(a)\,,\ -r + i \cdot \mathrm{Im}(a)\ .$$

Jetzt nehmen wir das Kurvenintegral entlang ∂Q_r ,

$$\int_{\partial Q_r} f(z)dz\ .$$

Weil $\left\{\frac{a}{2} + na\right\}_{n \in \mathbb{Z}} \cap Q_r = \left\{\frac{a}{2}\right\}$,

$$\int_{\partial Q_r} f(z)dz \ = \ \int_{\partial B(\frac{a}{2},\epsilon)} f(z)dz = \sqrt{\pi}\,.$$

Die vier Seite von ∂Q_r sind S_r, E_r, N_r, W_r.

Einfach zu sehen sind

$$\lim_{r\to\infty}\int_{E_r} f(z)dz = \lim_{r\to\infty}\int_{W_r} f(z)dz = 0\,.$$

Für die Seite S_r und N_r haben wir

$$\begin{aligned} f(z) - f(z+a) &= \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}} - \frac{e^{-z^2-2az-a^2}}{1+e^{-2az-2a^2}} \\ &= e^{-z^2}\,. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} f(z)dz + \int_{N_r} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\,.$$

Zusammen haben wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \int_{\partial Q_r} f(z)dz \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} f(z)dz + \int_{N_r} f(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\,. \qquad \square
\end{aligned}$$