Analysis I (HS 2016):
DAS RIEMANNSCHE INTEGRAL

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

12. Dezember 2016

Zusammenfassung

Dieses Manuskript dient der Einführung in das Riemannsche Integral für Funktionen einer reellen Variablen. Es richtet sich an Studierende des ersten Semesters an der ETH Zürich.

Inhaltsverzeichnis

1 Der Integralbegriff

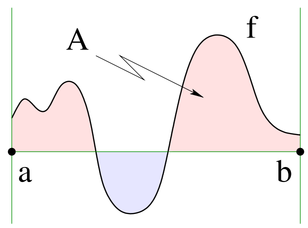

Abbildung 1: Das Integral als Flächeninhalt.

Seien zwei reelle Zahlen $a < b$ und eine reellwertige Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

gegeben. Unser Ziel ist es, den *Flächeninhalt* A des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graphen von f mathematisch genau zu definieren. (Siehe Abbildung 1.) Dies ist sehr einfach, wenn die Funktion f überall den konstanten Wert

$$f(x) = c$$

hat für eine feste reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist die *Fläche unter dem Graphen von* f ein Rechteck und wir definieren dessen Flächeninhalt einfach als *Breite mal Höhe*, also als das Produkt

$$A := (b - a)c.$$

Man beachte, dass die Zahl c auch negativ sein darf und dann ist auch der *Flächeninhalt* A negativ. Eine fast ebenso einfache Formel ergibt sich für eine Funktion, die sich aus konstanten Funktionen auf endlich vielen Teilintervallen von $[a, b]$ zusammensetzen lässt. Für allgemeine beschränkte Funktionen kann man nun wie folgt vorgehen. Wir wählen eine Aufteilung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle. Aus jedem dieser Teilintervalle ersetzen wir f durch eine Funktion die auf diesem Teilintervall konstant ist und in einem noch zu klärenden Sinn nicht allzu stark von f abweicht. Dann bilden wir die Summe der Flächeninhalte der auf diese Weise erhaltenen Rechtecke. Diese Summe ist als Näherungswert für das gewünschte Integral zu verstehen. Um den genauen Wert des Integrals festzulegen bilden wir immer feiner Unterteilungen des Intervalls. Wir nennen diese Aufteilungen des Intervalls in Teilintervalle *Partitionen*. Es ist dann das Grenzwertverhalten der diesen Partitionen zugeordneten Summen zu untersuchen.

2 Definition des Integrals

In diesem Abschnitt sind $a < b$ zwei reelle Zahlen und

$$I := [a, b]$$

ist das kompakte Intervall mit den Randpunkten a, b.

Definition 2.1 (Partitionen). *Eine* **Partition** *von I ist eine endliche Teilmenge $P \subset I$ welche die Randpunkte a, b enthält. Die Menge aller Partitionen von I bezeichnen wir mit*

$$\mathscr{P} := \mathscr{P}(I) = \{P \subset I \,|\, a, b \in P,\ P \text{ ist endlich}\}.$$

Es sei daran erinnert, dass eine nichtleere Menge P endlich genannt wird wenn eine natürliche Zahl n und eine bijektive Abbildung $\phi : \{1, \ldots, n\} \to P$ existiert. Nach dem *Dirichletschen Schubfachprinzip* ist die Zahl $n \in \mathbb{N}$ hier unabhängig von der Wahl der Abbildung ϕ. Sie wird *Anzahl der Elemente von P* genannt und mit $\#P$ bezeichnet. Es ist klar zu unterscheiden zwischen den Begriffen *beschränkt* und *endlich*. Zum Beispiel ist jedes Intervall in $\mathbb{R}$, das mehr als einen Punkt enthält, eine unendliche (sogar überabzählbare) Teilmenge von $\mathbb{R}$, und zwar auch dann, wenn es sich um ein beschränktes Intervall handeln sollte. Im vorliegenden Fall enthält unsere endliche Teilmenge $P \subset I$ auf jeden Fall die Randpunkte a und b. Da diese voneinander verschieden sind, enthält P also mindestens zwei Elemente. Damit ist

$$N := \#P - 1 \in \mathbb{N}$$

eine natürliche Zahl und $N + 1$ ist die Anzahl der Elemente von P.

Nach Definition der *Anzahl der Elemente* existiert eine bijektive Abbildung $\phi : \{0, 1, \ldots, N\} \to P$. Wir bezeichnen die Bildpunkte dieser Abbildung mit $x_k := \phi(k)$ für $k = 0, 1, \ldots, N$. Da ϕ bijektiv ist, kommt jedes Element von P genau einmal als Bildpunkt vor. Damit ist P die Menge

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}.$$

Nun können wir die Elemente von P so umordnen, falls notwendig, dass jedes Element x_k mit $k \geq 1$ grösser ist als das vorangegangene Element x_{k-1}. Dann ist notwendigerweise $x_0 = a$ und $x_N = b$ und es gilt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b. \tag{1}$$

Jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\#P = N+1$ bestimmt also mittels dieser Anordnung eine Aufteilung des Intervalls $I = [a, b]$ in N Teilintervalle der Form $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, N$. Jeder solchen Partition und jeder beschränkten Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ können wir nun wie folgt zwei endliche Summen (als Flächeninhalte verstanden) zuordnen.

Definition 2.2 (Ober- und Untersumme). *Sei*

$$f : I \to \mathbb{R}$$

eine beschränkte Funktion und $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ *eine Partition von* I*, so dass* (1) *gilt. Die* **Untersumme** $\underline{\mathrm{S}}(f, P)$ *und die* **Obersumme** $\overline{\mathrm{S}}(f, P)$ *(siehe Abbildung 2) sind definiert durch*

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{S}}(f, P) &:= \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}), \\ \overline{\mathrm{S}}(f, P) &:= \sum_{k=1}^{N} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

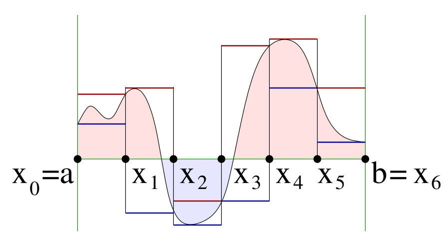

Abbildung 2: Die Ober- und Untersumme.

Lemma 2.3. *Seien* $a < b$ *reelle Zahlen und sei*

$$f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f, P). \tag{3}$$

Beweis. Für je zwei Partitionen $P, Q \in \mathscr{P}(I)$ gilt die Ungleichung

$$P \subset Q \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \underline{\mathrm{S}}(f,Q) \le \overline{\mathrm{S}}(f,Q) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P). \tag{4}$$

Um dies zu verstehen, ist es nützlich, zunächst den Fall zu betrachten, dass die Partition Q genau einen Punkt mehr enthält als P. Sei

$$P = \{x_0, \dots, x_N\},$$

wobei die Punkte x_k die Bedingung (1) erfüllen. Dann ist $Q = P \cup \{\xi\}$, wobei ξ ein neuer Unterteilungspunkt, also nicht gleich einem der Elemente von P ist. Dann gibt es genau ein $\ell \in \{1, \dots, N\}$, so dass

$$x_{\ell-1} < \xi < x_\ell$$

ist. Damit erhält man

$$\left(\sup_{[x_{\ell-1},\xi]} f\right) \cdot (\xi - x_{\ell-1}) + \left(\sup_{[\xi,x_\ell]} f\right) \cdot (x_\ell - \xi) \le \left(\sup_{[x_{\ell-1},x_\ell]} f\right) \cdot (x_\ell - x_{\ell-1}).$$

Addiert man dazu alle Summanden in (2) mit $k \neq \ell$ so ergibt sich die Ungleichung $\overline{\mathrm{S}}(f,Q) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P)$. Ebenso beweist man $\underline{\mathrm{S}}(f,Q) \ge \underline{\mathrm{S}}(f,P)$. Damit ist (4) für den Fall bewiesen, dass Q genau ein Element mehr als P enthält. Der allgemeine Fall lässt sich hierauf leicht durch vollständige Induktion zurückführen.

Nun folgt aus (4), dass die Zahl $\overline{\mathrm{S}}(f,Q)$ für jede Partition $Q \in \mathscr{P}(I)$ eine obere Schranke für die Menge $\{\underline{\mathrm{S}}(f,P) \,|\, P \in \mathscr{P}(I)\}$ ist. Also folgt aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke, dass

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \overline{\mathrm{S}}(f,Q)$$

ist. Diese Ungleichung gilt für jede Partition $Q \in \mathscr{P}(I)$. Das heisst wiederum, dass die Zahl $\sup_{P\in\mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P)$ eine untere Schranke für die Menge $\left\{\overline{\mathrm{S}}(f,Q) \,|\, Q \in \mathscr{P}(I)\right\}$ ist. Also folgt aus der Definition des Infimums als grösste untere Schranke, dass die Ungleichung

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \inf_{Q \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,Q)$$

gilt. Damit ist Lemma 2.3 bewiesen. $\square$

Definition 2.4 (Integral). *Eine beschränkte Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *heisst* **Riemann integrierbar** *wenn in* (3) *Gleichheit gilt. In diesem Fall nennen wir die Zahl*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f, P) = \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f, P) \tag{5}$$

das **Integral von** f **über dem Intervall** $I = [a, b]$.

Beispiel 2.5. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion mit dem Wert c, das heisst $f(x) = c$ für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) = \overline{\mathrm{S}}(f, P) = (b - a)c.$$

Daher ist f Riemann integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)c$. In diesem einfachen Fall stimmt als unsere Definition mit der Interpretation des Flächeninhalts als *Breite* mal *Höhe* überein. Man beachte, dass die Konstante c auch negativ sein darf.

Beispiel 2.6. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Identität, das heisst $f(x) = x$ für alle $x \in [0, 1]$. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $P_N = \{x_0, \ldots, x_N\}$ die Partition mit $x_k = \frac{k}{N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$. Dann gilt $\underline{\mathrm{S}}(f, P_N) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$ und $\overline{\mathrm{S}}(f, P_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ nach Lemma 2.9.

Beispiel 2.7. Sei $x_0 \in I$ und $c_0 \in \mathbb{R}$ und $f_0 : I \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_0(x) := \begin{cases} c_0, & \text{für } x = x_0, \\ 0, & \text{für } x \neq x_0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist Riemann integrierbar und ihr Integral verschwindet. Ist $c_0 > 0$, so ist die Untersumme $\underline{\mathrm{S}}(f_0, P)$ für jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ gleich Null, währen die Obersumme $\overline{\mathrm{S}}(f_0, P)$ durch geeignete Wahl der Partition beliebig klein gewählt werden kann.

Beispiel 2.8. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann gilt $\underline{\mathrm{S}}(f, P) = 0$ und $\overline{\mathrm{S}}(f, P) = 1$ für jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$. Also ist diese Funktion nicht Riemann integrierbar.

Lemma 2.9. *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $A \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar und $A = \int_a^b f(x)\,dx$.*

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ mit*

$$A - \varepsilon < \overline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \underline{\mathrm{S}}(f,P) < A + \varepsilon. \tag{6}$$

Beweis. Wir beweisen (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei also f Riemann integrierbar und $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt

$$A - \varepsilon < \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P) = A = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,P) < A + \varepsilon,$$

und daher existieren zwei Partition $P_0, P_1 \in \mathscr{P}(I)$ mit

$$A - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f,P_0) \leq A \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P_1) < A + \varepsilon. \tag{7}$$

Nun sei $P := P_0 \cup P_1$. Dann gilt $P_0 \subset P$ und $P_1 \subset P$ und daher, nach (4),

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P_0) \leq \underline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P_1). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt $A - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P) < A + \varepsilon$ und hieraus folgt die gewünschte Ungleichung (6).

Wir beweisen (ii) $\Longrightarrow$ (i). Für $\varepsilon > 0$ sei $P_\varepsilon \in \mathscr{P}(I)$ eine Partition, die die Ungleichung (6) mit $P = P_\varepsilon$ erfüllt. Dann gilt

$$A - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f,P_\varepsilon) \leq \sup_{Q \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,Q) \leq \inf_{Q \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,Q) \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P_\varepsilon) < A + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, und daraus folgt $A = \sup_{Q \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,Q) = \inf_{Q \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,Q)$. Dies ist gleichbedeutend mit (i) und damit ist Lemma 2.9 bewiesen. □

Lemma 2.10. *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar.*

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon$.*

Beweis. Ist f Riemann-integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)\,dx$ und $\varepsilon > 0$, so existiert nach Lemma 2.9 ein $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \overline{\mathrm{S}}(f,P) < A + \frac{\varepsilon}{2}$ und daraus folgt (ii). Erfüllt f die Bedingung (ii), dann gilt die Ungleichung

$$\inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,P) - \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P) \leq \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \left(\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P)\right) < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt $\inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,P) = \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P)$ nach Lemma 2.3. Damit ist Lemma 2.10 bewiesen. □

Satz 2.11. **(i)** *Jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar.*
(ii) *Jede monotone Funktion ist Riemann integrierbar.*

Beweis. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da das Intervall $I = [a, b]$ (mit der Standardmetrik auf den reellen Zahlen) ein kompakter metrischer Raum ist, wissen wir, dass f gleichmässig stetig ist. Das heisst

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, x' \in I: \big(|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon\big).$$

Wir zeigen nun, dass f die Bedingung (ii) in Lemma 2.10 erfüllt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f gleichmässig stetig ist, existiert eine Konstante $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in I$ folgendes gilt:

$$|x - x'| < \delta \qquad \implies \qquad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Nun wählen wir eine Partition $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ von I so dass (1) gilt und $x_k - x_{k-1} < \delta$ ist für $k = 1, \ldots, N$. Dann gilt für alle $x, x' \in [x_{k-1}, x_k]$ und alle k, dass $|x - x'| < \delta$ ist und daher $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/(b - a)$. Also gilt $f(x) < f(x') + \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x, x' \in [x_{k-1}, x_k]$ und alle $k \in \{1, \ldots, N\}$. Daraus folgt $f(x) \le \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f + \varepsilon/(b - a)$ für alle $x \in [x_{k-1}, x_k]$ und daher

$$\sup_{[x_{k-1} x_k]} f \le \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b - a}, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit der positiven Zahl $x_k - x_{k-1}$ und summieren über alle k so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f, Q) &= \sum_{k=1}^{N} \sup_{[x_{k-1} x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{N} \left(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b - a} \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1} x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \underline{\mathrm{S}}(f, Q) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Partition $Q \in \mathscr{P}(I)$ existiert, die die Ungleichung $\overline{\mathrm{S}}(f, Q) - \underline{\mathrm{S}}(f, Q) \le \varepsilon$ erfüllt. Das heisst, dass f die Bedingung (ii) in Lemma 2.10 erfüllt. Daher ist die Funktion f Riemann integrierbar. Damit ist (i) bewiesen.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ mit

$$\delta\,(f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

und sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ eine Partition mit

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{für } k = 1, \dots, N.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) &= \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \delta \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= \delta(f(b) - f(a)) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ existiert, die die Ungleichung $\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) < \varepsilon$ erfüllt. Nach Lemma 2.10 ist f daher Riemann-integrierbar. Damit ist Satz 2.11 bewiesen. $\square$

3 Eigenschaften des Integrals

Wie in Abschnitt 2 seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $I := [a, b]$ das kompakte Intervall mit den Randpunkten a, b. Der folgende Satz zeigt, dass die Menge

$$\mathscr{R}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ is Riemann integrierbar}\}$$

aller Riemann integrierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum (genauer ein linearer Unterraum des Vektorraumes aller reellwertigen Funktionen auf I) ist, und dass die Abbildung

$$\mathscr{R}(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

linear ist. Nach Satz 2.11 ist der Raum $\mathscr{C}(I)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf I ein linear Unterraum von $\mathscr{R}(I)$.

Satz 3.1. *Seien $f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbare Funktionen und seien $a < c < b$ und λ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Dann gilt folgendes.*

(i) *Die Funktionen $f+g$, fg, λf, $|f|^p$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, sind Riemann integrierbar.*

(ii) *Es gilt*

$$\begin{gathered}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \\ \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.\end{gathered} \tag{9}$$

(iii) *Wenn $f(x) \leq g(x)$ ist für alle $x \in I$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

(iv) *Es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.*

(v) *Die Funktionen $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ sind Riemann integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

Beweis. Siehe Seite 11. □

Bemerkung 3.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann integrierbare Funktion. Sind $a, b \in I$ mit $b < a$, so definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Mit dieser Konvention gilt die Gleichung (10) in Teil (v) von Satz 3.1 für alle $a, b, c \in I$.

Lemma 3.3. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und sei $M > 0$ so gewählt, dass

$$\sup_{x\in I} |f(x)| \leq M, \qquad \sup_{x\in I} |g(x)| \leq M. \tag{11}$$

Sei $\psi : [-M, M]^2 \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, dass heisst, es gibt eine reelle Zahl $L > 0$, so dass für alle $y, z, y', z' \in [-M, M]$ die Ungleichung

$$|\psi(y,z) - \psi(y',z')| \leq L\,|y - y'| + L\,|z - z'| \tag{12}$$

erfüllt ist. Dann ist die durch $h(x) := \psi(f(x), g(x))$ für $x \in I$ definierte Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.10 existieren $P_0, P_1 \in \mathscr{P}(I)$ mit

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P_0) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \overline{\mathrm{S}}(g, P_1) - \underline{\mathrm{S}}(g, P_1) < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Sei $P := P_0 \cup P_1$. Dann gilt $P_0 \subset P$ und $P_1 \subset P$ und daher, nach (4),

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2L}, \qquad \overline{\mathrm{S}}(g, P) - \underline{\mathrm{S}}(g, P) < \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{13}$$

Schreiben wir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, so erfüllen alle $x, x' \in I_k := [x_{k-1}, x_k]$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} h(x) - h(x') &= \psi(f(x), g(x)) - \psi(f(x'), g(x')) \\ &\le L\,|f(x) - f(x')| + L\,|g(x) - g(x')| \\ &\le L\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) + L\left(\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sup_{I_k} h - \inf_{I_k} h \le L\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right) + L\left(\sup_{I_k} g - \inf_{I_k} g\right)$$

für $k = 1, \ldots, N$. Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $x_k - x_{k-1}$ und bilden dann die Summe über $k = 1, \ldots, N$, so erhalten wir

$$\overline{\mathrm{S}}(h, P) - \underline{\mathrm{S}}(h, P) \le L\left(\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P)\right) + L\left(\overline{\mathrm{S}}(g, P) - \underline{\mathrm{S}}(g, P)\right) < \varepsilon.$$

Hier folgt der letzte Schritt aus (13) und damit ist Lemma 3.3 bewiesen. □

Beweis von Satz 3.1. Wir beweisen Teil (i). Wähle $M > 0$ so dass (11) gilt. Dann sind die folgenden Funktionen $\psi : [-M, M]^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit der jeweiligen Lipschitz-Konstanten L:

$$\begin{array}{ll} \psi(y, z) = y + z, & L = 1, \\ \psi(y, z) = yz, & L = M, \\ \psi(y, z) = \lambda y, & L = |\lambda|, \\ \psi(y, z) = |y|^p, & L = pM^{p-1}, \\ \psi(y, z) = \max\{y, z\}, & L = 1, \\ \psi(y, z) = \min\{y, z\}, & L = 1. \end{array}$$

Daher folgt Teil (i) aus Lemma 3.3. (Man kann natürlich auch die Formeln $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ verwenden.)

Wir beweisen Teil (ii). Zunächst beweisen wir die Ungleichungen

$$\underline{\mathrm{S}}(f+g,P) \le \underline{\mathrm{S}}(f,P) + \underline{\mathrm{S}}(g,P) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P) + \overline{\mathrm{S}}(g,P) \le \overline{\mathrm{S}}(f+g,P) \tag{14}$$

für alle $P \in \mathscr{P}(I)$. Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ eine Partition, die (1) erfüllt und sei $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \dots, N$. Dann gilt

$$\inf_{I_k}(f+g) \le \inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g \le \sup_{I_k} f + \sup_{I_k} g \le \sup_{I_k}(f+g)$$

für $k = 1, \dots, N$. Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit $x_k - x_{k-1}$ und bilden die Summe über alle k so erhalten wir (14). Nun sei

$$A := \int_a^b f(x)\,dx, \qquad B := \int_a^b g(x)\,dx$$

und sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.9 existieren Partitionen $P_0, P_1 \in \mathscr{P}(I)$ mit

$$\begin{aligned} A - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{\mathrm{S}}(f,P_0) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P_0) < A + \frac{\varepsilon}{2}, \\ B - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{\mathrm{S}}(g,P_1) \le \overline{\mathrm{S}}(g,P_1) < B + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dann erfüllt $P := P_0 \cup P_1 \in \mathscr{P}(I)$ nach (4) folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} A + B - \varepsilon &< \underline{\mathrm{S}}(f,P_0) + \underline{\mathrm{S}}(g,P_1) \\ &\le \underline{\mathrm{S}}(f,P) + \underline{\mathrm{S}}(g,P) \\ &\le \underline{\mathrm{S}}(f+g,P) \\ &\le \overline{\mathrm{S}}(f+g,P) \\ &\le \overline{\mathrm{S}}(f,P) + \overline{\mathrm{S}}(g,P) \\ &\le \overline{\mathrm{S}}(f,P_0) + \overline{\mathrm{S}}(g,P_1) \\ &< A + B + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Lemma 2.9, dass $f+g$ Riemann-intergierbar ist mit

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = A + B.$$

Die Gleichung $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ zeigt man mit einem ähnlichen Argument, und damit ist Teil (ii) bewiesen.

Wir beweisen Teil (iii). Wenn $f(x) \le g(x)$ ist für alle $x \in I$, so erhalten wir $\overline{\mathrm{S}}(f,P) \le \overline{\mathrm{S}}(g,P)$ für alle $P \in \mathscr{P}(I)$, und daher

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,P) \le \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(g,P) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Damit ist Teil (iii) bewiesen.

Wir beweisen Teil (iv). Für alle $x \in I$ gilt $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Nach (iii) folgt daraus $-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ und damit ist Teil (iv) bewiesen.

Wir beweisen Teil (v). Dazu verwenden wir die Abkürzungen

$$f_0 := f|_{[a,c]}, \qquad f_1 := f|_{[c,b]}, \qquad I_0 := [a,c], \qquad I_1 := [c,b].$$

Seien $P_0 \in \mathscr{P}(I_0)$ und $P_1 \in \mathscr{P}(I_1)$ Partitionen der Teilintervalle I_0 und I_1. Dann ist $P := P_0 \cup P_1$ eine Partition des Intervalls $I = [a,b]$ und es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{S}}(f,P) &= \underline{\mathrm{S}}(f_0,P_0) + \underline{\mathrm{S}}(f_1,P_1), \\ \overline{\mathrm{S}}(f,P) &= \overline{\mathrm{S}}(f_0,P_0) + \overline{\mathrm{S}}(f_1,P_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 2.10 eine Partitionen $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon$. Diese Partition kann mit $c \in P$ gewählt werden, so dass $P = P_0 \cup P_1$ ist mit $P_0 \in \mathscr{P}(I_0)$ und $P_1 \in \mathscr{P}(I_1)$. Da die Differenzen $\overline{\mathrm{S}}(f_0,P_0) - \underline{\mathrm{S}}(f_0,P_0)$ und $\overline{\mathrm{S}}(f_1,P_1) - \underline{\mathrm{S}}(f_1,P_1)$ beide nicht negativ sind, sind sie beide kleiner als ε. Also folgt aus Lemma 2.10, dass die Funktionen f_0 und f_1 Riemann integrierbar sind. Wir bezeichnen ihre Integrale mit

$$A_0 := \int_a^c f(x)\,dx, \qquad A_1 := \int_c^b f(x)\,dx, \qquad A := A_0 + A_1.$$

Sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren nach Lemma 2.9 zwei Partitionen $P_0 \in \mathscr{P}(I_0)$ und $P_1 \in \mathscr{P}(I_1)$ so dass

$$\begin{aligned} A_0 - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{\mathrm{S}}(f_0,P_0) \le \overline{\mathrm{S}}(f_0,P_0) < A_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \\ A_1 - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{\mathrm{S}}(f_1,P_1) \le \overline{\mathrm{S}}(f_1,P_1) < A_1 + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen so erhalten wir nach (15)

$$A - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P) < A + \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass das Paar (f,A) die Bedingung (ii) in Lemma 2.9 erfüllt. Also ist A das Integral von f. Damit ist Satz 3.1 bewiesen. $\square$

Satz 3.4. *Sei $f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{16}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f die Bedingung (ii) in Lemma 2.10 erfüllt. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Funktionen-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert, existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{17}$$

Da f_n Riemann-integrierbar ist, existiert nach Lemma 2.10 eine Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ die die Bedingung (1) erfüllt so dass

$$\overline{\mathrm{S}}(f_n, P) - \overline{\mathrm{S}}(f_n, P) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Aus (17) folgen die Ungleichungen

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le f(x) \le f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

für alle $x \in I$. Daraus wiederum folgt

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f_n - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \le \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \le \sup_{[x_{k-1},x_k]} f_n + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

für $k = 1, \ldots, N$. Multiplizieren wir diese Ungleichungen mit $x_k - x_{k-1}$ und bilden die Summe über alle k, so ergibt sich

$$\underline{\mathrm{S}}(f_n, P) - \frac{\varepsilon}{4} \le \underline{\mathrm{S}}(f, P) \le \overline{\mathrm{S}}(f, P) \le \overline{\mathrm{S}}(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{4},$$

und daher gilt nach (18)

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) \le \overline{\mathrm{S}}(f_n, P) - \underline{\mathrm{S}}(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass f die Bedingung (ii) in Lemma 2.10 erfüllt, und somit ist f Riemann-integrierbar. Aus Teil (iv) von Satz 3.1 folgt nun

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\le (b-a) \sup_{a\le x\le b} |f(x) - f_n(x)| \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert, folgt daraus die Gleichung (16). Damit ist Satz 3.4 bewiesen. $\square$

4 Riemannsche Summen

In diesem Abschnitt charakterisieren wir das Integral als einen Grenzwert und die Integrierbarkeit als eine Aussage über die Existenz dieses Grenzwertes. Das Resultat wird in diesem Manuskript nicht weiter verwendet und daher kann dieser Abschnitt übersprungen werden. Wir betrachten ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$. Sei eine Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ gegeben, so dass (1) gilt, und definiere

$$\mu(P) := \max\{x_k - x_{k-1} \,|\, k = 1, \ldots, N\}, \qquad N(P) := N = \#P - 1.$$

Die Zahl $\mu(P) > 0$ wird **Feinheit** der Partition P genannt und $N(P)$ ist die Anzahl der Intervalle, in die P das Intervall I unterteilt.

Satz 4.1 (Riemannsche Summen). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $A \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(I) *f ist Riemann integrierbar und*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(II) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $P \in \mathscr{P}(I)$ gilt:*

$$\mu(P) < \delta \quad \Longrightarrow \quad A - \varepsilon < \underline{\mathrm{S}}(f, P) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, P) < A + \varepsilon. \tag{19}$$

(III) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass für jede Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ von I (die (1) erfüllt) und alle $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{c} \mu(P) < \delta \\ x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \ \forall k \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon. \tag{20}$$

Beweis. Siehe Seite 17. □

Dieser Satz lässt sich auch so formulieren: Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann integrierbar wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{\mu(P) \to 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,. \tag{21}$$

existiert. Die Summen in (21) werden **Riemannsche Summen** genannt.

Man beachte hier die Parallele in der Schreibweise zwischen dem Integralzeichen auf der linken Seite und dem Summenzeichen auf der rechten Seite in (21), dem Integranden $f(x)$ auf der linken Seite und den Faktoren $f(\xi_k)$ auf der rechten Seite, sowie dem Differential-Symbol dx auf der linken Seite und der Differenz $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ auf der rechten Seite. Diese mathematischen Symbole deuten darauf hin, dass man sich die Differenz $x_k - x_{k-1}$ beliebig klein vorstellt und in idealisierter Weise als *infinitesimal kleine* Zahl versteht. Daher rührt auch der Ausdruck *Infinitesimalrechnung*, der manchmal austauschbar für *Analysis* verwendet wird.

Lemma 4.2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $M > 0$ so dass*

$$-M \leq f(x) \leq M \tag{22}$$

für alle $x \in I$. Dann gilt für alle $P, Q \in \mathscr{P}(I)$

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{S}}(f, P) &\geq \underline{\mathrm{S}}(f, Q) - 4M\mu(P)N(Q), \\ \overline{\mathrm{S}}(f, P) &\leq \overline{\mathrm{S}}(f, Q) + 4M\mu(P)N(Q). \end{aligned} \tag{23}$$

Beweis. Sei $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ so numeriert, dass (1) gilt. Für $k = 1, \ldots, N$ definieren wir die relllen Zahlen h_k^+ und h_k^- durch die Formel

$$h_k^\pm := \begin{cases} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q = \emptyset, \\ \pm M, & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q \neq \emptyset. \end{cases}$$

Hier tritt der zweite Fall für jeden der Endpunkte a und b genau einmal auf. Darüber hinaus hat die Menge Q noch $N(Q) - 1$ weitere Elemente und jedes dieser Elemente kann in höchstens zwei der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ enthalten sein. Damit tritt der Fall $h_k^+ - h_k^- = 2M$ höchstens $2N(Q)$ mal auf. In allen anderen Fällen gilt $h_k^+ - h_k^- = 0$. Daraus folgt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{N} \left(h_k^+ - h_k^-\right) \leq 4M \cdot N(Q). \tag{24}$$

Ausserdem gilt

$$\sum_{k=1}^{N} h_k^- \left(x_k - x_{k-1}\right) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, P \cup Q) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, Q). \tag{25}$$

Unter Verwendung von (24) und (25) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f,P) &= \sum_{k=1}^{N} \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{N} h_k^+ \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^{N} h_k^- \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{N} \left(h_k^+ - h_k^-\right) \mu(P) \\
&\le \overline{\mathrm{S}}(f,Q) + 4M \cdot N(Q)\mu(P).
\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Ungleichung in (23) gezeigt. Die erste folgt aus der zweiten, indem man f durch $-f$ ersetzt und die Formel $\overline{\mathrm{S}}(-f,P) = -\underline{\mathrm{S}}(f,P)$ verwendet. Damit ist Lemma 4.2 bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 4.1. Wir beweisen (II) $\Longrightarrow$ (III). Dies folgt sofort aus der Ungleichung

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P)$$

für jede Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ des Intervalls $I = [a,b]$ die (1) erfüllt und alle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, N$.

Wir beweisen (III) $\Longrightarrow$ (II). Dazu betrachten wir eine feste Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ des Intervalls $I = [a,b]$ die (1) erfüllt. Bilden wir das Supremum der Riemannschen Summen über alle N-Tupel reeller Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_N$ in den Intervallen $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ so erhalten wir die Obersumme:

$$\sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \overline{\mathrm{S}}(f,P).$$

Ebenso ergibt sich beim Infimum die Untersumme:

$$\inf_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \underline{\mathrm{S}}(f,P).$$

Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben und wählen wir $\delta > 0$ wie in (III) so gilt für jedes $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ die Ungleichung

$$A - \varepsilon \le \underline{\mathrm{S}}(f,P) \le \overline{\mathrm{S}}(f,P) \le A + \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass f und A die Bedingung (II) erfüllen.

Wir beweisen (I) $\Longrightarrow$ (II). Sei also f Riemann integrierbar und

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{\mathrm{S}}(f,P) = \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{\mathrm{S}}(f,P). \tag{26}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.10 existiert eine Partition $Q \in \mathscr{P}(I)$ so, dass

$$\overline{\mathrm{S}}(f,Q) - \underline{\mathrm{S}}(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27}$$

Wähle $M > 0$ so, dass (22) gilt und wähle $\delta > 0$ so klein, dass

$$4M \cdot N(Q)\delta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{28}$$

Dann erfüllt jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f,P) &\leq \overline{\mathrm{S}}(f,Q) + 4M\mu(P)N(Q) \\
&< \overline{\mathrm{S}}(f,Q) + 4M\delta N(Q) \\
&< \overline{\mathrm{S}}(f,Q) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \underline{\mathrm{S}}(f,Q) + \varepsilon \\
&\leq A + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hier folgt die erste Ungleichung aus Lemma 4.2, die zweite aus der Voraussetzung $\mu(P) < \delta$, die dritte aus (28), die vierte aus (27), und die letzte aus (26). Genauso erhält man, mit Hilfe von Lemma 4.2, für jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{S}}(f,P) &\geq \underline{\mathrm{S}}(f,Q) - 4M\mu(P)N(Q) \\
&> \underline{\mathrm{S}}(f,Q) - 4M\delta N(Q) \\
&> \underline{\mathrm{S}}(f,Q) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> \overline{\mathrm{S}}(f,Q) - \varepsilon \\
&\geq A - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also erfüllen f und A die Bedingung (II).

Die Implikation (II) $\Longrightarrow$ (I) folgt direkt aus Lemma 2.9 und damit ist Satz 4.1 bewiesen. $\square$

5 Der Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis wird auch der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung genannt. Er besagt, grob gesprochen, dass die Ableitung die Umkehrung des Integrals ist. Genauer gesagt, wenn wir das Integral einer stetigen Funktion über einem Teilintervall wiederum als Funktion des rechten Endpunktes betrachten, wobei wir gleichzeitig den linken Endpunkt festhalten, so erhalten wir eine stetig differenzierbare Funktion deren Ableitung die ursprünglich gegebene stetige Funktion ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 5.1 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{für } a \leq x \leq b. \tag{29}$$

Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $x \in [a, b]$ fest gewählt. Es ist zu zeigen, dass folgendes gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Dies bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass jedes $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \delta$ und $x + h \in [a, b]$ die Ungleichung

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

erfüllt. Um dies zu zeigen, halten wir eine Zahl $\varepsilon > 0$ fest. Da f an der gegebenen Stelle $x \in [a, b]$ stetig ist, existiert, nach Definition der Stetigkeit, eine Zahl $\delta > 0$ so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$a \leq y \leq b, \quad |y - x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{30}$$

Nun sei h eine reelle Zahl so dass $0 < h < \delta$ und $x + h \leq b$ ist. Dann gilt $a \leq x < x + h \leq b$ und daher, nach Teil (iv) von Satz 3.1,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\big(f(t)-f(x)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Teil (ii) und Teil (iii) von Satz 3.1, ergibt sich daraus wiederum die Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}\big(f(t)-f(x)\big)\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt \\ &\le \sup_{x\le t\le x+h}|f(t)-f(x)| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Hier folgt der letzte Schritt aus (30) und der Tatsache, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Supremum annimmt. Angewendet auf die Funktion $[x,x+h]\to\mathbb{R}:t\mapsto|f(t)-f(x)|$ bedeutet dies, dass es eine reelle Zahl $y\in[x,x+h]$ gibt, so dass $|f(y)-f(x)|=\sup_{x\le t\le x+h}|f(t)-f(x)|$ ist; da $0<h<\delta$ ist, erhalten wir $|y-x|<\delta$ und daher $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ nach (30). Damit ist die gewünschte Ungleichung $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)|<\varepsilon$ für jede reelle Zahl h mit $0<h<\delta$ und $x+h\in[a,b]$ bewiesen. Für $-\delta<h<0$ ist das Argument analog und damit ist Satz 5.1 bewiesen. □

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung hat viele wichtige Konsequenzen für die Berechnung von Integralen. Eine erste Konsequenz ist folgendes Korollar.

Korollar 5.2. *Seien $a<b$ reelle Zahlen und sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist*

$$f := F' : [a,b]\to\mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a). \tag{31}$$

Beweis. Wir definieren die Funktion $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \text{für } a \le x \le b.$$

Nach Satz 5.1 ist F_0 stetig differenzierbar und hat die Ableitung $F_0' = f = F'$. Daraus folgt $(F - F_0)' = F' - F_0' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz ist dann die Funktion $F - F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant und daraus folgt wiederum die Gleichung $F(a) = F(a) - F_0(a) = F(b) - F_0(b) = F(b) - \int_a^b f(t)\,dt$. Damit ist Korollar 5.2 bewiesen. □

Definition 5.3 (Stammfunktion). *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst* **Stammfunktion von** f *wenn sie stetig differenzierbar ist und ihre Ableitung durch $F'(x) = f(x)$ für $a \le x \le b$ gegeben ist.*

Eine Stammfunktion von f ist nicht eindeutig durch f bestimmt. Nach dem Mittelwertsatz unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen von f durch eine additive Konstante. Die Schreibweise $F(x) = \int f(x)\,dx$ wird oft für die Aussage *"F ist eine Stammfunktion von f"* verwendet.

Beispiel 5.4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f_n(x) := x^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion. Dann ist

$$F_n(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

eine Stammfunktion von f_n.

Nach Korollar 5.2 folgt daraus die Gleichung $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Man beachte, dass die Funktionenfolge f_n punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, die durch $f(x) = 0$ für $0 \le x < 1$ und $f(1) := 1$ gegeben ist. Diese ist nach Satz 2.11 Riemann integrierbar. Ausserdem gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Eine derartige Aussage gilt in grösserer Allgemeinheit: Falls $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann integrierbarer Funktionen ist und $M > 0$ eine reelle Zahl so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \le M$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$. Ein Beweis dieser Aussage geht über das vorliegende Manuskript hinaus (siehe Eberlein [1]).

Zur Berechnung von Integralen und Stammfunktionen wird es nützlich sein, zwei weitere wichtige Rechenregeln für das Riemannsche Integral stetiger Funktionen herzuleiten. Hierbei handelt es sich um die *Partielle Integration* und um die *Substitution*. Beide Regeln folgen auf einfache Weise aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Partielle Integration kann man als Integralversion der Leibnizregel betrachten und die Substitution als Integralversion der Kettenregel.

Satz 5.5 (Partielle Integration). *Seien $a < b$ reelle Zahlen und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{32}$$

Beweis. Die Funktion $F := fg : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und ihre Ableitung ist $F' = f'g + fg'$ nach der Leibnizregel. Nach Korollar 5.2 folgt daraus die Gleichung

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Nach Teil (i) von Satz 3.1 folgt hieraus wiederum die Formel (32) und damit ist Satz 5.5 bewiesen. □

Satz 5.6 (Substitution). *Seien $a < b$ reelle Zahlen, sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall so dass $\phi([a, b]) \subset I$, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt. \tag{33}$$

Beweis. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ die durch $F(x) := \int_{\phi(a)}^x f(\xi)\,d\xi$ für $x \in I$ definiere Funktion. Dann ist F eine Stammfunktion von f und es gilt $F(\phi(a)) = 0$. Daraus folgt nach der Kettenregel dass die Funktion $F \circ \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit der Ableitung $(F \circ \phi)'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ für $a \le t \le b$. Nach Korollar 5.2 folgt daraus die Gleichung

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

Damit ist Satz 5.6 bewiesen. □

Korollar 5.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) *Sind $a + c, b + c \in I$, so gilt*

$$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

(ii) *Sind $ca, cb \in I$, so gilt*

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx.$$

(iii) *Ist f stetig differenzierbar und $f(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ so gilt*

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|).$$

Beweis. Teil (i) folgt aus der Substitutionsregel in Satz 5.6 mit $\phi : [a, b] \to I$ definiert durch $\phi(t) := t + c$ und Teil (ii) folgt mit $\phi(t) := ct$. Für Teil (iii) ersetzen wir die Funktion ϕ in Satz 5.6 durch $f : [a, b] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und definieren die Funktion $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := \log(|x|)$. Dann gilt $F'(x) = 1/x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach Beispiel 6.2 und daher gilt

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{dx}{x} = \log(|f(b)|) - \log(|f(a)|)$$

nach Satz 5.6. Damit ist Korollar 5.7 bewiesen. □

Bemerkung 5.8. Schreiben wir

$$x = \phi(t), \qquad \frac{dx}{dt} = \phi'(t)$$

in Satz 5.6, und tun wir einmal so als ob es sich bei der Ableitung dx/dt tatsächlich um einen Quotienten handeln würde. Dann könnten wir einfach diesen quotienten mit "*dt*" multiplizieren und erhielten dann den Ausdruck $dx = \phi'(t)\,dt$. Setzen wir diesen in das unbestimmte Integral ein, so ergibt sich die Formel

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Trotz der eigentlich keinen Sinn machenden Rechenschritte in ihrer Herleitung stimmt diese Formel dennoch mit dem Substitutionsgesetz überein, wie Satz 5.6 zeigt.

Als weitere Anwendung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung leiten wir nun die Integralformel für das Restglied in der Taylorentwicklung einer Funktion her.

Satz 5.9. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei n einne nichtnegative ganze Zahl, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion. Dann gilt für alle $x_0, x \in I$ die Gleichung*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{34}$$

Beweis. Für $n = 0$ ist (34) einfach die Formel

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt,$$

und diese folgt direkt aus Korollar 5.2. Sei nun $n \geq 1$. Dann nehmen wir per Induktion an, dass die behauptete Gleichung für $n - 1$ bereits bewiesen sei. Wir werden im folgenden partiell integrieren mit

$$\phi(t) := -\frac{(x-t)^n}{n!}, \qquad \psi(t) := f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0).$$

Nach Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &- \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(t)\, dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \big(f^n(t) - f^{(n)}(x_0)\big)\, dt \\
&= \int_{x_0}^{x} \phi'(t)\psi(t)\, dt \\
&= -\int_{x_0}^{x} \phi(t)\psi'(t)\, dt \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 5.9 bewiesen. □

6 Beispiele

Beispiel 6.1. Sei a eine beliebige reelle Zahl mit

$$a \neq -1$$

und sei $f : (0, \infty)$ die durch $f(x) := x^a$ für $x > 0$ definierte Funktion. Dann ist

$$F(x) := \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

eine Stammfunktion von f. In der vor Beispiel 5.4 erläuterten Schreibweise lässt sich diese Aussage in der Form

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \tag{35}$$

formulieren.

Beispiel 6.2. Eine Stammfunktion von $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ ist die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \log(|x|)$, das heisst

$$\int \frac{dx}{x} = \log(|x|). \tag{36}$$

Beispiel 6.3. Die Funktion

$$\tan := \frac{\sin}{\cos} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

ist strikt monoton wachsend, bijektiv, und stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \pi/2$. Daraus folgt (nach dem Satz über Umkehrfunktionen) dass die Umkehrfunktion

$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten, die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1+x^2)$, beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x). \tag{37}$$

Beispiel 6.4. Genauso wie in Beispiel 6.3 kann man mit der hyperbolischen Tangensfunktion

$$\tanh := \frac{\sinh}{\cosh} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

vorgehen. Diese ist ebenfalls strikt monoton wachsend, bijektiv, und stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\tanh'(x) = 1 - \tan^2(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt dann, dass die Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh} := \tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Mit anderen Worten, die Funktion $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $(-1, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1 - x^2)$, beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{artanh}(x) \qquad \text{für } -1 < x < 1. \tag{38}$$

Diese Formel lässt sich auch wie folgt auf einem gänzlich anderem Weg gewinnen. Es gilt

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}\right)$$

für $-1 < x < 1$ und daher

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 - x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1 + x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1 - x} \\
&= \frac{1}{2}\big(\log(1 + x) - \log(1 - x)\big) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{artanh}(x).
\end{aligned}$$

Hier gilt die letzte Formel, weil die Gleichung $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ äquivalent ist zu der Gleichung $x = \tanh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

Beispiel 6.5. Die Funktion

$$\sin : \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to (-1, 1)$$

ist strikt monoton wachsend, bijektiv, und stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\sin'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \pi/2$. Daraus folgt dass die Umkehrfunktion

$$\arcsin := \sin^{-1} : (-1, 1) \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)$$

stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten, die Funktion $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $(-1, 1) \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/\sqrt{1 - x^2}$, beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x) \qquad \text{für } -1 < x < 1. \tag{39}$$

Beispiel 6.6. Genauso wie in Beispiel 6.5 kann man mit der hyperbolischen Sinusfunktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorgehen. Diese ist ebenfalls strikt monoton wachsend, bijektiv, und stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt dann, dass die Umkehrfunktion

$$\mathrm{arsinh} := \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\mathrm{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten, die Funktion $\mathrm{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/\sqrt{1 + x^2}$, beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \mathrm{arsinh}(x). \tag{40}$$

Übung: Es gilt $\mathrm{arsinh}(x) = \log(\sqrt{1 + x^2} + x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 6.7. Die Funktion

$$\cosh : (0, \infty) \to (1, \infty)$$

ist strikt monoton wachsend, bijektiv, und stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\cosh'(x) = \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} > 0$$

fúr alle $x > 0$. Daraus folgt dann dass die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arcosh} := \cosh^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty)$$

stetig differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \text{für } x > 1.$$

Mit anderen Worten, die Funktion $\operatorname{arcosh} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $(1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/\sqrt{x^2 - 1}$, beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcosh}(x) \qquad \text{für } x > 1. \tag{41}$$

Übung: Es gilt $\operatorname{arcosh}(x) = \log(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ für alle $x > 1$.

Beispiel 6.8. Es gelten die Formeln

$$\int e^{cx}\, dx = \frac{1}{c} e^{cx}$$

für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x), \qquad \int \cos(x)\, dx = \sin(x)$$

und

$$\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x), \qquad \int \cosh(x)\, dx = \sinh(x)$$

Beispiel 6.9. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist stetig und besitzt natürlich, wie jede andere stetige Funktion auch, eine Stammfunktion $F(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Jedoch lässt sich diese Stammfunktion nicht mittels einer geschlossenen Formel durch die anderen bisher betrachteten elementaren Funktionen ausdrücken.

Beispiel 6.10. Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aus der Partiellen Integration in Satz 5.5 mit $f(x) = x^n$ und $g(x) = c^{-1}e^{cx}$ ergibt sich das unbestimmte Integral

$$\int x^n e^{cx}\,dx = \frac{x^n e^{cx}}{c} - \frac{n}{c}\int x^{n-1}e^{cx}\,dx$$

Durch vollständige Induktion folgt daraus

$$\int x^n e^{cx}\,dx = e^{cx}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!x^{n-k}}{(n-k)!c^{k+1}}. \tag{42}$$

Beispiel 6.11 (Flächeninhalt des Einheitskreises). Mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $g(x) = x$ für $-1 < x < 1$ ergibt sich aus Satz 5.5 die Formel

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx \\
&= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - \int \sqrt{1-x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Hier folgt der letzte Schritt aus Beispiel 6.5. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\Big) \qquad \text{für } -1 < x < 1. \tag{43}$$

Integration über dem Intervall $[-1, 1]$ liefert die Gleichung

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Dies ist aber genau der Flächeninhalt der oberen Hälfte des Einheitskreises, und somit haben wir bewiesen, dass der Einheitskreis die Fläche π hat.

Beispiel 6.12. Die gleiche Methode wie in Besipiel 6.11 liefert die Formel

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x)\Big). \tag{44}$$

Hier beruht die Rechnung auf Beispiel 6.6.

Beispiel 6.13. Die Methode aus Besipiel 6.11 liefert auch die Formel

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcosh}(x)\Big) \qquad \text{für } x > 1. \tag{45}$$

Hier beruht die Rechnung auf Beispiel 6.7.

Beispiel 6.14. Wir beweisen die Formel

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi. \tag{46}$$

Nach Satz 5.5 mit $f(x) := \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)g'(x)\,dx = -\int_0^{2\pi} f'(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$$

und daher

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx + \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi,$$

woraus die gewünschte Formel (46) folgt.

Beispiel 6.15. Das **Wallis'sche Produkt** ist der Spezialfall des Eulerschen Sinusproduktes in Satz 8.8 mit $x = 1/2$. Es lässt sich als das unendliche Produkt der Faktoren $(2k)^2/(2k-1)(2k+1)$ schreiben, und ein Satz von John Wallis aus dem Jahre 1655 besagt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}. \tag{47}$$

Hier ist die linke Seite der Grenzwert der Folge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}. \tag{48}$$

Da $\sqrt{(2n+1)w_n} = 2^{2n}/\binom{2n}{n}$ ist, ergibt sich aus (47) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}} = 1. \tag{49}$$

Zum Beweis von (47) werden wir die Folge

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{50}$$

berechnen.

Hierzu zeigen wir zunächst eine Rekusionsformel mit Hilfe partieller Integration. Seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \cos^{n-1}(x)$ und $g(x) := \sin(x)$ gegeben. Dann gilt nach Satz 5.5 die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int \cos^n(x)\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx \\
&= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx \\
&\quad - (n-1)\int \cos^n(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx. \tag{51}$$

Aus (50) und (51) ergibt sich die Rekursionsformel

$$c_n = \frac{n-1}{n}\cdot c_{n-2}, \qquad c_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = 1. \tag{52}$$

Die Rekursionsformel (52) führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \\
c_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit (48) ergibt sich daraus wiederum

$$\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{2}{\pi}w_n. \tag{53}$$

Die behauptete Formel (47) folgt aus (53) und der Gleichung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1. \tag{54}$$

Zum Beweis von (54) verwenden wir $\cos^{2n}(x) \geq \cos^{2n+1}(x) \geq \cos^{2n+2}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0, \pi/2]$. Nach Gleichung (50) und Teil (ii) von Satz 3.1 folgt daraus $c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$ und daher $1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1$ ist, folgt daraus die Gleichung (54).

Beispiel 6.16. Seien a und b reelle Zahlen mit

$$b > \frac{a^2}{4}.$$

Wir beweisen die Formel

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x^2+2x+b} = \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b)& \\ - \frac{a}{2\sqrt{b-a^2/2}}\arctan\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{b-a^2/2}}\right).&\end{aligned} \tag{55}$$

Dazu berechenen wir

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x^2+2x+b} &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+a)dx}{x^2+ax+b} - \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x^2+ax+b} \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b) - \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x^2+ax+b}.\end{aligned}$$

Zur Berechnung des zweiten Summanden führen wir die Bezeichnung

$$A := \sqrt{b - \frac{a^2}{2}}$$

ein und verwenden das Substitutionsgesetz in Satz 5.6 mit der Variablentransformation $y = \phi(x) = \frac{x}{A} + \frac{a}{2A}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+ax+b} &= \int \frac{dx}{(x+a/2)^2+A^2} \\ &= \frac{1}{A}\int \frac{(1/A)\,dx}{(\frac{x}{A}+\frac{a}{2A})^2+1} \\ &= \frac{1}{A}\int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{1}{A}\arctan(y) \\ &= \frac{1}{A}\arctan\left(\frac{x+a/2}{A}\right).\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die gewünschte Gleichung (55).

Beispiel 6.17. Wir beweisen, dass π^2 eine irrationale Zahl ist. Der Beweis wurde von Ivan Morton Niven im Jahre 1947 gefunden (siehe [2, Seite 207]). Nehmen wir an, π^2 sei rational. Dann existieren natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, so dass

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

ist. Da die Folge $\pi a^n/n!$ gegen Null konvergiert für n gegen unendlich, existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Nun definieren wir das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Zahlen $c_0, c_1, \dots, c_{2n} \in \mathbb{Z}$ durch die Gleichung

$$f(x) := \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{2n} c_k x^k := \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n.$$

Dann sind die Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 0$ durch

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{k!}{n!}c_k, & \text{für } k = n, n+1, \dots, 2n, \\ 0, & \text{für } k > 2n \end{cases}$$

gegeben. Dies sind ganze Zahlen und, da $f(1-x) = f(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch die Ableitung $f^{(k)}(1)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine ganze Zahl. Nun definieren wir die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} F(x) &:= b^n\Big(\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) \pm \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\Big) \\ &= a^n f(x) - a^{n-1}bf''(x) \pm \cdots + (-1)^n b^n f^{(2n)}(x) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach dem oben gezeigten $F(0) \in \mathbb{Z}$ und $F(1) \in \mathbb{Z}$. Schliesslich definieren wir die Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $G'(x) = (F''(x) + \pi^2 F(x))\sin(\pi x) = \pi^2 a^n f(x)\sin(\pi x)$ und daher

$$A := \pi a^n \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\big(G(1) - G(0)\big) = F(1) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $0 \le f(x)\sin(\pi x) \le 1/n!$ ist für alle $x \in [0,1]$, und daher $0 < A \le \pi a^n/n! < 1$. Dieser Widerspruch zeigt, dass π^2 entgegen unserer ursprünglichen Annahme doch irrational sein muss.

7 Die L^p-Norm

Dieser Abschnitt führt die L^p-Norm auf dem Raum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall ein und beweist die Ungleichungen von Hölder und Minkowski. Zunächst sei daran erinnert, dass ein **normierter Vektorraum** ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ ist, welches aus einem Vektorraum X besteht und einer Funktion $X \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$, welche folgende Eigenschaften besitzt.

(N1) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) Für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(N3) Für alle $x, y \in X$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Jede solche Funktion auf einem Vektorraum X heisst **Norm** (oder **Normfunktion**) auf X. Eine Normfunktion $X \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ bestimmt eine Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mittels der Formel

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \text{für } x, y \in X. \tag{56}$$

Es folgt direkt aus den Axiomen für eine Normfunktion, dass diese Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die Axiome einer Abstandsfunktion erfüllt. Das heisst, sie hat folgende Eigenschaften.

(M1) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(M2) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Damit ist also jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ auch gleichzeitig ein metrischer Raum (X, d). Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heisst **Banachraum** wenn er bezüglich der durch (56) definierten Abstandsfunktion vollständig ist (das heisst, wenn jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert).

Im folgenden seien a und b zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Wir bezeichnen das kompakte Intervall mit den Randpunkten a und b mit

$$I := [a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\}.$$

Der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf I wird mit

$$\mathscr{C}(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ist stetig} \right\}$$

bezeichnet. Dies ist ein Vektorraum, da die Summe und das Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetig sind.

Wir wissen, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ihr Supremum annimmt und daher beschränkt ist. Dies führt uns zur Definition der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \le x \le b} |f(x)| \qquad \text{für } f \in \mathscr{C}(I). \tag{57}$$

Es folgt direkt aus der Definition dass die Funktion $\mathscr{C}(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \|f\|_\infty$ eine Norm ist. Der normierte Vektorraum $(\mathscr{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Satz 7.1. *$\mathscr{C}(I)$ ist ein Banachraum mit der Supremumsnorm* (57)*.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{C}(I)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dies bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine natüerliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n \ge n_0$ die Ungleichung $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ erfüllen. Da $|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty$ ist für alle $x \in I$, folgt daraus, dass für jedes $x \in I$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{R}}$ reeller Zahlen eine Cauchy-Folge ist. Da jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, existiert der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

für jedes $x \in I$. Diese Grenzwerte definieren eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass die Funktionenfolge $f_n : I \to \mathbb{R}$ gleichmässig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m \ge n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon/2. \tag{58}$$

Dann gilt für alle $x \in I$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n \ge n_0$ die Ungleichung $|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$. Mit $m \to \infty$ erhalten wir

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{59}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ und alle $x \in I$. Dies bedeutet genau, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f konvergiert. Da $f_n : I \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist, folgt daraus wiederum, dass die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig ist. Also ist $f \in \mathscr{C}(I)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass (58) gilt. Dann gilt auch (59) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ und alle $x \in I$. Betrachten wir jetzt das Supremum über alle $x \in I$, so erhalten wir die Ungleichung

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{60}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$. Das heisst, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f \in \mathscr{C}(I)$ konvergiert, und damit ist Satz 7.1 bewiesen. □

Im folgenden wählen wir eine reelle Zahl $p \geq 1$ und definieren die **L^p-Norm** einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{61}$$

Hier ist das Integral auf der rechten Seite das Riemannsche Integral der Funktion $I \to \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|^p$. Diese Funktion ist stetig und daher Riemann integrierbar nach Satz 2.11. Ihr Integral ist nichtnegativ nach Teil (ii) von Satz 3.1 und daher ist die rechte Seite in Gleichung (61) wohldefiniert. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, zu zeigen, dass es sich bei der Funktion $\mathscr{C}(I) \to \mathbb{R} : f \mapsto \|f\|_p$ um eine Norm handelt, das heisst, dass sie die Axiome (N1), (N2), und (N3) auf Seite 34 erfüllt. Dass die L^p-Norm das Axiom (N2) erfüllt, folgt direkt aus der Definition und Teil (i) von Satz 3.1. Dass sie auch das Axiom (N1) erfüllt, ergibt sich aus dem folgenden Lemma mit $g(x) := |f(x)|^p$.

Lemma 7.2. *Sei $g : I \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Dann gilt $g(x) = 0$ für alle $x \in I$.*

Proof. Wir definieren die Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_a^x g(t)\,dt \qquad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Nach Satz 5.1 ist G dann stetig differenzierbar und es gilt

$$G'(x) = g(x) \geq 0$$

für alle $x \in I$. Daraus folgt nach dem Mittelwertsatz, dass G monoton wachsend ist. Insbesondere gilt daher

$$G(a) \leq G(x) \leq G(b) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

Ausserdem gilt

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = \int_a^b g(t)\,dt = 0.$$

Daraus folgt $G(x) = 0$ für alle $x \in I$ und daher gilt auch $g(x) = G'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Damit ist Lemma 7.2 bewiesen. □

Wir haben also gezeigt, dass die L^p-Norm auf $\mathscr{C}(I)$ die Axiome (N1) und (N2) erfüllt. Dass sie auch die Dreiecksungleichung erfüllt, ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 7.3 (Minkowski-Ungleichung). *Sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{62}$$

für alle $f, g \in \mathscr{C}(I)$.

Für $p = 1$ folgt die Minkowski-Ungleichung (62) direkt aus der Definition (zusammen mit Satz 3.1 und der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion auf den reellen Zahlen). Für $p > 1$ benötigen wir zur Vorbereitung des Beweises die Hölder-Ungleichung. Diese wiederum basiert auf **Young's Ungleichung**, welche besagt dass, wenn $p, q > 1$ reelle Zahlen sind mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{63}$$

dann gilt die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \tag{64}$$

für alle $a, b > 0$.

Satz 7.4 (Hölder-Ungleichung). *Sei $p > 1$ eine reelle Zahl und sei $q > 1$ so gewählt, dass* (63) *gilt. Dann gilt die Ungleichung*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{65}$$

für alle $f, g \in \mathscr{C}(I)$.

Beweis. Seien $f, g \in \mathscr{C}(I)$. Wenn eine der beiden Funktionen identisch verschwindet, so sind beide Seiten der Ungleichung (65) gleich Null. Wir können also annehmen, dass f und g beide nicht identisch verschwinden. Nach Lemma 7.2 gilt dann $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$. Dann folgt aus der Young'schen Ungleichung (64) und Satz 3.1, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, dx &\leq \int_a^b \left(\frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \frac{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_a^b |g(x)|^q \, dx}{\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 7.4 bewiesen. □

Beweis von Satz 7.3. Unter Verwendung von Satz 3.1, der Hölder-Ungleichung (65) und der Identität $q = p/(p-1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p \, dx \\ &\le \int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx \\ &\le \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, dx\right)^{1/q} \\ &= \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\|f+g\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Damit ist Satz 7.3 bewiesen. □

Bemerkung 7.5. Mit Satz 7.3 ist gezeigt, dass $(\mathscr{C}(I), \|\cdot\|_p)$ für jedes $p \ge 1$ ein normierter Vektorraum ist. Im Gegensatz zum Fall $p = \infty$ (Satz 7.1) ist dies jedoch kein Banachraum, wie das folgende Beispiel zeigt.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n : I := [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \le x \le 1/2 - 1/n, \\ nx + 1 - n/2, & \text{für } 1/2 - 1/n \le x \le 1/2, \\ 1, & \text{für } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Dies ist eine Cauchy-Folge in $\mathscr{C}(I)$ bezüglich der Norm (61) für jedes $p \ge 1$. Jedoch konvergiert diese Folge nicht in $\mathscr{C}(I)$, da ihr *punktweiser Grenzwert* unstetig ist. Dieser punktweise Grenzwert ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) := 0$ für $0 \le x < 1/2$ und $f(x) := 1$ für $1/2 \le x \le 1$ gegeben ist.

Bemerkung 7.6. Auf dem Vektorraum $\mathscr{C}(I)$ definiert die Formel

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad \text{für } f, g \in \mathscr{C}(I)$$

ein inneres Produkt und es gilt $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Für $p = 2$ ist die Hölder-Ungleichung (65) dann die Cauchy–Schwarz Ungleichung.

Bemerkung 7.7. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p \ge 1$ definieren wir $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|_p$ eine Norm. Der Beweis der Dreiecksungleichung ist analog zum Beweis der Minkowski-Ungleichung (62) für Integrale. Man ersetzt überall das Integral durch die entsprechende Summe und verwendet die Hölder-Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$. Diese lässt sich wiederum mit dem gleichen Argument wie in Satz 7.4 beweisen.

8 Uneigentliche Integrale

Es ist oft nützlich, eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ über das gesamte Intervall zu integrieren, selbst wenn das Intervall unbeschränkt ist, beziehungsweise wenn das Intervall beschränkt, die Funktion aber unbeschränkt ist. In diesem Fall sprechen wir von einem *uneigentlichen (Riemannschen) Integral*.

Definition 8.1 (Uneigentliches Integral). *Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ gegeben und sei*

$$I := (a, b) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\}$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst **lokal Riemann integrierbar***, wenn ihre Einschränkung auf jedes kompakte Intervall $K \subset I$ Riemann integrierbar ist. Eine lokal Riemann integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst* **uneigentlich Riemann integrierbar** *wenn es eine reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt, die folgende Bedingung erfüllt.*

> *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Zahlen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $a < a_0 < b_0 < b$, so dass alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $a < \alpha < a_0 < b_0 < \beta < b$ die Ungleichung*
>
> $$\left| A - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| < \varepsilon \tag{66}$$
>
> *erfüllen.*

Die Zahl A, wenn sie existiert, ist eindeutig durch diese Bedingung bestimmt. Sie wird das **uneigentliche Integral** *von f über I genannt und mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx := A = \lim_{\substack{\alpha \searrow a \\ \beta \nearrow b}} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{67}$$

bezeichnet.

Der Beweis, dass die Zahl A (wenn sie existiert) durch die Bedingung (66) eindeutig bestimmt ist, ergibt sich aus dem gleichen Argument mit dem die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge bewiesen wird. Die Besipiele uneigentlich Riemann integrierbarer Funktionen, die wir im folgenden betrachten, sind alle stetig und es geht entweder um das Integral einer beschränkten Funktion über einem unbeschränkten Intervall oder um das Integral einer unbeschränkten Funktion über einem beschränkten Intervall.

Beispiel 8.2. Sei $s > 0$ eine reelle Zahl und sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := x^{-s}$. Diese Funktion ist für keinen Wert von s uneigentlich Riemann integrierbar. Es ist jedoch auch interessant, diese Funktion auf den halboffenen Teilintervallen $(0, 1]$ und $[1, \infty)$ zu betrachten. Für $s \neq 1$ ist die Funktion $F(x) := x^{1-s}/(1 - s)$ eine Stammfunktion von f, das heisst

$$\int \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} \qquad \text{für } x > 0.$$

Im Fall $0 < s < 1$ folgt daraus

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s} \qquad \text{für } s < 1. \tag{68}$$

Die gleiche Rechnung zeigt, dass die Funktion $f|_{(0,1]}$ für $s > 1$ nicht uneigentlich integrierbar ist. Im Fall $s > 1$ erhalten wir

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{R \nearrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^s} = \lim_{R \nearrow \infty} \frac{R^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{1}{s-1} \qquad \text{für } s > 1. \tag{69}$$

Hier zeigt die Rechnung, dass die Funktion $f|_{[1,\infty)}$ für $s < 1$ nicht uneigentlich integrierbar ist. Für $s = 1$ ist die Funktion $f(x) = 1/x$ auf keinem der beiden Intervalle $(0, 1]$ und $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar.

Beispiel 8.3. Die durch $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist uneigentlich integrierbar und es gilt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \tag{70}$$

Zum Beweis verwenden wir die Tatsache, dass $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist (siehe Beispiel 6.3). Daraus folgt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \nearrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \nearrow \infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \nearrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} = - \lim_{R \nearrow \infty} \arctan(-R) = \frac{\pi}{2},$$

und damit ist (70) bewiesen.

Beispiel 8.4. Sei $c > 0$. Dann ist die durch $f(t) := e^{-ct}$ definierte Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar und es gilt

$$\int_0^\infty e^{-ct}\, dt = \lim_{R \nearrow \infty} \int_0^R e^{-ct}\, dt = \lim_{R \nearrow \infty} \frac{1 - e^{-cR}}{c} = \frac{1}{c}. \tag{71}$$

Beispiel 8.5 (Die Γ-Funktion). Für jede reelle Zahl $x > 0$ ist die Funktion

$$(0, \infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$$

uneigentlich integrierbar. Dass sie auf dem Intervall $(0, 1]$ uneigentlich integrierbar ist folgt aus Beispiel 8.2 und dass sie auf dem Intervall $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist folgt aus Beispiel 8.4 mit $c = 1/2$ und der Tatsache, dass die Funktion $t \mapsto t^{x-1} e^{-t/2}$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ beschränkt ist. Das uneigentliche Integral bezeichnen wir mit

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{72}$$

Die daraus resultierende Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$ wird **Gamma-Funktion** genannt und sie spielt eine wichtige Rolle in verschiedenen Gebieten der Mathematik.

Satz 8.6 (Bohr–Mollerup). (i) *Die Gamma-Funktion erfüllt die Gleichungen*

$$\Gamma(1) = 1 \tag{73}$$

und

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \qquad \text{für alle } x > 0, \tag{74}$$

und sie ist **logarithmisch konvex**, *das heisst, sie erfüllt die Ungleichung*

$$\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda} \tag{75}$$

für alle $x, y > 0$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$.

(ii) *Die Gamma-Funktion ist die einzige logarithmisch konvexe Funktion von $(0, \infty)$ nach $(0, \infty)$, die (73) und (74) erfüllt. Darüber hinaus gilt*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x + 1) \cdots (x + n)} \tag{76}$$

für alle $x > 0$.

Beweis. Wir beweisen Teil (i). Die Gleichung $\Gamma(1) = 1$ folgt aus Beispiel 8.4. Nun sei $x > 0$. Dann folgt aus Satz 5.5 mit $f(t) := t^x$ und $g(t) := -e^{-t}$ die Gleichung

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\, dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - R^x e^{-R} + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

für $R > \varepsilon > 0$. Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ ergibt sich daraus die Gleichung

$$\Gamma(x+1) = \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\, dt = \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

Damit ist gezeigt, dass die Gamma-Funktion die Gleichungen (73) und (74) erfüllt. Der Beweis von (75) beruht auf der Hölder-Ungleichung (65) mit

$$p := \frac{1}{\lambda}, \qquad q := \frac{1}{1-\lambda}$$

und

$$f(t) := t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t}, \qquad g(t) := t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^R t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\, dt &= \int_\varepsilon^R f(t) g(t)\, dt \\
&\le \left(\int_\varepsilon^R f(t)^p\, dt \right)^{1/p} \left(\int_\varepsilon^R g(t)^q\, dt \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt \right)^{\lambda} \left(\int_\varepsilon^R t^{y-1} e^{-t}\, dt\, dt \right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ ergibt sich daraus die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \int_\varepsilon^R t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\, dt \\
&\le \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \left(\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt \right)^{\lambda} \left(\int_\varepsilon^R t^{y-1} e^{-t}\, dt\, dt \right)^{1-\lambda} \\
&= \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Damit ist Teil (i) bewiesen.

Teil (ii) ist der Satz von Bohr-Mollerup und wurde im Jahre 1922 bewiesen. Wir nehmen an, dass $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine logarithmisch konvexe Funktion ist, die die Gleichungen

$$F(1) = 1, \qquad F(x+1) = xF(x) \tag{77}$$

für alle $x > 0$ erfüllt. Daraus folgt durch vollständige Induktion die Gleichung

$$F(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)F(x) \tag{78}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 0$. Mit $x = 1$ ergibt sich

$$F(n+1) = n! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{79}$$

Nun sei $0 < x \leq 1$. Dann folgt aus der logarithmischen Konvexität von F und aus (79), dass F für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} F(n+x) &= F(x(n+1) + (1-x)n) \\ &\leq F(n+1)^x F(n)^{1-x} \\ &= n!^x (n-1)!^{1-x} \\ &= n! n^{x-1}, \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} n! &= F(n+1) \\ &= F(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \\ &\leq F(n+x)^x F(n+1+x)^{1-x} \\ &= F(n+x)^x (n+x)^{1-x} F(n+x)^{1-x} \\ &= F(n+x)(n+x)^{1-x} \end{aligned} \tag{81}$$

erfüllt. Die Ungleichungen (80) und (81) lassen sich in der Form

$$\frac{n!(n+x)^x}{n+x} \leq F(n+x) \leq \frac{n! n^x}{n} \tag{82}$$

für $0 < x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben. Mit (78) folgt daraus

$$\frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \left(\frac{n+x}{n}\right)^x \leq F(x) \leq \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{n+x}{n}$$

und daher

$$F(x) \frac{n}{n+x} \leq \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq F(x) \left(\frac{n}{n+x}\right)^x. \tag{83}$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich die Gleichung

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{84}$$

für $0 < x \le 1$. Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, dass diese Gleichung für alle $x > 0$ gilt. Sei alse $n \in \mathbb{N}$ und nehmen wir an, dass die Gleichung (84) für $n-1 < x \le n$ gilt. Dann folgt aus (77) die Gleichung

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= xF(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \frac{x+n+1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1+n)}
\end{aligned}$$

für $n-1 < x \le n$ und daher gilt (84) für $n < x \le n+1$. Damit haben wir gezeigt, dass es jede logarithmisch konvexe Funktion $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$, die (77) erfüllt, für jedes $x > 0$ durch die Formel (84) gegeben ist. Nach Teil (i) gilt dies für die Gamma-Funktion und damit ist Satz 8.6 bewiesen. □

Übung 8.7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann ist jede konvexe Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Insbesondere lässt sich dieses Resultat auf die Funktion $f := \log\circ\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ anwenden, die aufgrund der logarithmischen Konvexität von Γ konvex ist. Daher ist die Gamma-Funktion stetig.

Hinweis: Sei $x_0 \in I$ und $\delta > 0$ mit $x_0 \pm \delta \in I$ und $c^\pm := \frac{f(x_0\pm\delta)-f(x_0)}{\pm\delta}$. Dann gilt $c^-(x-x_0) \le f(x) - f(x_0) \le c^+(x-x_0)$ für $x_0 \le x \le x_0+\delta$ und ebenso $c^+(x-x_0) \le f(x)-f(x_0) \le c^-(x-x_0)$ für $x_0 - \delta \le x \le x_0$.

Satz 8.8 (Das Eulersche Sinusprodukt). *Für jede von Null verschiedene reelle Zahl $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt*

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right). \tag{85}$$

Hier ist das unendliche Produkt auf der rechten Seite der Gleichung als der Grenzwert der Folge $\prod_{k=1}^n (1 - x^2/k^2)$ für $n \to \infty$ zu verstehen.

Beweis. Siehe Königsberger [2, Seite 329]. □

Korollar 8.9. *Für* $0 < x < 1$ *gilt*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{86}$$

Insbesondere ist $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Nach Satz 8.6 gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{n!n^{1-x}}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)} \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(1+x)(1-x)\cdots(n+x)(n-x)} \frac{n}{n+1-x} \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \frac{1^2\cdot 2^2\cdots n^2}{(1^2-x^2)(2^2-x^2)\cdots(n^2-x^2)} \\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-x^2/k^2} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.
\end{aligned}$$

Hier folgt der letzte Schritt aus Satz 8.8. □

Korollar 8.10. *Die Funktion* $\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$ *ist uneigentlich integrierbar und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{87}$$

Beweis. Wir verwenden Satz 5.6 mit der Substitution

$$x := \phi(t) := \sqrt{t}, \qquad \phi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \text{für } t > 0.$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx &= 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt \\
&= \Gamma(1/2) \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Hier folgt der letzte Schritt aus Korollar 8.9. □

9 Faltung und Approximation

Definition 9.1. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat* **kompakten Träger** *wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}\setminus K$. Nun seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Riemann integrierbare Funktionen (siehe Definition 8.1), so dass eine von ihnen kompakten Träger hat. Die* **Faltung** *von f und g ist die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch die Formel*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{88}$$

definiert ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist das Integral auf der rechten Seite in (88) *wohldefiniert, da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)g(x-t)$ lokal Riemann integrierbar ist (nach Teil (v) von Satz 3.1) und kompakten Träger hat.*

Bemerkung 9.2. Sind $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Riemann integrierbare Funktionen, so dass f kompakten Träger hat oder g und h beide kompakten Träger haben, so gilt

$$f * g = g * f \tag{89}$$

und

$$f * (g + h) = f * g + f * h, \qquad f * (\lambda g) = \lambda(f * g) \tag{90}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Gleichungen in (90) folgen direkt aus Teil (i) von Satz 3.1. Zum Beweis von (89) benötigt man Teil (i) und (ii) von Korollar 5.7; diese Aussagen gelten auch für lokal Riemann integrierbare Funktionen (und nicht nur für stetige Funktionen).

Definition 9.3. *Eine* **Dirac-Folge** *ist eine Folge lokal Riemann integrierbarer Funktionen*

$$\delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit kompaktem Träger, so dass

$$\delta_k(x) \geq 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R}, \tag{91}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(x)\,dx = 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \tag{92}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{-r} \delta_k(x)\,dx + \int_{r}^{\infty} \delta_k(x)\,dx \right) = 0 \qquad \text{für alle } r > 0. \tag{93}$$

Beispiel 9.4. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$\delta_k(x) := \begin{cases} k/2, & \text{falls } |x| \leq 1/k, \\ 0, & \text{falls } |x| > 1/k. \end{cases}$$

Dies ist eine Dirac-Folge, und für jede lokal Riemann integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ ist der Wert der Faltung $f * \delta_k$ and der Stelle x der Mittelwert der Funktion f auf dem Intervall $[x-1/k, x+1/k]$, das heisst

$$(f * \delta_k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_k(x-t)\,dt = \frac{k}{2}\int_{x-1/k}^{x+1/k} f(t)\,dt.$$

Beispiel 9.5. Für $k \in \mathbb{N}$ ist der **Landau-Kern** $L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$L_k(x) := \begin{cases} (1-x^2)^k/c_k, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{falls } |x| > 1, \end{cases} \qquad c_k := \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k\,dx. \tag{94}$$

Dies ist eine Dirac-Folge. Dass sie (91) und (92) erfüllt, folgt direkt aus der Definition. Zum Beweis von (93) betrachten wir zunächst die Ungleichung

$$\begin{aligned} c_k &= 2\int_0^1 (1-x^2)^k\,dx \\ &\geq 2\int_0^1 (1-x)^k\,dx \\ &= 2\int_0^1 x^k\,dx \\ &= \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Nun sei $r > 0$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-r} L_k(x)\,dx + \int_r^1 L_k(x)\,dx &\leq 2\sup_{r\leq|x|\leq 1} L_k(x) \\ &= \frac{2(1-r^2)^k}{c_k} \\ &\leq (k+1)(1-r^2)^k. \end{aligned}$$

Diese Folge konvergiert gegen Null und damit erfüllen die Landau-Kerne die Bedingung (93).

Im folgenden Satz wird die Stetigkeit von f in der ersten Aussage nicht benötigt. Mit anderen Worten, die Faltung zweier lokal Riemann integrierbarer Funktionen, einer davon mit kompaktem Träger, ist immer eine stetige Funktion. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch erheblich komplizierter als der unten gegebene Beweis von Teil (i) in Satz 9.6 und wird hier nicht erbracht. Ein Beweis im Kontext des Lebesgue-Integrals findet sich in [3, Thm 7.35].

Satz 9.6. *Sei $\delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Dirac-Folge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann gilt folgendes.*

(i) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f * \delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.*

(ii) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (f * \delta_k)(x).$$

(iii) *Ist f gleichmässig stetig, so konvergiert die Funktionen-Folge $f * \delta_k$ gleichmässig gegen f.*

Beweis. Wir beweisen Teil (i). Sei $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Da δ_k kompakten Träger hat und beschränkt ist, existieren reelle Zahlen a, b, c mis $a < b$ und $c > 0$ so dass $\delta_k(x) = 0$ ist für alla $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ und $|\delta_k(x)| \leq c$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da die Funktion f auf dem kompakten Intervall $[x_0 - b, x_0 - a]$ gleichmässig stetig ist, existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass, für alle $h \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$|h| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{x_0 - b \leq x \leq x_0 - a} |f(x+h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)c}.$$

Dann gilt für jedes $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(f * \delta_k)(x_0 + h) - (f * \delta_k)(x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x_0 + h - t) - f(x_0 - t)\big)\delta_k(t)\, dt \right| \\
&\leq c \int_a^b |f(x_0 + h - t) - f(x_0 - t)|\, dt \\
&\leq c(b-a) \sup_{a \leq t \leq b} |f(x_0 + h - t) - f(x_0 - t)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist Teil (i) bewiesen.

Wir beweisen Teil (ii). Sei

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|(f * \delta_k)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x-t) - f(x)\big)\delta_k(t)\,dt \right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\,\delta_k(t)\,dt \\
&= \int_{-r}^{r} |f(x-t) - f(x)|\,\delta_k(t)\,dt \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-r} |f(x-t) - f(x)|\,\delta_k(t)\,dt \\
&\quad + \int_{r}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\,\delta_k(t)\,dt \\
&\le \sup_{|t|\le r} |f(x-t) - f(x)| \\
&\quad + 2\,\|f\| \left(\int_{-\infty}^{-r} \delta_k(t)\,dt + \int_{r}^{\infty} \delta_k(t)\,dt \right).
\end{aligned} \tag{95}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Da f an der Stelle x stetig ist, existiert eine Zahl $r > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|t| \le r \qquad \Longrightarrow |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sodann existiert nach (93) eine Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$k \ge k_0 \qquad \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-r} \delta_k(t)\,dt + \int_{r}^{\infty} \delta_k(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|}.$$

Mit dieser Wahl von k_0 folgt aus (95) die Ungleichung

$$|(f * \delta_k)(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$. Damit ist Teil (ii) bewiesen.

Ist f gleichmässig stetig, so können wir in dem Argument zum Beweis von Teil (ii) die Zahl $r > 0$, und daher auch die Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$, unabhängig von x wählen. Dies bedeutet, dass in dem Fall die Folge $f * \delta_k$ gleichmässig gegen f konvergiert. Damit ist auch Teil (iii) von Satz 9.6 bewiesen. □

Der Approximationssatz von Weierstrass besagt dass sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmässig durch eine Folge von Polynomen approximieren lässt.

Satz 9.7 (Weierstrass). *Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$ und sei*

$$f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann existiert eine Folge von Polynomen

$$f_k : I \to \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

die gleichmässig gegen f konvergiert, das heisst

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Beweis. Der Beweis hat drei Schritte.

Schritt 1. *Die Aussage des Satzes gilt unter der Voraussetzung*

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad f(0) = f(1) = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung können wir f mittels der Formel

$$f(x) := 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$$

zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen (die wir immer noch mit f bezeichnen). Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Nach Satz 9.6 konvergiert daher die Funktionen-Folge

$$f_k := f * L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

(mit $L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Beispiel 9.5) gleichmässig gegen f. Ausserdem gilt für alle $x \in [0, 1]$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \int_0^1 f(t) L_k(x - t)\, dt \\ &= \frac{1}{c_k} \int_0^1 f(t)(1 - (x - t)^2)^k\, dt \\ &= \frac{1}{c_k} \int_0^1 f(t)(1 - t^2 + 2xt - x^2)^k\, dt. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$(1-t^2+2xt-x^2)^k = p_0(t) + p_1(t)x + p_2(t)x^2 + \cdot + p_{2k}(t)x^{2k},$$

wobei $p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, 2k$ ein Polynom vom Grade $2k - j$ ist. Zum Beispiel ist $p_0(t) = (1-t^2)^k$ und $p_1(t) = 2kt(1-t^2)^{k-1}$. Die genaue Formel für $p_j(t)$ wird jedoch nicht benötigt. Wir erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{1}{c_k}\int_0^1 f(t)(1-t^2+2xt-x^2)^k\,dt \\ &= \frac{1}{c_k}\int_0^1 f(t)\sum_{j=0}^{2k} p_j(t)x^j\,dt \\ &= \sum_{j=0}^{2k}\left(\frac{1}{c_k}\int_0^1 f(t)p_j(t)\,dt\right)x^j \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $0 \le x \le 1$. Also ist $f_k|_{[0,1]}$ ein Polynom (vom Grade kleiner oder gleich $2k$) für jedes $k \in \mathbb{N}$ und damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Die Aussage des Satzes gilt unter der Voraussetzung*

$$a = 0, \qquad b = 1.$$

Wir definieren die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - (1-x)f(0) - xf(1) \qquad \text{für } 0 \le x \le 1.$$

Dann ist g stetig und es gilt $g(0) = g(1) = 0$. Nach Schritt 1 existiert daher eine Folge von Polynomen $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ die gleichmässig gegen g konvergiert. Für $k \in \mathbb{N}$ ist dann die durch

$$f_k(x) := g_k(x) + (1-x)f(0) + xf(1) \qquad \text{für } 0 \le x \le 1$$

definierte Funktion $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Polynom, und die Folge f_k konvergiert gleichmässig gegen f. Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *Die Aussage des Satzes gilt im allgemeinen.*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(a + t(b-a))$ für $0 \le t \le 1$ gegeben. Dann ist g stetig und daher existiert nach Schritt 2 eine Folge von Polynomen $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Gleichmässig gegen g konvergiert. Für $k \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $f_k(x) := g_k((x-a)/(b-a))$ für $a \le x \le b$ definiert. Dann ist f_k ein Polynom für jedes $k \in \mathbb{N}$ und die Folge f_k konvergiert gleichmässig gegen f. Damit ist Satz 9.7 bewiesen. □

Literatur

[1] W.F. Eberlein, Notes on integration I: The underlying convergence theorem. *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 357–360.

[2] K. Königsberger, *Analysis I*. Springer-Verlag, 2003.

[3] D.A. Salamon, *Measure and Integration*. EMS, Textbooks in Mathematics, 2016. `https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/measure.pdf`