Analysis I (HS 2016): DAS LEMMA VON ZORN UND DER BEGRIFF DER MÄCHTIGKEIT.

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

29. September 2016

Zusammenfassung

Dieses Manuskript dient einer Einführung für Studierende des ersten Semesters an der ETH in einige nützliche Grundbegriffe aus der Mengenlehre. Kapitel 1 erinnert an die Definition von Relationen und enthält ein paar Bemerkungen und Beispiele die im folgenden relevant sind. In Kapitel 2 wird das Zornsche Lemma formuliert und gezeigt, dass es zum Auswahlaxiom äquivalent ist. In Kapitel 3 wird der mathematische Begriff der Mächtigkeit eingeführt und charakterisiert, im Kapitel 4 geht es um endliche, unendliche, abzählbare, und überabzählbare Mengen, und im Kapitel 5 werden diese Begriffe anhand diverser Beispiele illustriert. Kapitel 6 gibt einen kleinen Einblick in die Kontinuumshypothese und das Russelsche Paradoxon.

Inhaltsverzeichnis

1 Relationen

Definition 1.1. *Seien X und Y zwei Mengen und*

$$f : X \to Y$$

eine Abbildung. Das **kartesische Produkt** *von X und Y ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (x, y), wobei x ein Element von X und y ein Element von Y ist. Es wird mit*

$$X \times Y := \{(x, y) \,|\, x \in X,\, y \in Y\}$$

bezeichnet. Der **Graph von** f *ist die Teilmenge*

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y.$$

Bemerkung 1.2. Seien X und Y zwei Mengen und sei

$$\Gamma \subset X \times Y.$$

Es gibt genau dann eine Abbildung $f : X \to Y$ so dass $\Gamma = \mathrm{graph}(f)$ ist wenn Γ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.

(Existenz) Für jedes $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ so dass $(x, y) \in \Gamma$ ist.

(Eindeutigkeit) Sind $x \in X$ und $y, y' \in Y$ gegeben so gilt

$$(x, y) \in \Gamma \quad \wedge \quad (x, y') \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad y = y'.$$

Hier steht das logische Symbol "$\wedge$" für das Wort "und".

Definition 1.3. *Sei X eine Menge. Eine* **Relation auf** X *ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Sind x, y zwei Elemente von X so sagen wir x* **steht in der Relation** R **zu** y *wenn das Paar $(x, y) \in X \times X$ zu der Teilmenge R gehört. Es ist oft nützlich für die Aussage, dass x in der Relation R zu y steht, die Abkürzung xRy zu verwenden (anstelle von $(x, y) \in R$).*

Definition 1.4. *Sei X eine Menge und sei $R \subset X \times X$ eine Relation.*
Die Relation R heisst **reflexiv** *wenn sie die Diagonale in $X \times X$ enthält, das heisst wenn gilt xRx für jedes $x \in X$.*
Sie heisst **anti-reflexiv** *wenn für jedes $x \in X$ gilt, dass $(x, x) \notin R$ ist.*
Sie heisst **symmetrisch** *wenn für alle $x, y \in X$ gilt, dass*

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad yRx.$$

Sie heisst **anti-symmetrisch** *wenn für alle $x, y \in X$ gilt, dass*

$$xRy \quad \wedge \quad yRx \qquad \Longrightarrow \qquad x = y.$$

Sie heisst **transitiv** *wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt, dass*

$$xRy \quad \wedge \quad yRz \qquad \Longrightarrow xRz.$$

Definition 1.5. *Sei P eine Menge. Eine Relation $R \subset P \times P$ heisst* **partielle Ordnung** *wenn sie transitiv, anti-symmetrisch, und reflexiv ist. Wir nennen dann das Paar (P, R) eine* **partiell geordnete Menge**. *Eine partiell geordnete Menge (P, R) heisst* **total geordnet**, *wenn für alle $p, q \in P$ gilt pRq oder qRp. Es ist üblich, eine partielle Ordnung mit einem Symbol wie zum Beispiel $\preceq$, $\preccurlyeq$, $\leq$, $\leqslant$, oder $\subset$ zu bezeichnen.*

Beispiel 1.6. Sei $P = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und R die übliche Ordnungsrelation

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \leq y\}.$$

Das Paar $(\mathbb{R}, \leq)$ ist eine total geordnete Menge.

Beispiel 1.7. Sei $P = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und

$$R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist durch } m \text{ teilbar}\}.$$

Mit dieser Relation ist die Menge der natürlichen Zahlen partiell geordnet.

Beispiel 1.8. Sei X eine Menge und

$$P = 2^X := \{A \,|\, A \subset X\}$$

die Menge aller Teilmengen von X. Die Inklusion von Teilmengen definiert eine Relation

$$R := \left\{(A, B) \in 2^X \times 2^X \,|\, A \subset B\right\}.$$

Das Paar $(2^X, \subset)$ ist eine partiell geordnete Menge, die nicht total geordnet ist (ausser X ist die leere Menge oder enthält genau ein Element).

2 Das Zornsche Lemma

Definition 2.1. *Sei* $(P, \preccurlyeq)$ *eine partiell geordnete Menge und* $m \in P$*. Das Element* m *heisst* **maximal** *wenn für alle* $p \in P$ *gilt, dass*

$$m \preccurlyeq p \qquad \Longrightarrow \qquad m = p.$$

Definition 2.2. *Sei* $(P, \preccurlyeq)$ *eine partiell geordnete Menge und* $C \subset P$*. Die Teilmenge* C *heisst* **Kette** *wenn für alle* $p, q \in C$ *gilt, dass* $p \preccurlyeq q$ *oder* $q \preccurlyeq p$*. Mit anderen Worten, eine Teilmenge* $C \subset P$ *ist genau dann eine Kette, wenn sie eine total geordnete Teilmenge von* P *ist.*

Definition 2.3. *Sei* $(P, \preccurlyeq)$ *eine partiell geordnete Menge und* $C \subset P$ *eine nichtleere Teilmenge. Ein Element* $a \in P$ *heisst* **obere Schranke von** C *wenn* $c \preccurlyeq a$ *ist für jedes* $c \in C$*. Ein Element* $a \in P$ *heisst* **Supremum von** C *es die folgenden beiden Eigenschaften hat.*

(i) a *ist eine obere Schranke von* C*.*

(ii) *Jede obere Schranke* $b \in P$ *von* C *genügt der Bedingung* $a \preccurlyeq b$*.*

Das Supremum von C*, wenn es existiert, ist eindeutig und wird mit*

$$\sup C \in P$$

bezeichnet.

Wir formulieren nun das Zornsche Lemma. Es ist eine Aussage über beliebige partiell geordnete Mengen und sollte als ein **Axiom der Mengenlehre** verstanden werden. Anschliessend formulieren wir zur Erinnerung auch noch einmal das Auswahlaxiom.

DAS LEMMA VON ZORN. *Sei* $(P, \preccurlyeq)$ *eine partiell geordnete Menge, so dass jede nichtleere Kette* $C \subset P$ *eine obere Schranke besitzt. Sei* $p \in P$*. Dann existiert ein maximales Element* $m \in P$ *so dass* $p \preccurlyeq m$*.*

DAS AUSWAHLAXIOM. *Seien* I *und* X *zwei Mengen. Für jedes* $i \in I$ *sei* $X_i \subset X$ *eine nichtleere Teilmenge. Dann gibt es eine Abbildung* $g : I \to X$ *so dass* $g(i) \in X_i$ *ist für jedes* $i \in I$*.*

Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, dass das Zornsche Lemma äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Der hier erbrachte Beweis dieser Äquivalenz entstammt einem Manuskript von Imre Leader [1] und beruht auf dem folgenden Fixpunktsatz von Bourbaki–Witt. Dessen Beweis wiederum ist nicht einfach und erfordert ein hohes Mass an Genauigkeit im logischen Denken.

Satz 2.4 (Bourbaki-Witt). *Sei $(P, \preccurlyeq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge, so dass jede nichtleere Kette $C \subset P$ ein Supremum besitzt. Sei $f : P \to P$ eine Abbildung so dass*

$$p \preccurlyeq f(p) \qquad \forall\, p \in P.$$

Dann besitzt f einen Fixpunkt, das heisst es existiert ein $p \in P$ mit $f(p) = p$.

Beweis. Wähle ein Element $p_0 \in P$. Sei $\mathcal{A} \subset 2^P$ die Menge aller der Teilmengen $A \subset P$, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen.

(i) $p_0 \in A$.

(ii) Ist $p \in A$ so ist auch $f(p) \in A$.

(iii) Ist $C \subset A$ eine Kette so ist $\sup C \in A$.

Sei $E := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ der Durchschnitt aller Teilmengen $A \in \mathcal{A}$. Diese Menge erfüllt auch die Bedingungen (i), (ii) und (iii), und ist daher selbst wieder ein Element von $\mathcal{A}$.

Behauptung 1: *Sei $F \subset E$ die Teilmenge*

$$F := \{q \in E \,|\, p \in E,\, p \preccurlyeq q,\, p \neq q \implies f(p) \preccurlyeq q\}\,. \tag{1}$$

Dann gilt

$$p \in E, \quad q \in F \qquad \Longrightarrow \qquad p \preccurlyeq q \quad \textit{oder} \quad f(q) \preccurlyeq p. \tag{2}$$

Sei $q \in F$ gegeben und betrachte die Menge

$$E_q := \{p \in E \,|\, p \preccurlyeq q\} \cup \{p \in E \,|\, f(q) \preccurlyeq p\}\,.$$

Wir zeigen, dass $E_q \in \mathcal{A}$ ist. Zunächst folgt aus der Definition von $\mathcal{A}$ dass, für jedes $A \in \mathcal{A}$, die Menge $A_0 := \{p \in A \,|\, p_0 \preccurlyeq p\}$ wiederum ein Element von $\mathcal{A}$ ist. Daher folgt aus der Definition von E, dass

$$p_0 \preccurlyeq p \qquad \forall\, p \in E. \tag{3}$$

Insbesondere gilt $p_0 \preccurlyeq q$ und daher $p_0 \in E_q$. Also erfüllt E_q die Bedingung (i).

Wir zeigen nun, dass E_q auch die Bedingung (ii) erfüllt. Sei also $p \in E_q$. Ist $p \preccurlyeq q$ und $p \neq q$ so gilt $f(p) \preccurlyeq q$ (da $q \in F$) und daraus folgt $f(p) \in E_q$. Ist $p = q$ so gilt $f(q) \preccurlyeq f(p)$ und daher $f(p) \in E_q$. Ist $p \not\preccurlyeq q$ so gilt $f(q) \preccurlyeq p$ (da $p \in E_q$) und daher $f(q) \preccurlyeq f(p)$ und daraus folgt wiederum $f(p) \in E_q$. Also erfüllt E_q die Bedingung (ii).

Wir zeigen schliesslich, dass E_q auch die Bedingung (iii) erfüllt. Sei also $C \subset E_q$ eine nichtleere Kette und $s := \sup C \in E$. Gilt $p \preccurlyeq q$ für alle $p \in C$ so gilt auch $s \preccurlyeq q$ und daher $s \in E_q$. Andernfalls gibt es ein $p \in C$ mit $p \not\preccurlyeq q$. Diese Element erfüllt die Bedingung $f(q) \preccurlyeq p \preccurlyeq s$ und daher gilt $s \in E_q$. Also erfüllt E_q die Bedingung (iii).

Damit haben wir gezeigt, dass E_q ein Element der Menge $\mathcal{A}$ ist. Daraus folgt $E \subset E_q$ und daher $E = E_q$. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2: *Sei $F \subset E$ durch* (1) *definiert. Dann gilt $F = E$.*

Wir zeigen, dass $F \in \mathcal{A}$ ist. Zunächst folgt aus (3), dass E kein Element p enthält, das die Bedingungen $p \preccurlyeq p_0$ und $p \neq p_0$ efüllt. Daher gilt $p_0 \in F$. Also erfüllt F die Bedingung (i).

Wir zeigen, dass F die Bedingung (ii) erfüllt. Sei $q \in F$ gegeben. Dann ist $f(q) \in E$. Wir müssen zeigen, dass $f(q) \in F$ ist. Sei also $p \in E$ gegeben, so dass $p \preccurlyeq f(q)$ und $p \neq f(q)$ ist. Unter diesen Voraussetzungen müssen wir zeigen, dass $f(p) \preccurlyeq f(q)$ ist. Zunächst gilt $f(q) \not\preccurlyeq p$ und daher $p \preccurlyeq q$, nach Behauptung 1. Ist $p \neq q$, so folgt aus der Definition der Menge F, dass $f(p) \preccurlyeq q \preccurlyeq f(q)$ ist. Ist andererseits $p = q$ so gilt ebenfalls $f(p) \preccurlyeq f(q)$. Also gilt in beiden Fällen $f(p) \preccurlyeq f(q)$, wie behauptet. Damit haben wir gezeigt dass $f(q) \in F$ ist. Also erfüllt F die Bedingung (ii).

Wir zeigen, dass F die Bedingung (iii) erfüllt. Sei $C \subset F$ eine nichtleere Kette und $s := \sup C$. Wir müssen zeigen, dass $s \in F$ ist. Sei also $p \in E$, so dass $p \preccurlyeq s$ und $p \neq s$ ist. Unter diesen Voraussetzungen müssen wir zeigen, dass $f(p) \preccurlyeq s$ ist. Zunächst existiert ein Element $q \in C$ mit $q \not\preccurlyeq p$. (Andernfalls wäre auch $s \preccurlyeq p$ und damit $s = p$.) Daher gilt auch $f(q) \not\preccurlyeq p$. Da $q \in C \subset F$ ist, folgt daraus nach (2), dass $p \preccurlyeq q$ ist. Ausserdem ist $p \neq q$. Da $q \in F$ ist, folgt daraus $f(p) \preccurlyeq q$. Da $q \in C$ und $s = \sup C$ ist, folgt daraus $f(p) \preccurlyeq s$. Daher gilt $s \in F$. Also erfüllt F die Bedingung (iii).

Damit haben wir bewiesen, dass F ein Element der Menge $\mathcal{A}$ ist. Daraus folgt $E \subset F$ und daher $E = F$. Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Behauptung 3: *E ist eine Kette.*

Seien $p, q \in E$. Dann gilt $q \in F$ nach Behauptung 2. Also gilt $p \preccurlyeq q$ oder $f(q) \preccurlyeq p$, nach Behauptung 1. Daraus folgt $p \preccurlyeq q$ oder $q \preccurlyeq p$. Damit ist Behauptung 3 bewiesen.

Sei nun $s := \sup E$. Da $E \in \mathcal{A}$ und E eine Kette ist gilt $s \in E$. Daraus folgt $f(s) \in E$ und damit $f(s) \preccurlyeq s$. Andererseits ist $s \preccurlyeq f(s)$ und daher $f(s) = s$. Damit ist Satz 2.4 bewiesen. $\square$

Satz 2.5. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zum Lemma von Zorn.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass das Lemma von Zorn gilt. Seien die Mengen I, X, und $\emptyset \neq X_i \subset X$ für $i \in I$ gegeben, wie in den Voraussetzungen des Auswahlaxioms. Sei $\mathcal{P} \subset 2^X$ die Menge aller Teilmengen $Z \subset (I \times X)$, so dass, für jedes $i \in I$, der Durchschnitt $Z \cap (\{i\} \times X)$ enthalten ist in $\{i\} \times X_i$ und aus höchstens einem Element besteht:

$$\mathcal{P} := \left\{ Z \subset I \times X \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{Für alle } i \in I \text{ und alle } x, x' \in X \text{ gilt} \\ 1.\ \ (i,x) \in Z \implies x \in X_i, \\ 2.\ \ (i,x), (i,x') \in Z \implies x = x'. \end{array} \right\}.$$

Diese Menge $\mathcal{P}$ ist partiell geordnet durch die Inklusion. Zweitens ist $\mathcal{P}$ nichtleer, da die leere Menge (als Teilmenge von $I \times X$ verstanden) ein Element der Menge $\mathcal{P}$ ist. Drittens gilt folgendes.

Behauptung. *Ist $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ eine Kette so ist $Z := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \in \mathcal{P}$ eine obere Schranke von $\mathcal{C}$.*

Wir müssen zeigen, dass Z ein Element von $\mathcal{P}$ ist. Da jedes Element von $\mathcal{C}$ eine Teilmenge von $I \times X$ ist, ist auch die Vereinigung Z aller der Teilmengen von $I \times X$, die in der Menge $\mathcal{C}$ zusammengefasst sind, selbst eine Teilmenge von $I \times X$. Diese erfüllt offensichtlich die Bedingung $Z \cap (\{i\} \times X) \subset \{i\} \times X_i$ für jedes $i \in I$. Es ist also zu zeigen, dass der Durchschnitt $Z \cap (\{i\} \times X)$ für jedes $i \in I$ entweder die leere Menge ist oder aus genau einem Element besteht. Seien also $i \in I$ und $x, x' \in X$ gegeben mit $(i,x), (i,x') \in Z$. Es ist zu zeigen, dass $x = x'$ ist. Dazu erinnern wir uns daran, dass nach Definition der Menge A zwei Elemente $C, C' \in \mathcal{C}$ existieren, so dass $(i,x) \in C$ und $(i,x') \in C'$ ist. Da $\mathcal{C}$ eine Kette ist gilt $C \subset C'$ oder $C' \subset C$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen dass $C' \subset C$ ist. Dann gilt $(i,x), (i,x') \in C \cap X_i$. Da $C \in \mathcal{P}$ ist folgt hieraus, dass $x = x'$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach dem Zornschen Lemma folgt aus der Behauptung, dass die partiell geordnete Menge $\mathcal{P}$ ein maximales Element Γ besitzt. Dieses Element muss die Bedingung $\Gamma \cap (\{i\} \times X) \neq \emptyset$ für jedes $i \in I$ erfüllen. (Sonst könnten wir eine noch grösser Teilmenge $\Gamma' \subset X$ finden, indem wir zu Γ eine Element einer Menge $\{j\} \times X_j$, die Γ nicht schneidet, hinzufügen. Diese Menge Γ' wäre dann immer noch ein Element von $\mathcal{P}$ und damit wäre Γ nicht maximal.) Nach Definition von $\mathcal{P}$ enthält die Menge $\Gamma \cap (\{i\} \times X_i)$ daher für jedes $i \in I$ genau ein Element. Nach Bemerkung 1.2 ist Γ also der Graph einer Abbildung $g : I \to X$. Diese Abbildung erfüllt die Aussage des Auswahlaxiom.

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass das Auswahlaxiom gilt und beweisen in zwei Schritten, dass dann das Zornsche Lemma wahr sein muss.

Schritt 1. *Sei $(P, \preccurlyeq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge so dass jede nichleere Kette $C \subset P$ ein Supremum besitzt. Dann besitzt P ein maximales Element.*

Wir nehmen an, dass P kein maximales Element besitzt. Dann ist die Menge

$$S(p) := \{q \in P \,|\, p \preccurlyeq q,\, p \neq q\} \subset P$$

für jedes $p \in P$ nichtleer. Nach dem Auswahlaxiom gibt es daher eine Abbildung $f : P \to P$ so dass

$$f(p) \in S(p) \qquad \forall\ p \in P.$$

Diese Abbildung f erfüllt die Bedingung

$$p \preccurlyeq f(p) \qquad \forall\ p \in P,$$

besitzt aber keinen Fixpunkt. Das steht im Widerspruch zu Satz 2.4. Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Sei $(P, \preccurlyeq)$ eine partiell geordnete Menge so dass jede nichleere Kette $C \subset P$ eine obere Schranke besitzt. Sei $p \in P$. Dann existiert ein maximales Element $m \in P$ so dass $p \preccurlyeq m$.*

Sei $\mathcal{P} \subset 2^P$ die Menge aller Ketten $C \subset P$, die den Punkt p enthalten. Dies ist eine nichtleere partiell geordnete Menge, wobei die Ordnungsrelation durch Inklusion gegeben ist. Ist $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ eine Kette in $\mathcal{P}$ so ist die Menge

$$S := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

eine Kette in P, die den Punkt p enthält. (Übung: $S \subset P$ ist eine Kette.) Also ist S ein Element von $\mathcal{P}$ und S ist offensichtlich das Supremum der Kette von Ketten $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. Damit haben wir gezeigt, dass jede Kette in $\mathcal{P}$ ein Supremum besitzt. Also gibt es nach Schritt 1 eine maximale Kette $M \subset P$ welche den Punkt p enthält. Sei $m \in P$ eine obere Schranke von M. Dann ist m ein maximales Element von P. Gäbe es nämlich ein Element $q \in P$ mit $m \preccurlyeq q$ und $m \neq q$, so wäre $M \cup \{q\}$ eine noch grössere Kette die p enthält, im Widerspruch zur Maximalität von M. Damit sind Schritt 2 und Satz 2.5 bewiesen. □

3 Der Begriff der Mächtigkeit

Wir setzen von nun an die Gültigkeit des Auswahlaxioms, beziehungsweise des Zornschen Lemmas, voraus. Mit deren Hilfe wollen wir die *"Anzahl der Elemente"* zweier Mengen miteinander vergleichen. Diese Mengen können *"endlich viele"* oder auch *"unendlich viele"* Elemente haben. Dies führt zu der folgenden Definition.

Definition 3.1. *Seien X und Y zwei Mengen. Wir sagen Y hat* **grössere Mächtigkeit** *als X, wenn folgende beiden Bedingungen gelten.*

(I) *Es existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$.*

(II) *Es existiert keine injektive Abbildung $g : Y \to X$.*

Wir sagen X und Y sind **gleichmächtig***, wenn eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.*

Es ist ganz und gar nicht offensichtlich, dass je zwei Mengen entweder gleichmächtig sind, oder die eine grössere Mächtigkeit als die andere hat. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 3.2. *Seien X und Y zwei Mengen.*

(i) *Wenn keine injektive Abbildung $g : Y \to X$ existiert, dann existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$.*

(ii) *Wenn zwei injektive Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ existieren, dann existiert auch eine bijektive Abbildung $h : X \to Y$.*

Korollar 3.3. *Seien X und Y zwei Mengen. Dann ist genau eine der folgenden Aussagen wahr.*

(a) *Y hat grössere Mächtigkeit als X.*

(b) *X und Y sind gleichmächtig.*

(c) *X hat grössere Mächtigkeit als Y.*

Beweis. Nach Satz 3.2 (i) gilt (a) genau dann, wenn keine injektive Abbildung $g : Y \to X$ existiert. Also können (b) und (c) nicht gelten, wenn (a) gilt. Ebenso können (a) und (b) nicht gelten, wenn (c) gilt. Daher schliessen sich (a), (b), und (c) gegenseitig aus. Erfüllen die Mengen X und Y aber weder (a) noch (c), so existieren zwei injektive Abbildungen $g : Y \to X$ (da (a) nicht gilt) und $f : X \to Y$ (da (c) nicht gilt). Daher folgt aus Satz 3.2 (ii), dass eine bijektive Abbildung $h : X \to Y$ existiert. Also sind X und Y gleichmächtig. Damit ist Korollar 3.3 bewiesen. □

Beweis von Satz 3.2. Wir beweisen (i). Seien also X, Y zwei Mengen, so dass keine injektive Abbildung $g : Y \to X$ existiert. Es ist zu zeigen, dass eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert. Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{P} := \{(A, f) \,|\, A \subset X,\ f : A \to Y \text{ ist eine injektive Abbildung}\}.$$

Diese Menge besitzt eine Relation $\preccurlyeq$, definiert durch

$$(A, f) \preccurlyeq (A', f') \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset A' \quad \text{und} \quad f'(x) = f(x) \;\; \forall \;\; x \in A$$

für $(A, f), (A', f') \in \mathcal{P}$ (siehe Definition 1.3). Diese Relation ist offensichtlich transitiv, anti-symmetrisch und reflexiv (siehe Definition 1.4), und ist daher eine partielle Ordung (siehe Definition 1.5).

Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ eine Kette. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}$ eine obere Schranke $(\widetilde{A}, \widetilde{f}) \in \mathcal{P}$ besitzt. Definiere die Teilmenge $\widetilde{A} \subset X$ durch

$$\widetilde{A} := \bigcup_{(A,f)\in\mathcal{C}} A$$

und die Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to Y$ durch

$$\widetilde{f}(x) := f(x) \qquad \text{falls} \quad (A, f) \in \mathcal{C} \quad \text{und} \quad x \in A.$$

Die Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to Y$ ist wohldefiniert, da $\mathcal{C}$ eine Kette ist. Ist nämlich $x \in \widetilde{A}$, so existiert ein Element $(A, f) \in \mathcal{C}$ mit $x \in A$; und ist (A', f') ein weiteres Element von $\mathcal{C}$ mit $x \in A'$ so gilt $f'(x) = f(x)$, denn es gilt entweder $A \subset A'$ oder $A' \subset A$ und die Abbildungen f und f' stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Wir zeigen, dass $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to Y$ injektiv ist. Sind $x, x' \in \widetilde{A}$ mit $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x')$, dann gibt es zwei Elemente $(A, f), (A', f') \in \mathcal{C}$ so dass $x \in A$ und $x' \in A'$. Da $\mathcal{C}$ eine Kette ist, gilt entweder $A \subset A'$ oder $A' \subset A$, und die Abbildungen f und f' stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $A' \subset A$ ist. Dann gilt $x, x' \in A$ und $f(x) = \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x') = f'(x') = f(x')$. Da $f : A \to Y$ injektiv ist, folgt hieraus, dass $x = x'$ ist. Damit haben wir gezeigt, dass $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to Y$ injektiv ist. Also ist das Paar $(\widetilde{A}, \widetilde{f})$ ein Element der Menge $\mathcal{P}$.

Offensichtlich gilt $A \subset \widetilde{A}$ und $\widetilde{f}|_A = f$ für jedes Paar $(A, f) \in \mathcal{C}$. Daher ist $(\widetilde{A}, \widetilde{f})$ eine obere Schranke von $\mathcal{C}$, wie behauptet. (Übung: das Paar $(\widetilde{A}, \widetilde{f})$ ist sogar das Supremum von $\mathcal{C}$.)

Damit haben wir gezeigt, dass jede Kette $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ eine obere Schranke besitzt. Also folgt aus dem Zornschen Lemma, dass $\mathcal{P}$ ein maximales Element (A, f) besitzt. Die Abbildung $f : A \to Y$ kann nicht surjektiv sein. Sonst gäbe es eine Abbildung $g : Y \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id} : Y \to Y$; diese Abbilldung $g : Y \to A$ wäere dann injektiv und, da $A \subset X$ ist, hätten wir eine injektive Abbildung von Y nach X gefunden, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Also ist $f : A \to Y$ nicht surjektiv, wie behauptet. Daher existiert ein Element $y_0 \in Y \setminus f(A)$. Daraus folgt aber, dass $A = X$ sein muss. Denn andernfalls gäbe es ein Element $x_0 \in X \setminus A$ und wir erhielten eine injektive Abbildung $f_0 : A_0 \to Y$, definiert durch

$$A_0 := A \cup \{x_0\}, \qquad f_0(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ y_0, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Das Paar (A_0, f_0) wäre dann ein Element von $\mathcal{P}$ mit $(A, f) \preccurlyeq (A_0, f_0)$ und $(A, f) \neq (A_0, f_0)$, im Widerspruch zur Maximalität von (A, f). Also ist $A = X$, wie behauptet, und daher ist $f : X \to Y$ die gesuchte injektive Abbildung. Damit ist (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Dazu benötigen wir weder das Auswahlaxiom noch das Lemma von Zorn. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ injektive Abbildungen. Wir beweisen in zwei Schritten, dass eine bijektive Abbildung $h : X \to Y$ existiert.

Schritt 1. *Es existieren Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ so dass $f(A) = Y \setminus B$ und $g(B) = X \setminus A$ ist.*

Sei $A \subset X$ die Menge

$$A := \bigcup_{A' \cap g(Y \setminus f(A')) = \emptyset} A'.$$

Hier ist die Vereinigung zu verstehen über alle Teilmengen $A' \subset X$, die die Bedingung $A' \cap g(Y \setminus f(A')) = \emptyset$ erfüllen. Wir behaupten:

$$g(Y \setminus f(A)) = X \setminus A. \tag{4}$$

Ist $x \in A$ so existiert eine Menge $A' \subset X$ mit $A' \cap g(Y \setminus f(A')) = \emptyset$ und $x \in A'$. Da $A' \subset A$ ist, gilt $g(Y \setminus f(A)) \subset g(Y \setminus f(A'))$. Da $A' \cap g(Y \setminus f(A')) = \emptyset$ ist, folgt daraus $A' \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$. Also ist $x \notin g(Y \setminus f(A))$. Damit haben wir gezeigt, dass $A \subset X \setminus g(Y \setminus f(A))$ ist, und daher

$$g(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus A.$$

Zum Beweis der Inklusion $X \setminus A \subset g(Y \setminus f(A))$ nehmen wir an, dass es ein Element $x \in X \setminus A$ existiert, welches nicht der Menge $g(Y \setminus f(A))$ angehört. Sei $A' := A \cup \{x\}$. Dann gilt $A' \cap g(Y \setminus f(A)) = \emptyset$. Ausserdem ist $A \subset A'$ und daher $g(Y \setminus f(A')) \subset g(Y \setminus f(A))$. Also gilt auch $A' \cap g(Y \setminus f(A')) = \emptyset$. Da $A \subsetneq A'$ ist, steht dies im Widerspruch zur Definition der Menge A. Damit ist (4) bewiesen. Es folgt aus (4), dass die Mengen A und $B := Y \setminus f(A)$ die Behauptung von Schritt 1 erfüllen.

Schritt 2. *Es existiert eine bijektive Abbildung $h : X \to Y$.*

Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ wie in Schritt 1. Dann sind die Abbildungen $f|_A : A \to Y \setminus B$ und $g|_B : B \to X \setminus A$ bijektiv. Definiere die Abbidungen $h : X \to Y$ und $k : Y \to X$ durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ y, & \text{falls } x \in X \setminus A \text{ und } y \in B \text{ so dass } g(y) = x, \end{cases}$$

$$k(y) := \begin{cases} g(y), & \text{falls } y \in B, \\ x, & \text{falls } y \in Y \setminus B \text{ und } x \in A \text{ so dass } f(x) = y. \end{cases}$$

Dann gilt $k \circ h = \mathrm{id} : X \to X$ und $h \circ k = \mathrm{id} : Y \to Y$. Also ist h bijektiv. Damit sind Schritt 2 und Satz 3.2 bewiesen. □

4 Endlichkeit und Abzählbarkeit

Endliche Mengen

Definition 4.1. *Eine nichtleere Menge X heisst* **endlich** *wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \to X$. Diese Zahl n ist eindeutig durch X bestimmt (siehe Satz 4.2). Sie wird die* **Anzahl der Elemente von** *X genannt und mit $\#X := n$ bezeichnet. Die leere Menge wird ebenfalls endlich genannt und $\#\emptyset := 0$.*

Satz 4.2. *Sei X eine nichtleere endliche Menge. Die Zahl n in Definition 4.1 ist eindeutig durch X bestimmt.*

Dieser Satz ist gar nicht so offensichtlich, wie es zunächst den Anschein hat. Er folgt aus dem **Dirichletschen Schubfachprinzip**. Dieses sagt: *“Wenn man n verschiedene Objekte auf m Schubladen verteilt und $m < n$ ist, dann muss eine der m Schubladen zwei verschiedene Objekte enthalten.”* So selbstverständlich diese Aussage auch erscheinen mag, geben wir im folgenden doch einen mathematischer Beweis durch vollständige Induktion.

Lemma 4.3. *Seien m und n zwei naürliche Zahlen. Dann gilt $m \leq n$ genau dann wenn eine injektive Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ existiert.*

Beweis. Ist $m \leq n$ so ist $\{1, \ldots, m\}$ eine Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ und daher ist die Inklusion eine injektive Abbildung von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$. Nun beweisen wir die Umkehrung.

Behauptung: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $m \in \mathbb{N}$ und $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine injektive Abbildung so gilt $m \leq n$.*

Der Beweis wird durch vollständige Induktion über n erbracht. Ist $n = 1$ so gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur eine Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1\}$ und diese ist konstant. Im Fall $m > 1$ gilt $f(1) = f(2) = 1$ und daher ist f nicht injektiv. Damit ist die Behauptung für $n = 1$ bewiesen.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gegeben. Wir nehmen an, die Behauptung gilt für $n - 1$ und zeigen, dass sie dann auch für n gelten muss. Sei also m eine natürliche Zahl und $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine injektive Abbildung. Ist $f(k) \neq n$ für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$, so ist die Bildmenge von f in der Menge $\{1, \ldots, n-1\}$ enthalten und daraus folgt, nach Induktionsannahme, dass $m \leq n - 1 < n$ ist. Wir dürfen also annehmen, dass ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ existiert mit $f(k) = n$. Da f injektiv ist, gilt

$$j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(j) \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Im Fall $m = 1$ ist nichts zu beweisen. Im Fall $m > 1$ definieren wir eine Abbildung $\phi : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$ durch

$$\phi(i) := \begin{cases} i, & \text{für } i = 1, \ldots, k-1, \\ i+1, & \text{für } i = k, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{5}$$

Diese Abbildung ist bijektiv. Daher ist die Komposition

$$f \circ \phi : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n-1\}$$

injektiv. Also folgt aus der Induktionsannahme, dass $m - 1 \leq n - 1$ ist und daher auch $m \leq n$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Das Dirichletsche Schubfachprinzip folgt sofort aus der Behauptung. □

Beweis von Satz 4.2. Seien m, n natürliche Zahlen und $f : \{1, \ldots, m\} \to X$ und $g : \{1, \ldots, n\} \to X$ bijektive Abbildungen. Dann sind die Abbildungen $g^{-1} \circ f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ und $f^{-1} \circ g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ ebenfalls bijektiv, und insbesondere auch injektiv. Also folgt aus Lemma 4.3, dass $m \leq n$ und $n \leq m$ sind. Daher ist $m = n$. □

Lemma 4.4. **(i)** *Ist X eine endliche Menge so ist jede Teilmenge $A \subset X$ endlich und es gilt $\#A \leq \#X$.*

(ii) *Seien X und Y endliche Mengen. Dann sind auch $X \cup Y$ und $X \cap Y$ endliche Mengen und es gilt $\#X + \#Y = \#(X \cup Y) + \#(X \cap Y)$.*

Beweis. Wir beweisen (i) durch vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente von X. Ist $\#X = 0$ so ist $X = \emptyset$ die leere Menge und die einzige Teilmenge der leeren Menge ist die leere Menge selbst. Also gilt (i) im Fall $\#X = 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Die Induktionsannahme ist, dass (i) für jede endliche Menge X mit $\#X = n-1$ gilt. Sei nun X eine endliche Menge mit $\#X = n$ und sei $f : \{1, \ldots, n\} \to X$ eine bijektive Abbildung. Sei $A \subset X$. Ist $A = X$ so ist A offensichtlich eine endliche Menge mit $\#A = \#X$. Ist $A \subsetneq X$ so existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ so dass $x := f(k) \notin A$ ist. Im Fall $n = 1$ ist $A = \emptyset$ endlich und es gilt $\#A = 0 < 1 = \#X$. Im Fall $n > 1$ gibt es eine bijektive Abbildung $\phi : \{1, \ldots, n-1\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ wie in (5). Sei $Y := X \setminus \{x\}$. Dann ist $f \circ \phi : \{1, \ldots, n-1\} \to Y$ eine bijektive Abbildung. Also ist Y eine endliche Menge mit $\#Y = n - 1 < n = \#X$. Da $A \subset Y$ ist, folgt aus der Induktionsannahme, dass A eine endliche Menge ist und $\#A \leq \#Y < \#X$. Damit ist (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii) zunächst unter der Annahme $X \cap Y = \emptyset$. Ist $X = \emptyset$ so gilt $X \cup Y = Y$ und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt. Das gleiche gilt im Fall $Y = \emptyset$. Sind X und Y nichtleer so gilt $m := \#X > 0$ und $n := \#Y > 0$ und es existieren bijektive Abbildungen $f : \{1, \ldots, m\} \to X$ und $g : \{1, \ldots, n\} \to Y$. Definiere $h : \{1, \ldots, m+n\} \to X \cup Y$ durch

$$h(i) := \begin{cases} f(i), & \text{für } i = 1, \ldots, m, \\ g(i-m), & \text{für } i = m+1, \ldots, m+n. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv und, da $X \cap Y = \emptyset$ ist, ist sie auch injektiv. Also ist h bijektiv. Daher ist $X \cup Y$ endlich und $\#(X \cup Y) = m + n$. Damit ist (ii) im Fall $X \cap Y = \emptyset$ bewiesen. Im Fall $X \cap Y \neq \emptyset$ seien

$$A := X \cap Y, \qquad B := Y \setminus A = Y \setminus X.$$

Nach (i) sind diese beiden Mengen endlich und es gilt $X \cup Y = X \cup B$ und $Y = A \cup B$. Da dies disjunkte Vereinigungen endlicher Mengen sind, ist die Menge $X \cup Y$ endlich und es gilt $\#(X \cup Y) = \#X + \#B$ und $\#Y = \#A + \#B$. Daraus folgt

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#B = \#X + \#Y - \#A = \#X + \#Y - \#(X \cap Y).$$

Damit ist Lemma 4.4 bewiesen. □

Unendliche Mengen

Definition 4.5. *Eine Menge X heisst* **unendlich**, *wenn sie nicht endlich ist. Sie heisst* **abzählbar unendlich** *wenn sie zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist. Sie heisst* **abzählbar** *wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist. Sie heisst* **überabzählbar** *wenn sie grössere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$ hat.*

Satz 4.6. *Sei X eine Menge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *X ist unendlich.*

(ii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine endliche Teilmenge $A \subset X$ mit $\#A = n$.*

(iii) *Es existiert eine injektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to X$.*

Korollar 4.7. *Sei X eine Menge.*

(i) *X is genau dann abzählbar wenn eine injektive Abbildung $f : X \to \mathbb{N}$ existiert.*

(ii) *X ist genau dann überabzählbar wenn X nicht abzählbar ist.*

Beweis. Ist X abzählbar so folgt direkt aus den Definitionen dass eine injektive Abbildung $f : X \to \mathbb{N}$ existiert. Nehmen wir ungekehrt an, dass eine injektive Abbildung $f : X \to \mathbb{N}$ existiert. Ist X endlich, so ist nichts zu beweisen. Sei also X unendlich. Dann existiert nach Satz 4.6 eine injektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to X$. Daher folgt aus Satz 3.2, dass eine bijektive Abbildung $h : \mathbb{N} \to X$ existiert, und damit ist X abzählbar unendlich. Damit ist Teil (i) bewiesen. Nach Satz 3.2 is eine Menge X genau dann überabzählbar wenn keine injektive Abbildung $f : X \to \mathbb{N}$ existiert, und nach Teil (i) heisst das, dass X nicht abzählbar ist. Damit ist auch Teil (ii) bewiesen. □

Beweis von Satz 4.6. Wir zeigen (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei X eine unendliche Menge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n \subset 2^X$ die Menge der n-elementigen Teilmengen von X:

$$\mathcal{A}_n := \{A \subset X \mid A \text{ ist endlich und } \#A = n\}.$$

Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ ist. Für $n = 1$ wähle ein Element $x \in X$ und definiere $A := \{x\}$. Dann ist $A \in \mathcal{A}_1$ und daher $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Nun sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$. Wähle ein Element $A \in \mathcal{A}_n$. Nach Definition 4.1 existiert eine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to A$. Da X nicht endlich ist, gilt $A \subsetneq X$. Also gibt es ein Element $x \in X \setminus A$. Sei $A' := A \cup \{x\}$ und definiere die Abbildung $f' : \{1, \ldots, n+1\} \to A'$ durch $f'(i) := f(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f'(n+1) := x'$. Da $x' \notin A$ ist, ist diese Abbildung bijektiv. Daher ist $A' \in \mathcal{A}_{n+1}$ und somit ist $\mathcal{A}_{n+1} \neq \emptyset$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Nach (ii) gilt $\mathcal{A}_{2^n} \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \to 2^X : n \mapsto A_n$$

so dass $A_n \in \mathcal{A}_{2^n}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist $A_n \subset X$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine endliche Menge mit

$$\#A_n = 2^n.$$

Nun folgt aus Lemma 4.4 (ii) durch vollständige Induktion, dass die Menge $A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und

$$\#\left(A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 < 2^n = \#A_n.$$

Nach Lemma 4.3 gibt es also keine injektive Abbildung von A_n in die Menge $A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$. Insbesondere gilt $A_n \not\subset A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ und daher

$$X_n := A_n \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \neq \emptyset$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt auch $X_m \cap X_n = \emptyset$ für $m \neq n$. Nach dem Auswahlaxiom existiert also eine Abbildung

$$g : \mathbb{N} \to X,$$

so dass

$$g(n) \in X_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Da $X_m \cap X_n = \emptyset$ ist für $m \neq n$, ist diese Abbildung injektiv. Damit haben wir gezeigt, dass (iii) aus (ii) folgt.

Wir zeigen (iii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $g : \mathbb{N} \to X$ eine injektive Abbildung. Dann ist X nicht die leere Menge. Wir nehmen an, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to X$. Dann ist die Abbildung

$$f^{-1} \circ g : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$$

injektiv, und ebenso ihre Restriktion auf die Teilmennge $\{1, \ldots, n+1\} \subset \mathbb{N}$. Eine solche injektive Abbildung existiert aber nicht, nach den Dirichlet'schen Schubfachprinzip in Lemma 4.3 mit $m := n + 1$. Also gibt es, für jedes $n \in \mathbb{N}$, auch keine bijektive Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to X$. Daher ist X nicht endlich. Damit ist Satz 4.6 bewiesen. $\square$

5 Beispiele

Beispiel 5.1. *Seien X und Y endliche Mengen. Die Menge Y has genau dann grössere Mächtigkeit als X, wenn*

$$\#X < \#Y.$$

Beweis: Seien m und n natürliche Zahlen. Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat genau dann grössere Mächtigkeit als die Menge $\{1, \ldots, m\}$, wenn es keine injektive Abbildung $g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ gibt (Satz 3.2). Dies ist genau dann der Fall, wenn $n > m$ ist (Lemma 4.3). Damit folgt die Behauptung aus Definition 4.1.

Beispiel 5.2. Jede unendliche Menge hat grössere Mächtigkeit als jede endliche Menge. Jede unendliche Menge hat entweder grössere oder gleiche Mächtigkeit wie jede abzählbare Menge. Beide Aussagen folgen aus Satz 4.6.

Beispiel 5.3. *Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.* **Beweis:** Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$f(1) := 0, \qquad f(2n) = n, \qquad f(2n+1) := -n \tag{6}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.4. *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei X_i eine abzählbar unendliche Menge. Dann ist auch die Vereinigung $X := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ abzählbar unendlich.* **Beweis:** Wähle eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zum Beispiel

$$\phi\left(\frac{k(k-1)}{2} + i\right) := (i, k+1-i), \qquad i = 1, \ldots, k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Für $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i : \mathbb{N} \to X_i$ eine bijektive Abbildung. Wir definieren die Abbildung $g : \mathbb{N} \to X$ durch

$$g(n) := f_i(j) \in X_i \subset X, \qquad (i, j) := \phi(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Abbildung ist surjektiv. Nach dem Auswahlaxiom existiert daher eine injektive Abbildung $g : X \to \mathbb{N}$. Offensichtlich existiert auch eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ (zum Beispiel $f := f_1 : \mathbb{N} \to X_1 \subset X$). Daher existiert nach Satz 3.2 eine bijektive Abbildung $h : \mathbb{N} \to X$. Also ist X abzählbar unendlich.

Beispiel 5.5. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.*
Beweis: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die bijektive Abbildung (6) aus Beispiel 5.3 und sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die bijektive Abbildung (7) aus Beispiel 5.4. Definiere die Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ durch

$$F(n) := \frac{p}{q}, \qquad p := f(i), \qquad q := j, \qquad (i, j) := \phi(n).$$

Diese Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist surjektiv. Also folgt aus dem Auswahlaxiom, dass eine injektive Abbildung $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ existiert. Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ist, existiert offensichtlich auch eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Nach Satz 3.2 existiert daher eine bijektive Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist.

Beispiel 5.6. *Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{E} := \{E \subset \mathbb{N}_0 \,|\, E \textit{ ist endlich}\}$$

der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ abzählbar unendlich. **Beweis:** Definiere eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ durch die Formel

$$f(E) := \sum_{i \in E} 2^i, \qquad E \in \mathcal{E}.$$

Übung: Diese Abbildung ist bijektiv.

Beispiel 5.7. *Für jede Menge X hat die Menge 2^X aller Teilmengen von X grössere Mächtigkeit als X.* **Beweis:** Sei $A : X \to 2^X$ eine Abbildung und

$$A_0 := \{x \in X \,|\, x \notin A(x)\}.$$

Diese Menge liegt nicht im Bild der Abbildung A. Denn für $x \in A_0$ gilt $x \notin A(x)$ und daher $x \in A_0 \setminus A(x)$. Und für $x \in X \setminus A_0$ gilt $x \in A(x)$ und daher $x \in A(x) \setminus A_0$. In beiden Fällen ist also $A(x) \neq A_0$. Damit ist gezeigt, dass unsere Abbildung $A : X \to 2^X$ nicht surjektiv ist. Da keine surjektive Abbildung von X nach 2^X existiert, existiert auch keine injektive Abbildung von 2^X nach X. Daher hat 2^X grössere Mächtigkeit als X.

Beispiel 5.8. Die Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig wie die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Nullen und Einsen. Eine bijektive Abbildung ist $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = 1\}$.

Beispiel 5.9. *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.* **Beweis:** Sei $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto x_n$ eine beliebige Abbildung. Wir zeigen dass sie nicht surjektiv ist. Dazu konstruieren wir eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass

$$x_n \notin I_n, \qquad |I_n| = \frac{1}{3^{n-1}} \qquad \forall \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Für $n = 1$ sei $I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2]$. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ konstruiert, dann sei

$$I_{n+1} := \begin{cases} \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right], & \text{falls } x_{n+1} \notin \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right], \\ \left[\frac{a_n+2b_n}{3}, b_n\right], & \text{falls } x_{n+1} \in \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right]. \end{cases}$$

(I_{n+1} wird also als das untere Drittel von I_n gewählt, falls dieses x_{n+1} nicht enthält, und andernfalls als das obere Drittel von I_n.) Nach dem Satz über Intervallschachtelungen existiert genau eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$, so dass $y \in I_n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $x_n \notin I_n$ ist, folgt daraus $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die gegebene Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv. Diese Abbildung war beliebig gewählt. Es existiert also keine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und daher ist $\mathbb{R}$ überabzählbar, wie behauptet.

Beispiel 5.10. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das mindestens zwei Elemente enthält. Dann sind I und $\mathbb{R}$ gleichmächtig.* **Beweis:** Erstens sind je zwei offene Intervalle $X = (a, b)$ und $Y = (c, d)$ (mit $a < b$ und $c < d$) gleichmächtig; eine Bijektion $f : X \to Y$ ist

$$f(x) := c + \frac{x-a}{b-a}(d-c), \qquad a < x < b.$$

Diese Formel definiert auch Bijektionen zwischen den entsprechenden halboffenen und abgeschlossenen Intervallen. Zweitens ist das Intervall $Y = (-1, 1)$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$; eine Bijektion $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad g^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad -1 < y < 1.$$

Diese Formel definiert auch Bijektionen $[0, \infty) \to [0, 1)$ und $(0, \infty) \to (0, 1)$. Drittens sind die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \cup \{*\}$ gleichmächtig. Eine bijektive Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{*\}$ ist

$$h(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ *, & \text{falls } x = 0, \\ x - 1, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Durch geeignete Kompositionen dieser Abbildungen erhalten wir Bijektionen von $\mathbb{R}$ auf jedes Intervall der Form (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ und ebenso auf die unbeschränkten Intervalle.

Beispiel 5.11. *Die Cantormenge $K \subset \mathbb{R}$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $2^{\mathbb{N}}$.*
Beweis: Die Cantormenge $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ ist der Durchschnitt einer absteigende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Die ersten drei Mengen sind

$$\begin{aligned} K_0 &:= [0,1], \\ K_1 &:= [0,1/3] \cup [2/3,1], \\ K_2 &:= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]. \end{aligned}$$

Allgemein ist K_n eine disjunkte Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen der Länge $1/3^n$, und K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man aus jedem dieser Intervalle das mittlere Drittel entfernt. Wir definieren eine Abbildung $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K$. Für $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist $\phi(a) \in K$ die eindeutige reelle Zahl, die die Bedingung

$$\phi(a) \in J_n(a) := \left[2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right] \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die Intervalle $(J_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bilden und $J_n(a) \subset K_n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt existiert für jedes $x \in K$ genau eine Folge $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, so dass $x \in J_n(a)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. (Übung!) Daher ist die Abbildung ϕ bijektiv. Die Behauptung folgt nun aus Beispiel 5.8.

Beispiel 5.12. *Die Menge $\mathbb{R}$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $2^{\mathbb{N}}$.* **Beweis:** Wir definieren eine Abbildung $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ mittels der Binärdarstellung der reellen Zahlen. Für $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist $\psi(a) \in [0,1]$ die eindeutige reelle Zahl, die die Bedingung

$$\psi(a) \in I_n(a) := \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right] \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die Intervalle $(I_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung bilden und $I_n(a) \subset [0,1]$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt existiert für jedes $x \in [0,1]$ eine Folge $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, so dass $x \in I_n(a)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$. (Übung!) Daher ist die Abbildung ψ surjektiv. Nach dem Auswahlaxiom existiert dann eine injektive Abbildung $f : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ausserdem existiert eine injektive Abbildung $\phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, deren Bildmenge die Cantormenge $K \subset [0,1]$ ist (siehe Beispiel 5.11). Daher existiert nach Satz 3.2 eine bijektive Abbildung von $[0,1]$ nach $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Da $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $[0,1]$ ist (Beispiel 5.10) und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gleichmächtig zu $2^{\mathbb{N}}$ ist (Beispiel 5.8), hat also $\mathbb{R}$ die gleiche Mächtigkeit wie $2^{\mathbb{N}}$.

6 Bemerkungen zur Mengenlehre

Die Kontinuumshypothese

Wir haben gesehen, dass die Cantormenge und alle nichttrivialen Intervalle die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ haben und ebenso die gleiche Mächtigkeit wie die Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Daraus ergibt sich fogende natürliche Frage.

Gibt es eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ die überabzählbar aber nicht gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist?

Cantors Kontinuumshypothese besagt, dass eine solche Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht existiert.

Cantors Kontinuumshypothese (CKH): *Jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.*

Da abzählbar definiert ist als gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und wir wissen, dass $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $2^{\mathbb{N}}$ ist, lässt sich die Cantorsche Kontinuumshypothese wie folgt verallgemeinern.

Die Allgemeine Kontinuumshypothese (AKH): *Sei X eine unendliche Menge. Jede Teilmenge von 2^X, die grössere Mächtigkeit als X hat, ist gleichmächtig zu 2^X.*

Offensichtlich ist (CKH) der Spezialfall $X = \mathbb{N}$ von (AKH). Die Frage bleibt jedoch bestehen, ob denn nun (CKH) oder (AKH) wahr sind. Und auf diese Frage gibt es zwei höchst erstaunliche Antworten: Zum einen hat Kurt Gödel 1938 gezeigt, dass sich die Cantorsche Kontinuumshypothese mit den Axiomen der Mengenlehre nicht widerlegen lässt. Zum anderen hat Paul Cohen 1963 gezeigt, dass sich die Cantorsche Kontinuumshypothese auch nicht aus den Axiomen der Mengenlehre herleiten lässt. Mit anderen Worten, man kann entweder (CKH) oder ihr Gegenteil zu den Axiomen der Mengenlehre hinzufügen, ohne dass dadurch ein Widerspruch erzeugt werden kann. Genauso verhält es sich mit (AKH). In denselben Veröffentlichungen haben Gödel und Cohen ebenfalls gezeigt, dass das Auswahlaxiom sich nicht mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre widerlegen lässt und sich auch nicht aus den übrigen Axiomen der Mengenlehre herleiten lässt. Hinzugefügt sei noch, dass Gödels berühmter Unvollständigkeitssatz besagt (in sehr vereinfachter Sprechweise), dass sich die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Mengenlehre nicht mit diesen Axiomen selbst beweisen lässt.

Das Russellsche Paradoxon

Der Beweis in Beispiel 5.7 ist eine Version des Russellschen Paradoxons: *Der Barbier rasiert alle die Männer, und nur die, die sich nicht selbst rasieren.* Rasiert sich nun dieser Barbier selbst? Genau dann, wenn er sich nicht selbst rasiert. Dies ist ein Widerspruch (es sei denn, der Barbier ist eine Frau).

Dies ist ein archetypisches Beispiel eines Widerspruchs, wie er beim naiven Umgang mit der Mengenlehre entstehen kann. Wir haben an Beispielen gesehen, dass Mengen auch selbst wieder Elemente anderer Mengen sein können. Man kann sogar Mengen konstruieren, die sich selbst als Element enthalten (zum Beispiel eine Menge $X = \{X\}$, deren einziges Element die Menge X selbst ist). Nun könnte man versucht sein, die *Menge $\mathcal{R}$ aller Mengen X zu bilden, die sich selbst nicht als Element enthalten.* Ist nun $\mathcal{R}$ selbst auch ein Element von $\mathcal{R}$? Wenn dies nicht der Fall ist, so erfüllt ja $\mathcal{R}$ das Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\mathcal{R}$ und muss somit doch ein Element von $\mathcal{R}$ sein. Ist aber $\mathcal{R}$ selbst ein Element von $\mathcal{R}$, so folgt daraus, dass $\mathcal{R}$ das Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\mathcal{R}$ nicht erfüllt, und daher doch kein Element von $\mathcal{R}$ sein kann. Dies ist der gleiche Widerspruch wie bei Russells Barbier, und wie er auch in Beispiel 5.7 aufgetaucht ist.

Um diesen Widerspruch aufzulösen, muss man die Grundlagen der Mengenlehre tiefer und genauer verstehen. Grob gesprochen, sind der Definition von Mengen und ihrer Elemente keine Grenzen gesetzt. Es ist auch nicht sinnvoll, und wäre in der mathematischen Theoriebildung viel zu hinderlich, künstlich irgendwelche Einschränkungen zu machen, was die Konstruktion von Mengen betrifft. Aber gerade deshalb macht es keinerlei Sinn, von der *“Menge aller Mengen”* zu sprechen, und ebensowenig von der *“Menge aller der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten”*, oder auch nur von der *“Menge aller der Mengen, die je genau ein Element enthalten”*. Man kann zwar, als mathematische Abstraktion, alle Mengen zusammenfassen zu einer Gesamtheit; diese *Gesamtheit aller Mengen* ist dann aber selbst nicht als Menge zu verstehen; sie wird oft als *echte Klasse* bezeichnet. Solche echten Klassen sind sozusagen “zu gross” um sich als Mengen zu qualifizieren. Sie können auch nicht als Elemente von Mengen auftreten.

Führt man eine solche Unterscheidung zwischen Mengen und echten Klassen rigoros durch, so kann das oben genannte Russellsche Paradoxon nicht auftreten. Man kann dieser Unterscheidung zwischen Mengen und echten Klassen eine genaue mathematische Formulierung geben. Dies führt jedoch tief hinein in die Grundlagen der Mengenlehre und geht weit über die in dieser

Vorlesung zu behandelnden Themen der Analysis hinaus. Im mathematischen Alltag genügt es in der Regel, *"zu viel Unendlichkeit"* zu vermeiden, um solchen Widersprüchen, wie sie beim allzu naiven Umgang mit der Mengenlehre entstehen können, auszuweichen.

Literatur

[1] Imre Leader, *Logic and Set Theory*, University of Cambridge, Michaelmas 2003. `www.maths.ed.ac.uk/~s0571100/Logic.pdf`