Analysis I (HS 2016): KOMPAKTE METRISCHE RÄUME UND DER SATZ VON ARZELÀ–ASCOLI

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

12. Dezember 2016

1 Kompakte metrische Räume

Definition 1 (Überdeckungen). *Sei X eine Menge. Eine* **Überdeckung** *von X ist eine, durch eine Menge I indizierte, Ansammlung $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subset X$ so dass die Vereinigung dieser Teilmengen der gesamte Raum X ist:*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X.$$

Man kann eine Überdeckung auch als eine Menge $\mathscr{U} \subset 2^X$ von Teilmengen von X beschreiben mit der Eigenschaft, dass deren Vereinigung ganz X ist:

$$\bigcup_{U\in\mathscr{U}} U = X.$$

Die Beziehung zwischen diesen beiden Formulierungen desselben Phänomens ist, dass eine Teilmenge $U \subset X$ genau dann ein Element von $\mathscr{U}$ ist wenn es ein $i \in I$ gibt so dass $U_i = U$. Wenn die indizierten Mengen U_i paarweise verschieden sind (d.h. $U_i \neq U_j$ für $i \neq j$), so ist die Abbildung $I \to \mathscr{U} : i \mapsto U_i$ bijektiv.

Eine Überdeckung $\mathscr{U}$ (bzw $\{U_i\}_{i\in I}$) heisst **endlich**, *wenn die Menge $\mathscr{U}$ (bzw die Indexmenge I) endlich ist.*

Eine **Teilüberdeckung** *von* $\mathscr{U}$ *(bzw* $\{U_i\}_{i\in I}$*) ist eine Teilmenge von* $\mathscr{U}$ *die immer noch eine Überdeckung ist (bzw eine Teilmenge* $J \subset I$ *so dass die Ansammlung* $\{U_i\}_{i\in J}$ *immer noch eine Überdeckung ist).*

Ist (X, d) *ein metrischer Raum, so ist eine* **offene Überdeckung** *von* X *eine Überdeckung, die nur aus offenen Mengen besteht; im Fall* $\{U_i\}_{i\in I}$ *heisst das, dass die Menge* U_i *für jedes* $i \in I$ *offen in* (X, d) *ist.*

Definition 2. *Ein metrischer Raum* (X, d) *heisst* **total beschränkt**, *wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *endlich viele Elemente* $\xi_1, \ldots, \xi_m \in X$ *gibt so dass*

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(\xi_i) = X.$$

Hier bezeichnen wir mit $B_\varepsilon(\xi) := \{x \in X \mid d(x, \xi) < \varepsilon\}$ *den offenen Ball in* (X, d) *vom Radius* ε *mit Mittelpunkt* ξ*. (Insbesodere ist die leere Menge total beschränkt.)*

Satz 3. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Jede Folge in* X *besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(ii) *Jede offene Überdeckung von* X *besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(iii) (X, d) *ist vollständig und total beschränkt.*

Beweis. Die leere Menge $X = \emptyset$ erfüllt alle drei Bedingungen. Wir nehmen daher an, X sei nichtleer. Damit keine Verwirrung entsteht, bezeichnen wir in diesem Beweis die Menge aller offenen Teilmengen von X mit $\mathscr{T}(X, d) \subset 2^X$. ($\mathscr{T}$ wie in "Topologie".)

"(i) $\Longrightarrow$ (ii)". Wir nehmen an, dass jede Folge in (X, d) eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}(X, d)$ eine offene Überdeckung von X. Wir beweisen in zwei Schritten, dass $\mathscr{U}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Schritt 1. *Es gibt ein* $\varepsilon > 0$ *so dass für jedes* $x \in X$ *ein* $U \in \mathscr{U}$ *existiert so dass* $B_\varepsilon(x) \subset U$*.*

Als logische Formel kann man diese Aussage wie folgt schreiben:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists U \in \mathscr{U})(B_\varepsilon(x) \subset U).$$

Wir beweisen dies indirekt und nehmen an das Gegenteil sei der Fall, das heisst

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(\forall U \in \mathscr{U})(B_\varepsilon(x) \not\subset U).$$

Wähle $\varepsilon : 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Element $x_n \in X$ so dass folgendes gilt:

$$B_{1/n}(x_n) \not\subset U \qquad \forall U \in \mathscr{U}.$$

Da X Folgen-kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Sei $x_0 := \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$ und wähle $U \in \mathscr{U}$ so dass $x_0 \in U$. Da U offen ist, gibt es in $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. Da x_{n_i} gegen x_0 konvergiert, gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$i \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_{n_i}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle $i > N$ so dass $1/n_i < /eps/2$. Dann gilt

$$B_{1/n_i}(x_{n_i}) \subset B_{\varepsilon/2}(x_{n_i}) \subset B_\varepsilon(x_0) \subset U.$$

Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion unserer Folge (x_n). Damit haben wir Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *$\mathscr{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Wir nehmen an $\mathscr{U}$ habe keine endliche Teilüberdeckung. Sei $\varepsilon > 0$ eine Zahl für die die Behauptung von Schritt 1 gilt. Wir werden induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{U}$ konstruieren so dass $B_\varepsilon(x_1) \subset U_1$ und

$$B_\varepsilon(x_n) \subset U_n, \qquad x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$$

für jede natürlich Zahl $n \geq 2$. Zunächst wählen wir irgendein Element $x_1 \in X$. Dann gibt es nach Schritt 1 ein Element $U_1 \in \mathscr{U}$ so dass $B_\varepsilon(x_1) \subset U_1$. Nehmen wir nun an wir hätten $x_1, \ldots, x_k$ und $U_1, \ldots, U_k$ so konstruiert, dass unsere Bedingungen für $n = 1, \ldots, k$ erfüllt sind. da $\mathscr{U}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, muss es ein Element $x_{k+1} \in X$ geben das in keiner der Teilmengen $U_1, \ldots, U_k$ enthalten ist. Nach Schritt 1 gibt es nun wieder ein $U_{k+1} \in \mathscr{U}$ $B_\varepsilon(x_{k+1}) \subset U_{k+1}$. Damit ist das Induktionsargument beendet und wir haben die gewünschten Folgen konstruiert.

Nach Konstruktion unserer Folge gilt $x_n \notin U_m$ für jede natürliche Zahl $n > m$. Da $B_\varepsilon(x_m) \subset U_m$ ist, folgt daraus, dass $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$ und somit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n > m$. Vertauschen wir n und m, so erhalten wir die Ungleichung $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $n \neq m$. Damit hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zu (i). Damit ist gezeigt, dass (ii) aus (i) folgt.

“(ii) $\Longrightarrow$ (iii)”. Wir nehmen jetzt an, dass jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dass X total beschränkt ist, folgt nun durch die Wahl der Überdeckung

$$\mathscr{U} := \{B_\varepsilon(x) \,|\, x \in X\}\,.$$

Die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung besagt nun, dass es Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_N \in X$ gibt so dass

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(\xi_i).$$

Damit ist X total beschränkt.

Wir zeigen nun, dass (X, d) vollständig ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Nehmen wir an, diese Folge konvergiere nicht. Dann konvergiert nach einem Resultat aus der Analysis I (Kapitel IV, Lemma 8) auch keine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch keine Häufungspunkte (siehe Analysis I, Kapitel IV, Teil (iii) von Lemma 6). Das heisst folgendes: Für jedes $\xi \in X$ gibt es ein $\varepsilon(\xi) > 0$ so dass der Ball $B_{\varepsilon(\xi)}(\xi)$ nur endlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Damit folgt, dass die offene Überdeckung

$$\mathscr{U} := \left\{B_{\varepsilon(\xi)}(\xi) \,|\, \xi \in X\right\}$$

von X keine endliche Teilüberdeckung enthalten kann. Dies steht im Widerspruch zu (ii), und damit ist gezeigt, dass (iii) aus (ii) folgt.

“(iii) $\Longrightarrow$ (i)”. Wir nehmen nun an, dass (X, d) vollständig und total beschränkt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir müssen eine konvergente Teilfolge von (x_n) finden. Dazu werden wir induktiv eine Folge unendlicher Teilmengen $T_k \subset \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, konstruieren so dass

$$\mathbb{N} \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$$

und

$$n, m \in T_k \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_n, x_m) \leq 2^{-k}.$$

Da (X, d) total beschränkt ist lässt sich X durch endlich viele Bälle $B_{1/2}(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$, überdecken. Einer dieser Bälle muss unendlich viele Glieder unserer Folge enthalten. Sei dies der Ball $B_{1/2}(\xi_i)$ und definiere

$$T_0 := \left\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in B_{1/2}(\xi_i)\right\}.$$

Nach Konstruktion ist dies eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und es gilt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \xi_i) + d(\xi_i, x_m) < 1$$

für alle $n, m \in T_0$. Sei nun $k \geq 1$. Wir nehmen an, die Teilmengen

$$T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_{k-1}$$

seien bereits konstruiert. Da (X, d) total beschränkt ist können wir X durch endlich viele Bälle $B_{2^{-k-1}}(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$, überdecken. Einer dieser Bälle muss unendlich viele der Folgenglieder x_n mit $n \in T_{k-1}$ enthalten. Sei dies $B_{2^{-k-1}}(\xi_i)$ und definiere

$$T_k := \left\{ n \in T_{k-1} \,|\, x_n \in B_{2^{-k-1}(\xi_i)} \right\}.$$

Dann ist T_k eine unendliche Teilmenge von T_{k-1} und es gilt

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \xi_i) + d(\xi_i, x_m) < 2^{-k}$$

für alle $n, m \in T_k$. Damit sind die Mengen T_k für alle $k \in \mathbb{N}$ konstruiert.

Da jede der Teilmengen T_k unendlich ist, können wir induktiv eine Folge $x_k \in T_k$ wählen so dass $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_{n_\ell} \in T_\ell \subset T_k$ für $\ell \geq k$ und damit

$$\ell \geq k \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_k, x_\ell) \leq 2^{-k}$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und, da (X, d) vollständig ist, konvergiert sie. Wir haben also gezeigt, dass jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Also folgt (i) aus (iii). $\square$

2 Der Satz von Arzelà–Ascoli

Satz 3 zeigt, dass die kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) nur durch die Topologie des Raumes (also die Gesamtheit der offenen Mengen) bestimmt werden. In allgemeinen topologischen Räumen wird Bedingung (ii) in Satz 3 zur Definition des Kompaktheitsbegriffes benutzt.

Nach dem Satz von Heine–Borel ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardmetrik, also der Euklidischen) genau dann kompakt wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere ist also der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ kompakt. Dies gilt auch für jeden beliebigen endlichdimensionalen Vektorraum, oder äquivalenterweise für jede beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Im Gegenzug zeigt die folgende Übung, dass diese Eigenschaft genau die endlichdimensionalen normierten Vektorräume charakterisiert.

Übung 4. Sei V ein normierter reller Vektorraum mit kompaktem Einheitsball $B := \{x \in V \mid \|x\| \le 1\}$. Dann ist V endlichdimensional.

Hinweise: 1. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale lineare Unterraum $W \subset V$ abgeschlossen ist.
2. Ist $W \subset V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $v \in V \setminus W$, zeigen Sie, dass

$$d(v, W) := \inf_{w \in W} \|v - w\| > 0.$$

3. Ist $W \subsetneq V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $d(v, W) \ge 1/2$. (Sei $v_0 \in V \setminus W$ und wähle $w_0 \in W$ so dass $\|v_0 - w_0\| \le 2d(v_0, W)$; definiere $v := \|v_0 - w_0\|^{-1} (v_0 - w_0)$.
4. Ist V unendlichdimensional so gibt es eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit $\|v_n\| = 1$ und $\|v_n - v_m\| \ge 1/2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \ne m$. Eine solche Folge hat keine konvergente Teilfolge.

Übung 4 gibt uns ein wichtiges Kriterium für die Endlichdimensionalität eines normierten Vektorraumes. Sie zeigt auch, dass das Heine-Borel-Prinzip in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen nicht gilt: es gibt dort abgeschlossenen und beschränkte Teilmengen die nicht kompakt sind. Damit stellt sich die Frage, welche Teilmengen eines solchen unendlichdimensionalen Raumes denn kompakt sind. Eine Antwort auf diese Frage ist in vielen Anwendungen von grundlegender Bedeutung. Ein besonders wichtiges Kompaktheitskriterium für Teilmengen des Raumes der stetigen Funktionen gibt uns der Satz von Arzelà-Ascoli.

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathscr{C}(X)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass dieser Raum mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

zu einem Banachraum, das heisst zu einem vollständigen normierten Vektorraum, wird (siehe [2, Satz 7.1]). Wir haben auch gezeigt, dass jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten metrischen Raum (X, d) **gleichmässig stetig** ist, das heisst, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ erfüllen. Wir nennen eine Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ **gleichgradig stetig** wenn die Zahl $\delta > 0$ in dieser Definition unabhängig von der Funktion $f \in \mathscr{F}$ gewählt werden kann.

Definition 5. *Eine Teilmenge* $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ *heisst* **gleichgradig stetig**, *wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle* $f \in \mathscr{C}(X)$ *und alle* $x, y \in X$ *gilt:*

$$f \in \mathscr{F}, \quad d(x,y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Übung 6. Jede endliche Teilmenge von $\mathscr{C}(X)$ ist gleichgradig stetig. Seien c und μ zwei positive reelle Zahlen. Dann ist die Teilmenge

$$\mathscr{F} := \left\{ f \in \mathscr{C}(X) \,\middle|\, \|f\| \le c, \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\mu} \le c \right\}$$

abgeschlossen, beschränkt, und gleichgradig stetig. Finden Sie eine Folge in $\mathscr{C}([0,1])$ die beschränkt aber nicht gleichgradig stetig ist.

Satz 7 (Arzelà-Ascoli). *Sei* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge* $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ *des Raumes der stetigen reellwertigen Funktionen auf* X *ist genau dann kompakt bezüglich der Supremumsnorm wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

(i) $\mathscr{F}$ *ist abgeschlossen.*

(ii) $\mathscr{F}$ *ist beschränkt.*

(iii) $\mathscr{F}$ *ist gleichgradig stetig.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\mathscr{F}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathscr{C}(X)$ ist. Dann ist $\mathscr{F}$ abgeschlossen, nach einem Resultat in Analysis I (Kapitel V, Satz 18). Ausserdem ist $\mathscr{F}$ beschränkt, da eine Folge $f_n \in \mathscr{F}$ mit $\|f_n\| \to \infty$ keine konvergente Teilfolge hätte. Es bleibt also zu zeigen, dass die Menge $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Menge $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ nach Satz 3 total beschränkt ist, gibt es endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{F}$ so dass

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon/3}(f_i; \mathscr{C}(X)).$$

Da (X, d) kompakt ist, ist jede der Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig (siehe Analysis I, Kapitel V, Satz 22). Daher gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\delta_i > 0$ so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x,y) < \delta_i \qquad \Longrightarrow \qquad |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3.$$

Wähle

$$\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} > 0.$$

Sei $f \in \mathscr{F}$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \dots, m\}$ so dass $\|f - f_i\| < \varepsilon/3$. Daher gilt für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta \leq \delta_i$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |(f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Also ist die Menge $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig.

Umgekehrt nehmen wir nun an, die Menge $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X)$ sei abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig. Wir werden in vier Schritten beweisen, dass $\mathscr{F}$ kompakt ist.

Schritt 1. *Es gibt eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X mit der folgenden Eigenschaft. Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $m = m(\delta) \in \mathbb{N}$ so dass*

$$X = \bigcup_{k=1}^{m(\delta)} B_\delta(x_k).$$

Wir konstruieren die Folge induktiv. Zunächst wissen wir, nach Satz 3, dass der metrische Raum (X, d) total beschränkt ist. Also existieren, für $\delta = 1$, endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_{m_1} \in X$ so dass

$$X = \bigcup_{k=1}^{m_1} B_1(x_k).$$

Ebenso gibt es für $\delta = 1/2$ endlich viele Punkte $x_{m_1+1}, \dots, x_{m_2} \in X$ so dass

$$X = \bigcup_{k=m_1+1}^{m_2} B_{1/2}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m_2} B_{1/2}(x_k).$$

Wenn $x_1, \dots, x_{m_{n-1}}$ konstruiert sind, wählen wir $x_{m_{n-1}+1}, \dots, x_{m_n} \in X$ so dass

$$X = \bigcup_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} B_{1/n}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m_n} B_{1/n}(x_k).$$

Damit gilt die Behauptung von Schritt 1 mit $m(\delta) = m_n$, wobei n so gewählt wird dass $1/n < \delta$.

Schritt 2. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{F}$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ so dass der Grenzwert*

$$y_k := \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x_k)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert.

Dies ist ein typisches Diagonalfolgen-Argument. Zunächst sei $k = 1$, dann ist die Folge $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen beschränkt und hat daher, nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass, eine konvergente Teilfolge. Mit anderen Worten, es existiert eine strikt monoton wachsende Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass der Limes

$$y_1 := \lim_{i\to\infty} f_{g_1(i)}(x_1)$$

existiert. Nun ist die Folge $(f_{g_1(i)}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt und besitzt somit auch eine konvergente Teilfolge. Also gibt es eine strikt monoton wachsende Funktion $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass der Limes

$$y_2 := \lim_{i\to\infty} f_{g_1\circ g_2(i)}(x_2)$$

existiert. Mit vollständiger Induktion finden wir nun eine Folge strikt monoton wachsender Funktionen $g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass der Limes

$$y_k := \lim_{i\to\infty} f_{g_1\circ\cdots\circ g_k(i)}(x_k)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert. Nun sei

$$n_i := g_1 \circ \cdots \circ g_i(i)$$

für $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_{n_i(i)}(x_k))_{i\geq k}$ eine Teilfolge von $(f_{g_1\circ\cdots\circ g_k(i)}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und konvergiert somit gegen y_k. Da dies für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *$(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathscr{C}(X)$.*

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $f \in \mathscr{C}(X)$ und alle $x, y \in X$ folgendes gilt:

$$f \in \mathscr{F},\ \ d_X(x,y) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3. \tag{1}$$

Nach Schritt 1 gibt es eine natürliche Zahl $m = m(\delta) \in \mathbb{N}$ so dass

$$X = \bigcup_{k=1}^{m} B_\delta(x_k). \tag{2}$$

Nach Schritt 2 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$k \leq m, \quad i, j \geq N \qquad \Longrightarrow \qquad \left| f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k) \right| < \varepsilon/3. \tag{3}$$

Wir behaupten, dass mit dieser Wahl von N die Ungleichung $\left\| f_{n_i} - f_{n_j} \right\| \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq N$ gilt. Sei also $x \in X$ und wähle eine Zahl $k \in \{1, \dots, m\}$ so dass $d(x, x_k) < \delta$ ist (siehe (2)). Dann folgt aus (1) die Ungleichung

$$|f_{n_i}(x_k) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon/3 \tag{4}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus (3) und (4) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x) \right| &\leq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_k)| + \left| f_{n_i}(x_k) - f_{n_j}(x_k) \right| \\ &\quad + \left| f_{n_j}(x_k) - f_{n_j}(x) \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $i, j \geq N$. Damit haben wir gezeigt, dass die in Schritt 2 konstruierte Teilfolge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{C}(X)$ ist.

Schritt 4. *Die Folge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathscr{F}$.*

Da $\mathscr{C}(X)$ ein Banachraum ist, konvergiert die Folge $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ in Schritt 3 gegen ein $f \in \mathscr{C}(X)$. Da $\mathscr{F}$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert zu $\mathscr{F}$. Also haben wir gezeigt, dass jede Folge in $\mathscr{F}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathscr{F}$ besitzt. Also ist $\mathscr{F}$ kompakt. Damit ist Satz 7 bewiesen. □

Der Satz von Arzelà-Ascoli und sein Beweis lassen sich Wort für Wort auf den Raum $\mathscr{C}(X, V)$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten in einem endlichdimensionalen Banachraum V übertragen. Im unendlichdimensionalen Fall bedarf es der Zusatzbedingung, dass die Menge $\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ für jedes $x \in X$ eine kompakte Teilmenge von V ist (siehe [1, Cor 1.1.12]).

Übung 8. Finden Sie eine Teilmenge des Raumes $\mathscr{BC}(\mathbb{R})$ (der beschränkten stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), welche zwar abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig, aber nicht kompakt ist.

Literatur

[1] T. Bühler, D.A. Salamon, *Functional Analysis*. ETHZ, 2016.
`https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana.pdf`

[2] D.A. Salamon, *Analysis I: Das Riemannsche Integral*, ETHZ, HS 2016.
`https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana1-int.pdf`