Analysis I (HS 2016): SUMMIERBARE FAMILIEN

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

26. Oktober 2016

Zusammenfassung

Dieses Manuskript enthält eine Einführung in den Begriff einer summierbaren Familie reeller oder komplexer Zahlen für Studierende des ersten Semesters in der Mathematik, der Physik, und den Ingenieurswissenschaften an der ETH. Als Vorbereitung behandelt Kapitel 1 zunächst den Produktreihensatz und Kapitel 2 führt die Exponentialfunktion ein und leitet ihre grundlegenden Eigenschaften her. Zu deren Verständnis werden die anderen drei Kapitel nicht benötigt. Im Kapitel 3 wird der Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen bewiesen. Der Begriff einer summierbaren Familie reeller oder komplexer Zahlen wird in Kapitel 4 eingeführt. Der *grosse Umordnungssatz* ist der Inhalt von Kapitel 5. Mit dessen Hilfe wird der Produktreihensatz am Schluss des Manuskriptes nochmals bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Der Produktreihensatz

Satz 1.1 (Produktreihe). *Seien* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Für* $k \in \mathbb{N}_0$ *definiere die komplexe Zahl* $c_k \in \mathbb{C}$ *durch*

$$c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}. \tag{1}$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \tag{2}$$

Beweis. Wir bezeichnen $\alpha := \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ und $\beta := \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$. Aufgrund der absoluten Summierbarkeit der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind diese Zahlen endlich (das heisst, sie sind wohldefiniert als reelle Grenzwerte der Folgen der Partialsummen). Ausserdem gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |c_k| &= \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} |a_i| \, |b_{k-i}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \sum_{j=0}^{n} |b_j| \\
&\leq \alpha\beta
\end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut. Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert ihrer Partialsummen tatsächlich durch (2) gegeben ist. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad B_n := \sum_{j=0}^{n} b_j, \qquad C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$$

für $n \in \mathbb{N}$ und

$$A := \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} A_n, \quad B := \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \lim_{n\to\infty} B_n, \quad C := \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Dann gilt

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$$

und

$$A_n B_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \right) = \sum_{i,j \leq n} a_i b_j .$$

Hier is die rechte Seite der ersten Gleichung als Summe über der endlichen Menge $\{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, i+j \leq n\}$, und die der zweiten Gleichung als Summe über der endlichen Menge $\{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, i \leq n \text{ und } j \leq n\}$ zu verstehen. Derartige Summen werden in den Kapiteln 3 und 4 noch ausführlicher diskutiert. Aus diesen beiden Formeln ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
|A_n B_n - C_n| &= \left| \sum_{i,j \leq n} a_i b_j - \sum_{i+j \leq n} a_i b_j \right| \\
&= \left| \sum_{i,j \leq n,\, i+j > n} a_i b_j \right| \\
&\leq \sum_{i,j \leq n,\, i+j > n} |a_i| \, |a_j| \\
&= \sum_{i,j \leq n} |a_i| \, |a_j| - \sum_{i+j \leq n} |a_i| \, |a_j| \\
&\leq \sum_{i,j \leq n} |a_i| \, |a_j| - \sum_{i,j \leq n/2} |a_i| \, |a_j| \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) - \left(\sum_{i=0}^{[n/2]} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{[n/2]} n \, |b_j| \right) \\
&= \alpha_n \beta_n - \alpha_{[n/2]} \beta_{[n/2]} .
\end{aligned}$$

Hier verwenden wir die Bezeichnung $\alpha_n := \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ und $\beta_n := \sum_{j=0}^{n} |b_j|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, konvergiert die Folge $(\alpha_n \beta_n - \alpha_{[n/2]} \beta_{[n/2]})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null und daraus folgt $\lim_{n\to\infty} |A_n B_n - C_n| = 0$. Also gilt

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n B_n = \left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) \left(\lim_{n\to\infty} B_n \right) = AB$$

und damit ist Satz 1.1 bewiesen. $\square$

Der Produktreihensatz 1.1 zeigt, dass man mit absolut konvergenten Reihen genau wie mit reellen und komplexen Zahlen rechnen kann. Insbesondere zeigt er, dass das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz auf ganz natürliche Weise für unendliche Summen ihre Gültigkeit behalten, solange absolute Konvergenz vorliegt. Besonders wichtige Anwendungen ergeben sich beim Rechnen mit Potenzreihen.

Korollar 1.2. *Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ und positiven Konvergenzradien*

$$\rho_f = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} > 0, \qquad \rho_g = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n}} > 0.$$

Sei $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die Potenzreihe mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann hat h einen positiven Konvergenzradius $\rho_h \geq \min\{\rho_f, \rho_g\} > 0$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{\rho_f, \rho_g\}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right). \tag{3}$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.1, da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ für $|z| < \min\{\rho_f, \rho_g\}$ absolut konvergieren. □

2 Die Exponentialabbildung

Die Potenzreihe

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

konvergiert absolut für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$. Dies folgt am einfachsten aus dem Quotientenkriterium, da die Folge

$$\frac{|z^{n+1}/(n+1)!|}{|z^n/n!|} = \frac{|z|}{n+1}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ gegen Null konvergiert. Damit ist Ihr Konvergenzradius

$$\rho := \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty.$$

(Übung: Beweisen Sie dies auf direktem Wege.) Die aus der Formel (4) resultierende Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z)$ heisst **Exponentialabbildung**.

Satz 2.1. *Die Exponentialabbildung erfüllt die Gleichungen*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \qquad \exp(0) = 1, \qquad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die Gleichungen $\exp(0) = 1$ und $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ folgen direkt aus der Definition. Die Formel $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ folgt aus dem Produktreihensatz 1.1 und der Binomialformel:

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \exp(z+w)
\end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.1 bewiesen. □

Korollar 2.2. *Für* $\theta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$|\exp(\mathbf{i}\theta)| = 1.$$

Beweis. Nach Satz 2.1 gilt

$$|\exp(\mathbf{i}\theta)|^2 = \overline{\exp(\mathbf{i}\theta)}\exp(\mathbf{i}\theta) = \exp(-\mathbf{i}\theta)\exp(\mathbf{i}\theta) = \exp(0) = 1.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. □

Wir definieren die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\cos(\theta) := \mathrm{Re}(\exp(\mathbf{i}\theta))$ und $\sin(\theta) := \mathrm{Im}(\exp(\mathbf{i}\theta))$. Damit gilt für alle $\theta \in \mathbb{R}$ die **Eulersche Formel**

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta). \tag{5}$$

Korollar 2.3. *Die Funktionen Cosinus und Sinus erfüllen die Gleichungen*

$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0, \tag{6}$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \tag{7}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta'), \\ \sin(\theta + \theta') &= \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \end{aligned} \tag{9}$$

für alle $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dies folgt aus der Eulerschen Gleichung (5), Satz 2.1 und Korollar 2.2. Gleichung (6) ist äquivalent zu

$$e^0 = 1,$$

Gleichung (7) ist äquivalent zu

$$\left|e^{\mathbf{i}\theta}\right| = 1,$$

Gleichung (8) ist äquivalent zu

$$e^{-\mathbf{i}\theta} = \overline{e^{\mathbf{i}\theta}}$$

und Gleichung (9) ist äquivalent zu

$$e^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\theta'}.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. □

Bemerkung 2.4. Es folgt sofort aus der Definition, dass

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \mp \cdots, \tag{10}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \mp \cdots. \tag{11}$$

Diese Formeln können auch zur Definition von $\cos(\theta)$ und $\sin(\theta)$ für jede komplexe Zahl θ verwendet werden. **Übung:** Die Gleichungen (7), (8) und (9) gelten für alle $\theta, \theta' \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 2.5. Die reelle Zahl

$$e := \exp(1)$$

hat den Wert

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

(Dies sind die ersten 50 Stellen nach dem Dezimalpunkt.)

Bemerkung 2.6 (**Hyperbolischer Cosinus und Sinus).**
(i) Der **hyperbolische Cosinus und Sinus** sind die durch

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \tag{12}$$

und

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{13}$$

für $z \in \mathbb{C}$ definierten Funktionen. Diese Reihen haben beide den Konvergenzradius $\rho = \infty$.
(ii) Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

erfüllen die Gleichungen

$$\cosh(0) = 1, \qquad \sinh(0) = 0, \tag{14}$$

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1, \tag{15}$$

$$\cosh(-z) = \cosh(z), \qquad \sinh(-z) = -\sinh(z), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w), \\ \sinh(z+w) &= \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w) \end{aligned} \tag{17}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. (**Übung:** Beweisen Sie diese Formeln.)
(iii) Der Cosinus und der Sinus stehen zum hyperbolischen Cosinus und Sinus in der Beziehung

$$\cos(\theta) = \cosh(\mathbf{i}\theta), \qquad \mathbf{i}\sin(\theta) = \sinh(\mathbf{i}\theta)$$

für $\theta \in \mathbb{R}$.

3 Der Umordnungssatz

In diesem Kapitel ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Es sei daran erinnert, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent** genannt wird, wenn die Folge $r_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ der Partialsummen der Absolutbeträge konvergiert. Im folgenden benötigen wir den Ausdruck $\sum_{j\in J} a_j$ für eine endliche Menge J und eine Abbildung $J \to \mathbb{C} : j \mapsto a_j$. Dazu wählen wir eine bijektive Abbildung $\phi : \{1,\ldots,n\} \to J$ und definieren

$$\sum_{j\in J} a_j := a_{\phi(1)} + \cdots + a_{\phi(n)}.$$

Man kann mit Hilfe der Körperaxiome und durch vollständige Induktion über n zeigen, dass die rechte Seite dieser Gleichung nicht von der Wahl der Bijektion ϕ abhängt. Die Details bleiben dem Leser als Übung überlassen.

Satz 3.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.*

(ii) *Für jede bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)}$.*

(iii) *Es existiert eine komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$, die folgende Bedingung erfüllt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass jede endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$ mit $\{1,\ldots,n_0\} \subset J$ die Ungleichung $|\sum_{j\in J} a_j - s| < \varepsilon$ erfüllt.*

Wenn diese drei äquivalenten Bedingungen erfüllt sind so nennen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **absolut summierbar***. Für jede absolut summierbare Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und jede bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt die Gleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Wir zeigen (i) $\Longrightarrow$ (iii). Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$r_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \qquad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert ist die Folge r_n nach oben beschränkt. Ausserdem ist sie monoton wachsend und konvergiert daher gegen die reelle Zahl

$$r := \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n = \lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$r_{n_0} > r - \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq n_0$, dass

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = r_n - r_m \leq r - r_{n_0} < \varepsilon.$$

Also ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und konvergiert daher. Ihren Grenzwert bezeichnen wir mit

$$s := \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wir zeigen nun, dass diese Zahl s die Bedingung (iii) erfüllt. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $r_{n_0} > r - \varepsilon/2$. Dann gilt $r_n - r_{n_0} < \varepsilon/2$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$. Sei nun $J \subset \mathbb{N}$ eine endlich Teilmenge so dass $\{1, \dots, n_0\} \subset J$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq j$ für alle $j \in J$. Dann gilt

$$\left| s_n - \sum_{j \in J} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j \in J} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j=1}^{n_0} |a_j| = r_n - r_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $n \to \infty$ ergibt sich die Ungleichung $|s_n - \sum_{j \in J} a_j| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Damit ist gezeigt, dass s die Bedingung (iii) erfüllt.

Wir zeigen (iii) $\implies$ (ii). Sei also s wie in (iii) und sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Wir zeigen, dass die Folge $p_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen s konvergiert. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in (iii). Definiere

$$N_0 := \max_{1 \leq \ell \leq n_0} \phi^{-1}(\ell).$$

Dann gilt $\{\phi^{-1}(1), \dots, \phi^{-1}(n_0)\} \subset \{1, \dots, N_0\}$ und daher

$$\{1, \dots, n_0\} \subset \{\phi(1), \dots, \phi(N_0)\}.$$

Nun sei $n \geq N_0$ und $J := \{\phi(1), \dots, \phi(n)\}$. Dann gilt $\{1, \dots, n_0\} \subset J$ und daher

$$|p_n - s| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} - s \right| = \left| \sum_{j \in J} a_j - s \right| < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass p_n gegen s konvergiert, wie behauptet.

Wir zeigen (ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die nicht absolut summierbar ist. Zu zeigen ist, dass eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)}$ divergiert. Sei

$$I^+ := \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \geq 0\}\,, \qquad I^- := \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n < 0\}\,.$$

Dann gilt

$$r_n := \sum_{k=1}^n |a_k| = r_n^+ + r_n^-, \qquad r_n^\pm := \sum_{k\in I^\pm\cap\{1,\ldots,n\}} |a_k|\,.$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht absolut summierbar ist, ist die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Daher ist eine der Folgen $(r_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass die Folge $(r_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ unbesxchränkt ist. Insbesondere ist dann die Menge I^+ unendlich. Wir dürfen annehmen, dass die Menge I^- ebenfalls unendlich ist, denn andernfalls divergiert bereits die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ (mit $\phi = \mathrm{id}$). Ausserdem dürfen wir annehmen, dass die Menge $\{|a_n| \mid n \in I^-\}$ beschränkt ist, denn andernfalls divergiert wieder die ursprüngliche Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Sei nun

$$c := \sup_{n\in I^-} |a_n|\,, \qquad I^+ = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}\,, \qquad I^- = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}\,.$$

Dann divergiert die Reihe $\sum_{j=1}^\infty a_{m_j}$. Daher existiert eine wachsende Folge natürlicher Zahlen $0 = \ell_0 < \ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \cdots$, so dass

$$\sum_{j=\ell_s+1}^{\ell_{s+1}} a_{m_j} \geq c + 1 \qquad \text{für} \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Nun definieren wir $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass ihre Bildpunkte $\phi(1), \phi(2), \phi(3), \ldots$ in dieser Reihenfolge die Zahlen

$$m_1, \ldots, m_{\ell_1}, n_1, m_{\ell_1+1}, \ldots, m_{\ell_2}, n_2, m_{\ell_2+1}, \ldots, m_{\ell_3}, n_3, \ldots$$

durchlaufen. Dann gilt die Ungleichung $\sum_{i=1}^{\ell_s+s} a_{\phi(i)} \geq s$ für jedes $s \in \mathbb{N}$ und daher divergiert die Reihe $\sum_{i=1}^\infty a_{\phi(i)}$. Damit haben wir (iii) $\Longrightarrow$ (i) für reelle Folgen bewiesen. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, die (ii) erfüllt, so erfüllen auch die Folgen $(\mathrm{Re}\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (ii), sind also nach dem bisher gezeigten absolut summierbar, und daher ist auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar. Damit ist Satz 3.1 bewiesen. $\square$

Übung 3.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so dass $\sum_{n=1}^\infty a_{\phi(n)} = x$ ist.

4 Summierbare Familien

Es ist manchmal nützlich, nicht nur Folgen komplexer Zahlen zu summieren, sondern auch beliebige Familien komplexer Zahlen, bei denen die Indexmenge nicht unbedingt die Menge der natürlichen Zahlen sein muss, sondern zum Besipiel auch die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die Menge $\mathbb{N}^2$ aller Paare von natürlichen Zahlen, oder einfach auch eine beliebige Menge I sein kann.

Sei also I eine Menge und $a : I \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. In Anlehnung an die übliche Schreibweise für Folgen verwenden wir die Bezeichnung $a_i := a(i)$ für das Bild eines Elementes $i \in I$ unter der Abbildung a und $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ für die Abbildung selbst. Sei

$$\mathcal{E}(I) := \{J \subset I \,|\, \#J < \infty\}$$

die Menge der endlichen Teilmengen von I. Für $J \in \mathcal{E}(I)$ gibt es eine natürliche Zahl n und eine bijektive Abbildung $\phi : \{1, \ldots, n\} \to J$ und wir definieren

$$a_J := \sum_{j \in J} a_j := \sum_{i=1}^{n} a_{\phi(i)}, \qquad |a|_J := \sum_{j \in J} |a_j| := \sum_{i=1}^{n} \left|a_{\phi(i)}\right|.$$

Beide Summen sind unabhängig von der Wahl der Bijektion ϕ und sind daher wohldefiniert für jede endliche Teilmenge $J \subset I$. Es gilt die Ungleichung

$$|a_J| \le |a|_J$$

für jedes $J \in \mathcal{E}(I)$.

Definition 4.1. *Eine Familie $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ komplexer Zahlen heisst* **summierbar** *wenn eine Zahl $s \in \mathbb{C}$ existiert, die folgende Bedingung erfüllt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset I$, so dass für jede weitere endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt, dass*

$$J_0 \subset J \qquad \Longrightarrow \qquad |a_J - s| < \varepsilon. \tag{18}$$

Mit anderen Worten:

$$\exists s \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists J_0 \in \mathcal{E}(I)\ \forall J \in \mathcal{E}(I)\ \big(J_0 \subset J \implies |a_J - s| < \varepsilon\big).$$

Wenn dies gilt, so schreiben wir

$$s =: \sum_{i \in I} a_i.$$

Bemerkung 4.2. Betrachten wir als Beispiel den Fall $I = \mathbb{N}$. Dann ist eine durch I indizierte Familie komplexer Zahlen nichts anderes als eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, wobei wir jedoch die Ordungsrelation auf den natürlichen Zahlen unberücksichtigt lassen. Eine solche Folge ist summierbar im Sinne von Definition 4.1 wenn eine Zahl $s \in \mathbb{C}$ existiert, die folgende Bedingung erfüllt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine natürche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jede endliche Teilmenge $J \subset \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\{1, \dots, n_0\} \subset J \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \sum_{j\in J} a_j - s \right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Hier haben wir die endliche Menge J_0 in Definition 4.1 ersetzt durch die grössere endliche Menge $\{1, \dots, n_0\}$ mit $n_0 := \max J_0$. Diese erfüllt natürlich ebenfalls die Bedingung (18). Der Unterschied zwischen der Summierbarkeit im Sinne von Definition 4.1 und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ besteht also darin, dass in (19) beliebige endliche Mengen $J \subset \mathbb{N}$ zugelassen sind, und nicht nur Mengen der Form $\{1, \dots, n\}$.

Für unsere Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist die Summierbarkeitseigenschaft in Definition 4.1 genau die Bedingung (ii) in Satz 3.1 und ist daher äquivalent zur absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Der folgende Satz verallgemeinert diese Aussage und zeigt eine analoge Äquivalenz für beliebige Familien komplexer Zahlen.

Satz 4.3. *Sei $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ eine Familie komplexer Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Menge $\{|a|_J \mid J \in \mathcal{E}(I)\}$ ist beschränkt.*

(ii) *a ist summierbar.*

Beweis. Wir beweisen (ii) $\Longrightarrow$ (i). Zunächst nehmen wir an, dass $(a_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie reeller Zahlen ist mit

$$s := \sum_{i\in I} a_i.$$

Dann existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset I$, so dass für jede weitere endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt, dass

$$J_0 \subset J \qquad \Longrightarrow \qquad |a_J - s| < 1.$$

Sei nun $J \subset I$ eine beliebige endliche Teilmenge. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a_J| &= \left|a_{J\cup J_0} - s - a_{J_0\setminus J} + s\right| \\ &\le |a_{J\cup J_0} - s| + \left|a_{J_0\setminus J}\right| + |s| \\ &\le 1 + |a|_{J_0\setminus J} + |s| \\ &\le 1 + |a|_{J_0} + |s| \\ &=: c \end{aligned}$$

Mit $J^+ := \{j \in J \mid a_j \ge 0\}$ und $J^- := \{j \in J \mid a_j < 0\}$ folgt daraus

$$|a|_J = a_{J^+} - a_{J^-} = |a_{J^+}| + |a_{J^-}| \le 2c.$$

Sei nun $(a_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie komplexer Zahlen. Dann sind die Familien $(\mathrm{Re}\, a_i)_{i\in I}$ und $(\mathrm{Im}\, a_i)_{i\in I}$ ebenfalls summierbar. Also gibt es, nach dem bisher gezeigten, zwei Zahlen $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$, so dass

$$\sum_{j\in J} |\mathrm{Re}\, a_j| \le c_1, \qquad \sum_{j\in J} |\mathrm{Im}\, a_j| \le c_2$$

für jede endliche Teilmenge $J \subset I$. Dann gilt für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ auch die Ungleichung

$$\sum_{j\in J} |a_j| = \sum_{j\in J} \sqrt{|\mathrm{Re}\, a_j|^2 + |\mathrm{Im}\, a_j|^2} \le \sum_{j\in J} \big(|\mathrm{Re}\, a_j| + |\mathrm{Im}\, a_j|\big) \le c_1 + c_2.$$

Damit haben wir gezeigt, dass (i) aus (ii) folgt.

Wir beweisen (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei also $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie komplexer Zahlen, so dass die Menge $\{|a|_J \mid J \in \mathcal{E}(I)\}$ beschränkt ist und definiere

$$c := \sup_{J\in\mathcal{E}(I)} |a|_J\,.$$

Wir zeigen in vier Schritten, dass die Familie $(a_i)_{i\in I}$ summierbar ist.

Schritt 1. *Es existiert eine Folge endlicher Teilmengen $J_n \subset I$, so dass*

$$|a|_{J_n} > c - \frac{1}{n}, \qquad J_n \subset J_{n+1} \tag{20}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Nach der Definition des Supremums gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $K \subset I$, so dass $|a|_K > c - 1/n$ ist. Nach dem Auswahlaxiom existiert also eine Folge endlicher Teilmengen $K_n \subset I$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|a|_{K_n} > c - 1/n$ ist. Die Mengen $J_n := K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind dann endlich und erfüllen (20). Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Seien $J_n \in \mathcal{E}(I)$ wie in Schritt 1. Dann erfüllt jede endliche Teilmenge $J \subset I$, die J_n enthält, die Ungleichung*

$$|a_J - a_{J_n}| < \frac{1}{n}.$$

Ist $J \in \mathcal{E}(I)$ mit $J_n \subset J$, so gilt

$$|a_J - a_{J_n}| = \left|a_{J \setminus J_n}\right| \le |a|_{J \setminus J_n} = |a|_J - |a|_{J_n} \le c - |a|_{J_n} < \frac{1}{n}.$$

Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *Seien $J_n \in \mathcal{E}(I)$ wie in Schritt 1. Dann ist $(a_{J_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen.*

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $1/n_0 < \varepsilon$ ist. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \ge n_0$, dass

$$|a_{J_n} - a_{J_m}| < \frac{1}{m} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Hier folgt die erste Ungleichung aus Schritt 2 und der Inklusion $J_m \subset J_n$. Damit ist Schritt 3 bewiesen.

Schritt 4. *Die Familie $(a_i)_{i \in I}$ ist summierbar.*

Seien $J_n \in \mathcal{E}(I)$ wie in Schritt 1. Nach Schritt 3 konvergiert die Folge a_{J_n}. Ihren Grenzwert bezeichnen wir mit $s := \lim_{n \to \infty} a_{J_n}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |a_{J_n} - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $J \subset I$ eine endliche Teilmenge, die J_n enthält. Dann gilt

$$|a_J - s| \le |a_J - a_{J_n}| + |a_{J_n} - s| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus Schritt 2. Damit sind Schritt 4 und Satz 4.3 bewiesen. □

5 Der Grosse Umordnungssatz

Satz 5.1. *Seien I und K Mengen. Für $k \in K$ sei $I_k \subset I$ eine Teilmenge so dass $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ und $I_k \cap I_\ell = \emptyset$ für $k, \ell \in K$ mit $k \neq \ell$. Sei $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ eine summierbare Familie. Dann ist die Familie $(a_i)_{i\in I_k}$ für jedes $k \in K$ summierbar, die Familie $(\sum_{i\in I_k} a_i)_{k\in K}$ ist ebenfalls summierbar, und es gilt*

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) = \sum_{i\in I} a_i.$$

Beweis. Nach Satz 4.3 ist die Menge $\{|a|_J \mid J \in \mathcal{E}(I)\}$ beschränkt. Daher ist auch die Menge $\{|a|_J \mid J \in \mathcal{E}(I_k)\}$ für jedes $k \in K$ beschränkt. Also ist die Familie $(a_i)_{i\in I_k}$ nach Satz 4.3 für jedes $k \in K$ summierbar. Sei

$$s_k := \sum_{i\in I_k} a_i, \qquad k \in K.$$

Dann gilt

$$|s_k| \leq \sup_{J\in\mathcal{E}(I_k)} |a|_J. \tag{21}$$

Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so existiert ein $J \in \mathcal{E}(I)$ mit $|a_J - s| < \varepsilon$ und daher gilt $|s| \leq |s - a_J| + |a_J| < \varepsilon + |a|_J$. Daraus folgt $|s_k| < \varepsilon + \sup_{J\in\mathcal{E}(I_k)} |a|_J$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit ist (21) bewiesen. Als nächstes beweisen wir, dass

$$|s|_L \leq \sup_{J\in\mathcal{E}(I)} |a|_J \qquad \forall L \in \mathcal{E}(K). \tag{22}$$

Sei also $L \subset K$ eine endliche Teilmenge und $n := \#L$ die Anzahl der Elemente von L. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (21) existiert für jedes $k \in L$ eine endliche Teilmenge $J_k \subset I_k$ so dass

$$|s_k| \leq |a|_J + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Dann ist $J := \bigcup_{k\in L} J_k$ eine endliche Teilmenge von K und es gilt

$$|s|_L = \sum_{k\in L} |s_k| \leq \sum_{k\in L}\left(|a|_{J_k} + \frac{\varepsilon}{n}\right) = |a|_J + \varepsilon.$$

Daraus folgt $|s|_L \leq \varepsilon + \sup_{J\in\mathcal{E}(I)} |a|_J$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit ist (22) bewiesen. Nach (22) und Satz 4.3 ist die Familie $(s_k)_{k\in K}$ summierbar.

Sei nun

$$s := \sum_{i \in I} a_i.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $s = \sum_{k \in K} s_k$ ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine endliche Menge $J_0 \subset I$, so dass für jede weitere endliche Menge $J \subset I$ gilt, dass

$$J_0 \subset J \qquad \Longrightarrow \qquad \left| s - \sum_{i \in J} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da die Menge J_0 endlich ist schneidet sie nur endlich viele der Mengen I_k. Mit anderen Worten, die Menge

$$L_0 := \{k \in K \mid I_k \cap J_0 \neq \emptyset\}$$

ist eine endliche Teilmenge von K. Sei nun $L \subset K$ eine weitere endliche Teilmenge von K die L_0 enthält und sei $n := \#L$ die Anzahl der Elemente von L. Da $s_k = \sum_{i \in I_k} a_i$ ist, existiert für jedes $k \in L$ eine endliche Teilmenge $J_k \subset I_k$, so dass jede weitere endliche Teilmenge $J \subset I_k$ die Bedingung

$$J_k \subset J \qquad \Longrightarrow \qquad \left| s_k - \sum_{i \in J} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

erfüllt. Ausserdem können wir die endliche Teilmenge $J_k \subset I_k$ (für $k \in L_0$) so wählen, dass sie die Menge $J_0 \cap I_k$ enthält:

$$J_0 \cap I_k \subset J_k.$$

Dann ist die Menge $J := \bigcup_{k \in L} J_k \subset I$ endlich und enthält die Menge J_0. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| s - \sum_{k \in L} s_k \right| &\leq \left| s - \sum_{i \in J} a_i \right| + \sum_{k \in L} \left| \sum_{i \in J_k} a_i - s_k \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \in L} \frac{\varepsilon}{2n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\sum_{i \in I} a_i = s = \sum_{k \in K} s_k = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

ist, wie behauptet. Damit ist Satz 5.1 bewiesen. $\square$

Korollar 5.2 (Doppelsummensatz). *Sei*

$$I = J \times K$$

und $(a_{jk})_{(j,k)\in J\times K}$ *eine summierbare Familie komplexer Zahlen. Dann ist die Familie* $(a_{jk})_{j\in J}$ *für jedes* $k \in K$ *summierbar, die Familie* $(a_{jk})_{k\in K}$ *ist für jedes* $j \in J$ *summierbar, und es gilt*

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} a_{jk} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{k\in K} a_{jk}\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J} a_{jk}\right).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 5.1. $\square$

Man kann den Grossen Umordnungssatz 5.1 auch verwenden, um einen anderen Beweis des Produktreihensatzes zu erbringen. Dieser Beweis ist etwas abstrakter als der in Abschnitt 1, da er nicht nur die Konvergenz von Reihen verwendet, sondern auch die Konvergenz von Summen über beliebige Mengen, in diesem Fall über die Indexmenge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Beweis von Satz 1.1. Wir bezeichnen $\alpha := \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ und $\beta := \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$. Dann ist $\alpha\beta$ eine obere Schranke für jede endliche Summe von Termen der Form $|a_i b_j|$, denn es gilt $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} |a_i b_j| = (\sum_{i=0}^{m} |a_i|)(\sum_{j=0}^{n} |b_j|) \le \alpha\beta$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.3 ist die Familie $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ summierbar. Nun folgt aus Satz 5.1 mit $I = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $K = \mathbb{N}_0$, $I_k = \{k\} \times \mathbb{N}_0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_i b_j &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right).
\end{aligned}$$

Mit $I = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $K = \mathbb{N}_0$, $I_k := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, i + j = k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, folgt ebenfalls aus Satz 5.1 dass

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_i b_j = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right).$$

Damit ist Satz 1.1 bewiesen. $\square$

Literatur

[1] Konrad Königsberger, *Analysis 1*, 6. Auflage, Springer Verlag, 2003.