Analysis I & II - Vorlesungs-Script

Prof. Dietmar Salamon

12. April 2006

Mitschrift:
Raphael Honegger

Co-Coding:
Eveline Hardmeier

Graphics:
Cyrill Grueter

`$Id: analysis.tex 533 2005-10-28 10:35:10Z raphael $`

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

1.1 Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ = Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2...\}$ = Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ = Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \big| x, y \in \mathbb{R}\}$
$T = \{m \in \mathbb{N} \mid 24 \text{ ist durch } m \text{ teilbar } \}$
$S = \{m^2 + n^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

Lemma: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Zahl

$$x = \frac{p}{q} \qquad \text{so dass } x^2 = 2$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass eine der Zahlen p, q ungerade ist.

$$\text{Da } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ ist, gilt } p^2 = 2q^2$$

Also ist p gerade. Daher ist p^2 durch 4 teilbar.

$$\text{Also ist } q^2 = \frac{p^2}{2} \text{ gerade.}$$

Daher ist q gerade
→ Widerspruch (QED)

Übung: der goldene Schnitt ist irrational

Wichtige Abkürzungen:

$\forall$	"für alle"
$\exists$	"es existiert ein"
$\exists!$	"es existiert genau ein"
$A \Rightarrow B$	"aus A folgt B"
	"wenn A gilt, dann gilt auch B"

1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

- Körperaxiome
- Ordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiom

1.2.1 Körperaxiome

(Rechenregeln der vier Grundrechenarten)

Je zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ werden zwei weitere reelle Zahlen $x+y$ (Summe) und $x \cdot y$ (Produkt) zugeordent.
Diese beiden Operationen haben folgende Eigenschaften:

(K1) Addition und Multiplikation sind *kommutativ*, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

(K2) Addition und Multiplikation sind *assoziativ*, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

(K3) Es gibt zwei verschiedene *neutrale Elemente* (0 für die Addition und 1 für die Multiplikation), so dass folgendes gilt:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x+0 = x \qquad 1\cdot x = x$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists!(-x) \in \mathbb{R}$ so dass $x + (-x) = 0$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\, \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}$ so dass $x \cdot x^{-1} = 1$

(K4) Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \qquad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

Bemerkung 1: Sowohl $\mathbb{Q}$, als auch $\mathbb{R}$ erfüllen die Körperaxiome

Bemerkung 2: Alle üblichen Rechenregeln folgen aus den Körperaxiomen

Notationen:

- $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + (-y) =: x - y \qquad x \cdot y =: xy$$

- $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

$$x \cdot y^{-1} =: \frac{x}{y}$$

Lemma 1: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt folgendes

(i) $-(x+y) = (-x) + (-y)$
$-(-x) = x$

(ii) $x \cdot 0 = 0$

(iii) Falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$ so gilt

1. $xy \neq 0$
2. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$
3. $(x^{-1})^{-1} = x$

(iv) $(-x)y = x(-y) = -xy$
$(-x)(-y) = xy$

Beweis:

(i) $-(x+y) = (-x) + (-y)$:

$$\begin{aligned}
(x+y) + ((-x)+(-y)) &\overset{\text{K1}}{=} (x+y) + ((-y)+(-x)) \\
&\overset{\text{K2}}{=} x + (y + ((-y)+(-x))) \\
&\overset{\text{K2}}{=} x + ((y+(-y)) + (-x)) \\
&\overset{\text{K3}}{=} x + (0 + (-x)) \\
&\overset{\text{K1}}{=} x + ((-x) + 0) \\
&\overset{\text{K3}}{=} x + (-x) \\
&\overset{\text{K3}}{=} 0
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit des inversen Elements:

$$\Rightarrow -(x+y) = (-x) + (-y)$$

$-(-x) = x$:

Sei $y := -x$

$$\Rightarrow y + x = (-x) + x \overset{\text{K1}}{=} x + (-x) \overset{\text{K3}}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = -y = -(-x)$$

(ii) $x \cdot 0 = 0$:

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\overset{\text{K3}}{=} x \cdot 0 + 0 \\ &\overset{\text{K3}}{=} x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \\ &\overset{\text{K2}}{=} (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) \\ &\overset{\text{K4}}{=} x \cdot (0 + 0) + (-x \cdot 0) \\ &\overset{\text{K3}}{=} x \cdot 0 + (-x \cdot 0) \\ &\overset{\text{K3}}{=} 0 \end{aligned}$$

(iii) Sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$

1. $xy \neq 0$:

   Annahme: $xy = 0$

   $$\Rightarrow x = x \cdot 1 = x(yy^{-1}) = (xy)y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot 0 \overset{\text{(ii)}}{=} 0$$

   $\rightarrow$ Widerspruch!

2. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$:

   $$\begin{aligned} (xy)(x^{-1}y^{-1}) &= (xy)(y^{-1}x^{-1}) \\ &= x\left(y(y^{-1}x^{-1})\right) \\ &= x\left((yy^{-1})x^{-1}\right) \\ &= x(1 \cdot x^{-1}) \\ &= x(x^{-1} \cdot 1) \\ &= xx^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Eindeutigkeit des inversen Elements:

   $$\Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

3. $(x^{-1})^{-1} = x$:

   Sei $y := x^{-1}$

   $$\Rightarrow yx = x^{-1}x = xx^{-1} = 1$$

   Eindeutigkeit der Inversen:

   $$\Rightarrow x = y^{-1} = (x^{-1})^{-1}$$

(iv) $(-x)y = x(-y) = -xy$:

$$xy + (-x)y \overset{\text{K1}}{=} yx + y(-x) \overset{\text{K4}}{=} y\left(x + (-x)\right) \overset{\text{K3}}{=} y \cdot 0 \overset{\text{(ii)}}{=} 0$$

Eindeutigkeit der Inversen:

$$\Rightarrow (-x)y = -xy \quad (\star)$$

$$\Rightarrow x(-y) = (-y)x \stackrel{(\star)}{=} -yx = -xy$$

$(-x)(-y) = xy$:

$$(-x)(-y) \stackrel{(\star)}{=} -x(-y) = -(-xy) \stackrel{(i)}{=} xy$$

(QED)

1.2.2 Ordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge von "positiven" reellen Zahlen.
Wir schreiben $x > 0$ wenn x positiv ist.
Diese Teilmenge der positiven reellen Zahlen hat folgende Eigenschaften:

(O1) Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ erfüllt genau eine der Bedingungen

$$x > 0 \qquad x = 0 \qquad -x > 0$$

(O2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x > 0, y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0,\, xy > 0$$

(O3) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{R}$ so dass $n - x > 0$

Bezeichnungen:

- x heisst "negativ" wenn $-x$ positiv ist
- Wir schreiben $x < y$ genau dann wenn $y - x > 0$
- Wir schreiben $x \leq y$ wenn $x < y$ oder $x = y$

1.2.3 Vollständigkeitsaxiom

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei Teilmengen so dass

(i) $\mathbb{R} = A \cup B, A \cap B = \varnothing; A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$

(ii) $a \in A, a' < a \Rightarrow a' \in A$

(iii) $b \in B, b' > b \Rightarrow b' \in B$

Dann gibt es (genau) ein Element $x \in \mathbb{R}$ so dass gilt:

- $a \leq x\, \forall a \in A$
- $b \geq x\, \forall b \in B$

Bemerkung 1: $\mathbb{Q}$ erfüllt die Körper- und Ordnungsaxiome aber nicht das Vollständigkeitsaxiom

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \big| x < \sqrt{2}\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{Q} \big| x > \sqrt{2}\}$$

Bemerkung 2: Eindeutigkeit im Vollständigkeitsaxiom ist automatisch erfüllt

Eindeutigkeit von x?

Angenommen $\exists\, y \neq x$ so dass

$$a \leq x\, \forall a \in A$$

$$b \geq y\, \forall b \in B$$

ohne Beschränkung der Allgmeinheit $x > y$

$$\Rightarrow a \leq x < y \leq b \, \forall a \in A, \forall b \in B$$

Sei $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$

$$\Rightarrow z \notin A (\text{da } z > x) \text{ und } z \notin B (\text{da } z < y)$$

$z \notin A \cup B$ d.h. $A \cup B \neq \mathbb{R}$
$\rightarrow$ Widerspruch!

$$x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \text{ so dass } x < z < y$$

1.2.4 Ordnungsaxiome (Fortsetzung)

Lemma 2: Für alle reellen Zahlen x, y, z gilt folgendes:

(i) $x < y, y < z \quad \Rightarrow x < z$

(ii) $x < y \quad \Rightarrow x + z < y + z$

(iii) $x < y, z > 0 \quad \Rightarrow xz < yz$

(iv) $x < y \quad \Rightarrow -y < -x$

(v) $x < y, z < 0 \quad \Rightarrow yz < xz$

(vi) $x \neq 0 \quad \Rightarrow x^2 > 0$

(vii) $0 < x < y \quad \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(viii) Jede natürliche Zahl ist positiv

Korollar 1:

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Beweis:

$$y - \frac{x+y}{2} = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2}$$

Nach Lemma 2 (viii):

$$2 > 0 \overset{\text{(vii)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} > 0$$
$$y - x > 0 \overset{\text{O2}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}(y - x) > 0$$

(QED)

Korollar 2:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Beweis: Sei $x := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$$\overset{\text{O3}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : n - x > 0$$
$$\Rightarrow n > x > 0$$
$$\overset{\text{(vii)}}{\Rightarrow} \frac{1}{n} < \frac{1}{x} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

(QED)

Beweis von Lemma 2:

(i) $x < y, y < z$

$$\Rightarrow y - x > 0, z - y > 0$$
$$\stackrel{(O2)}{\Rightarrow} \underbrace{(z - y) + (y - x)}_{=z-x} > 0$$
$$\Rightarrow x < z$$

(ii) $x < y$

$$y - x = y - x + z - z = (y + z) - (x + z) > 0$$
$$\Rightarrow x + z < y + z$$

(iii) $x < y, z > 0$

$$\Rightarrow y - x > 0, z > 0$$
$$\stackrel{(O2)}{\Rightarrow} \underbrace{(y - x)z}_{=yz-xz} > 0$$
$$\Rightarrow xz < yz$$

(iv) $x < y$

$$y - x = (-x) - (-y) > 0$$

(v) $x < y, z < 0$

$$\Rightarrow y - x > 0, -z > 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{(-z)(y - x)}_{=xz-yz} > 0$$
$$\Rightarrow yz < xz$$

(vi) $x \neq 0$

$$\stackrel{(O1)}{\Rightarrow} x > 0 \text{ oder } -x > 0$$
$$\Rightarrow x^2 = x \cdot x \stackrel{\text{Lem1}}{=} (-x)(-x) \stackrel{(O2)}{>} 0$$

(vii) Wir zeigen: $y > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} > 0$

Annahme: $\frac{1}{y} \leq 0$

$$\frac{1}{y} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < 0$$

Ausserdem gilt nach (O2): $y^2 > 0$

$$\stackrel{(iii),(iv)}{\Rightarrow} \underbrace{y^2 \cdot \frac{1}{y}}_{=y} < 0$$

$\rightarrow$ Widerspruch!

$$0 < x < y$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{yx} = \underbrace{\frac{1}{xy}}_{>0} \underbrace{(y - x)}_{>0} \stackrel{(O2)}{>} 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

(viii) $n \in \mathbb{N}, n > 0$

$$1 = 1^2 \stackrel{(vi)}{>} 0 \Rightarrow n + 1 > 0$$

(Vollständige Induktion)

(QED)

1.2.5 Vollständige Induktion

Wir wollen beweisen, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist.

Induktionsverankerung: $A(n)$ ist wahr für $n = a$

Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.
Wenn dies gezeigt ist, so wissen wir, dass $A(n)$ wahr ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Übung: Beweisen sie durch vollständige Induktion:

- $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $S_n^p := 1^p + 2^p + ... + n^p$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix} S_n^{p+1-k} = (n+1)^{p+1} - 1$$

Lemma 3 (Bernoulli'sche Ungleichung): Für jede reelle Zahl x und jede natürliche Zahl n gilt folgendes:

$$\left.\begin{array}{l} x > -1 \\ x \neq 0 \\ n \geq 2 \end{array}\right\} (1+x)^n > 1 + nx$$

Beweis: (Vollständige Induktion)
$n = 2$:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x \text{ (da } x \neq 0)$$

$n \geq 2$: Wir nehmen an, die Aussage gilt für n

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{>1+nx} \underbrace{(1+x)}_{>0}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$$

(QED)

Satz 1:

(i) $\forall q > 1, \forall k \in \mathbb{R}$
$\exists n \in \mathbb{N} : q^n > k$

(ii) $\forall q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1, \forall \varepsilon > 0$
$\exists n \in \mathbb{N} : q^n < \varepsilon$

Beweis:

(i) $x := q - 1 > 0$

$$\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow} (1+x)^n > 1 + nx$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq 2$ und $n > \frac{k}{x}$ (nach (O3) gibt es so ein n)

$$\Rightarrow q^n > 1 + nx > nx > k$$

(ii) $0 < q < 1$

$$\overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} \frac{1}{q} > 1 \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} q^n < \varepsilon$$

(QED)

Notation: Seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$$

Beispiel 1: $x_k = a^k$, $k = 0, ..., n$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \ \forall a \neq 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\ &= 1 - a^{n+1}\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 2: $x_k = k$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)n$$

Bemerkung: Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Elementen

$$= n!$$

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen

$$= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Anzahl aller Teilmenge von $\{1, ..., n\}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Sei $k = k_1 + ... + k_n$, dann ist

$$\frac{k!}{k_1!...k_n!}$$

die Anzahl der Möglichkeiten k verschiedene Elemente in n Teilmengen der Grösse $k_1, k_2, ...k_n$ aufzuteilen.

Satz 2: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (\star)$$

Bemerkung: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, ..., n\}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k+n+1-k) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 2: $n = 1$:

$$x + y = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} \quad \checkmark$$

$n \geq 1$: Annahme $(\star)$ gilt für n

$$\begin{aligned}\Rightarrow (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{0} y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{0} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}\end{aligned}$$

(QED)

1.2.6 Supremum und Infimum

Definition: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ heisst *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass

$$x \leq a \text{ bzw. } x \geq a \, \forall x \in X$$

Jedes solche a heisst *obere* bzw. *untere Schranke* von X

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst *Supremum* bzw. *Infimum* oder *kleinste obere* bzw. *grösste untere Schranke* von X wenn folgendes gilt:

(i) a ist eine obere bzw. untere Schranke von X

(ii) Wenn $a' \in \mathbb{R}$ eine weitere obere bzw. untere Schranke von X ist, dann gilt

$$a \leq a' \text{ bzw. } a \geq a'$$

Satz 3: Jede nach oben bzw. unten beschränkte nicht leere Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ besitzt genau ein Supremum bzw. Infimum.

Bezeichnung:

- Supremum $a = \sup X$
- Infimum $a = \inf X$

Konvention:

- $\sup \varnothing := -\infty$
- $\inf \varnothing := +\infty$

Beweis: Sei X nach oben beschränkt und $X \subset \mathbb{R}$ nicht leer.
Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \big| b \text{ ist eine obere Schranke von } X\}$, d.h.

$$b \in B \Leftrightarrow \forall x \in X : x \leq b$$

und $A := \{a \in \mathbb{R} \big| a \text{ ist keine obere Schranke von } X\}$, d.h.

$$a \in A \Leftrightarrow \exists x \in X : x > a$$

Es gilt:

- $\mathbb{R} = A \cup B, A \cap B = \varnothing$
- $B \neq \varnothing$, da X nach oben beschränkt
- $A \neq \varnothing$, da $X \neq \varnothing$
- $a \in A$, $a' \leq a \Rightarrow a' \in A$
- $b \in B$, $b' \geq b \Rightarrow b' \in B$

$\Rightarrow \exists! y \in \mathbb{R}$ so dass

$$a \leq y \,\forall a \in A \qquad b \geq y \,\forall b \in B$$

Behauptung: y ist ein Supremum von X

Wir wissen $y \leq b$ für jede obere Schranke b von X

Zu zeigen: y ist selbst eine obere Schranke von X

Annahme: y ist keine obere Schranke von X, d.h. $y \in A$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists x \in X \text{ so dass } x > y \\
&\Rightarrow x - y > 0 \\
&\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } \frac{1}{n} < x - y \\
&\Rightarrow y + \frac{1}{n} < x \\
&\Rightarrow y + \frac{1}{n} \in A
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Widerspruch, da $a \leq y \ \forall a \in A$!

Eindeutigkeit des Supremums: Seien y_1 und y_2 Suprema von X

$$\Rightarrow y_1 \leq y_2,\, y_2 \leq y_1 \Rightarrow y_1 = y_2$$

(QED)

Übung: Existenz und Eindeutigkeit des Supremums $\Rightarrow$ Vollständigkeitsaxiom

Satz 4: Jede nach oben bzw. unten beschränkte nicht leere Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ enthält ein grösstes bzw. kleinstes Element.

Beweis:

- *1.Fall:* $A \subset \mathbb{N}$

  Annahme: A enthält kein kleinstes Element

  Behauptung: Dann gilt

  $$A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  $$\Rightarrow A = \varnothing$$

  Vollständigke Induktion: $n = 1$:

  $1 \notin A$ da sonst 1 das kleinste Element von A wäre.

  $n \geq 1$: Sei $A \cap \{1, ..., n\} = \varnothing$

  $$\Rightarrow A \cap \{1, ..., n+1\} = \varnothing$$

  sonst wäre $n + 1$ das kleinste Element von A

- *2.Fall:* $A \subset \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt

  $$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \, \forall a \in A$$

  Nach (O3) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $n > c$

  $$\Rightarrow B := \{n - a \big| a \in A\} \subset \mathbb{N}$$

  $$\overset{\text{Fall1}}{\Rightarrow} \exists \text{ kleinste Zahl } b_0 \in B$$

  $$\Rightarrow a_0 := n - b_0 \text{ ist die grösste Zahl von } A$$

- *3.Fall:* $A \subset \mathbb{Z}$ ist nach unten beschränkt

  $$B := \{-a \big| a \in A\}$$

  $$\rightarrow \text{2. Fall}$$

(QED)

Satz 5: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ $\exists q \in \mathbb{Q}$:

$$x < q < y$$

Beweis: Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < y - x$.
Sei $A := \{m \in \mathbb{Z} \big| m > nx\} \subset \mathbb{Z}$

$$\overset{\text{O3}}{\Rightarrow} A \neq 0 \text{ und } A \text{ nach unten beschränkt}$$

$$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} \exists m_0 \in A \text{ so dass } m_0 \leq m \ \forall m \in A$$
$$\Rightarrow m_0 > nx \geq m_0 - 1$$
$$\Rightarrow x < \frac{m_0}{n} = \frac{m_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$$

(QED)

Definition: Ein *Intervall* ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ so dass gilt:

$$x, y \in I, \ z \in \mathbb{R}, \ x < z < y \Rightarrow z \in I$$

Beispiele:

- $I = \varnothing$ abgeschlossen, kompakt, offen
  $I = \mathbb{R}$ abgeschlossen, offen
  $I = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ abgeschlossen, kompakt
- Endliche Intervalle:

  $I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \big| a \leq x \leq b\}$ kompakt, abgeschlossen
  $I = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \big| a \leq x < b\}$
  $I = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \big| a < x \leq b\}$
  $I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \big| a < x < b\}$ offen
- Unendliche Intervalle:

  $I = [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \big| x \geq a\}$ abgeschlossen
  $I = (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \big| x \leq b\}$ abgeschlossen
  $I = (a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \big| x > a\}$ offen
  $I = (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \big| x < b\}$ offen

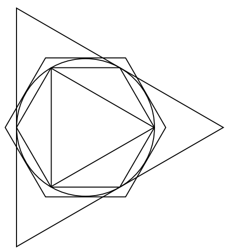
Definition: Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, ...$ von nicht leeren kompakten Intervallen (auch mit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet), die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1,2,3...$

(ii) Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|I_n| < \varepsilon$$

Archimedes: Berechnung von π



Satz 6: Für jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ so dass

$$x \in I_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Sei $I_n := [a_n, b_n], \ a_n \leq b_n$

1. $a_m \leq b_n \, \forall m,n \in \mathbb{N}$

   $m \leq n$: $a_m \leq a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq ... \leq a_n \leq b_n$
   $m \geq n$: $b_n \geq b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq ... \geq b_m \geq a_m$

2. Seien
   $$x := \sup\{a_m \big| m \in \mathbb{N}\} \qquad y := \inf\{b_n \big| n \in \mathbb{N}\}$$
   Jedes b_n ist eine obere Schranke von $\{a_m \big| m \in \mathbb{N}\}$, d.h.
   $$x \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
   $\Rightarrow x$ ist eine untere Schranke von $\{b_n \big| n \in \mathbb{N}\}$, d.h.
   $$x \leq y$$

3. Annahme: $x \neq y$

$$\begin{aligned}
&\overset{2.}{\Rightarrow} x < y \\
&\Rightarrow \varepsilon := y - x > 0 \\
&\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } \underbrace{|I_n|}_{=b_n - a_n} < \varepsilon \\
&\Rightarrow a_n \leq x < y \leq b_n \\
&\Rightarrow \underbrace{b_n - a_n}_{=|I_n|} \geq y - a_n \geq y - x = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Widerspruch da $|I_n| < \varepsilon$ und $|I_n| \geq \varepsilon$!

$$\Rightarrow x = y$$

4. $a_n \leq x = y \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow y = x \in I_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Eindeutigkeit: $z \in I_n \, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \leq z \leq y = x \\
&\Rightarrow a_n \leq z \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow z = x = y
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 7: Für jedes $x > 0$ und jede natürliche Zahl n gibt es genau eine Zahl $y > 0$ so dass $y^n = x$

Bemerkung: Dieses y nennen wir die *n-te Wurzel von x*. Wir schreiben

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Bemerkung 2:

1.) $\forall x, y > 0$ gilt $(xy)^{1/n} = x^{1/n} y^{1/n}$

2.) $\forall x > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt $(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$

Beweis: Übung

Bezeichung:

$$x^{m/n} := (x^m)^{1/n} \qquad x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}}$$

Damit haben wir x^q definiert für jedes $x > 0$ und jedes $q \in \mathbb{Q}$

Aussagen:

- $A \wedge B$ "und" (Verknüpfung von zwei Aussagen)

B╲ A	F	W
F	F	F
W	F	W

- $A \vee B$ "oder"

B╲ A	F	W
F	F	W
W	W	W

- $\neg A$ “nicht”

B╲A	F	W
F	W	F
W	W	W

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$
$$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B) = (\neg A \vee \neg\neg B) = (\neg\neg B \vee \neg A) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Bemerkung 3: In Lemma 1 haben wir gezeigt, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$\underbrace{x \neq 0 \wedge y \neq 0}_{A} \Rightarrow \underbrace{xy \neq 0}_{B}$$

das heisst $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $xy = 0$ dann ist entweder $x = 0$ oder $y = 0$ (oder beides).

Übung: Seien $y, z > 0, n \in \mathbb{N}$

$$y^n < z^n \Leftrightarrow y < z$$

Beweis von Satz 7: *Eindeutigkeit:* Seien $y > 0, z > 0$ mit $y^n = z^n = x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{y}{z}\right)^n = \frac{y^n}{z^n} = \frac{x}{x} = 1 \\
&\Rightarrow 0 = 1 - \left(\frac{y}{z}\right)^n = \underbrace{\left(1 - \frac{y}{z}\right)}_{=0} \underbrace{\left(1 + \left(\frac{y}{z}\right) + ... + \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1}\right)}_{>0} \\
&\Rightarrow 1 - \frac{y}{z} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{y}{z} = 1 \Rightarrow y = z
\end{aligned}$$

Existenz: Sei $B := \{b \in \mathbb{R} \big| b > 0, b^n > x\}$

$\Rightarrow B$ ist nach unten beschänkt und $B \neq \varnothing$
($\exists m \in \mathbb{N}$ so dass $m > x \Rightarrow m^n \geq m > x$)
$\overset{\text{Sa3}}{\Rightarrow} B$ hat ein Infimum

$$y := \inf\{b \in \mathbb{R} \big| b > 0, b^n > x\}$$

Behauptung 1: $y > 0$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{m} < x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^n \leq \frac{1}{m} < x < b^n \,\forall b \in B \\
&\Rightarrow \frac{1}{m} < b \,\forall b \in B
\end{aligned}$$

$\frac{1}{m}$ ist eine untere Schranke von B

$$\Rightarrow y \geq \frac{1}{m} > 0$$

Behauptung 2: $y^n \geq x$

Annahme: $y^n < x$

$\exists m \in \mathbb{N}$, so dass

$$m > \frac{(1+y)^n}{x - y^n}$$

$$\Rightarrow x - y^n > \frac{(1+y)^n}{m}$$
$$\Rightarrow x > y^n + \frac{(1+y)^n}{m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left(y + \frac{1}{m}\right)^n &= y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \\
&\leq y^n + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \\
&< y^n + \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k}}_{(1+y)^n} \\
&= y^n + \frac{(1+y)^n}{m} \\
&< x \\
\Rightarrow \left(y + \frac{1}{m}\right)^n &< x < b^n \\
\Rightarrow y + \frac{1}{m} &\leq b \, \forall b \in B
\end{aligned}$$

$y + \frac{1}{m}$ kann aber keine untere Schranke von B sein da $y = \inf B$

Behauptung 3: $y^n \leq x$

Annahme: $y^n > x$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$m > \frac{(1+y)^n}{y^n - x} > \frac{1}{m}, \; y > \frac{1}{m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left(y - \frac{1}{m}\right) &= y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{m}\right)^k \\
&\geq y^n - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} \\
&> y^n - \frac{(1+y)^n}{m} \\
&> x \\
\Rightarrow \left(y - \frac{1}{m}\right)^n &> x \\
y - \frac{1}{m} &> 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{m} \in B$$

$\rightarrow$ Widerspruch! (QED)

Satz 8: $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x_1, ..., x_n > 0$ gilt

$$\underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k}_{\text{arithmetische Mittel}}$$

Lemma 4: Seien $p, q > 1$, wobei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$\Rightarrow \forall a, b > 0$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Beweis: Sei $c := b^{1/(p-1)}$, $p \in \mathbb{N}$ und

$$q = \frac{p}{p-1}$$

Wir zeigen:

$$pac^{p-1} \leq a^p + (p-1)c^p \; \forall a, c > 0 \quad (\star)$$

- 1. Fall: $a = c$

$$pc^p \leq pc^p$$

- 2. Fall: $a < c$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a(a^{p-2} + a^{p-3}c + ... + ac^{p-3} + c^{p-2}) < (p-1)c^{p-1} \\
&\Rightarrow a\frac{c^{p-1} - a^{p-1}}{c-a} < (p-1)c^{p-1} \\
&\Rightarrow ac^{p-1} - a^p < (p-1)c^{p-1}(c-a) \\
&\Rightarrow ac^{p-1} < (p-1)c^p - (p-1)ac^{p-1} + a^p \\
&\Rightarrow pac^{p-1} < a^p + (p-1)c^p
\end{aligned}$$

- 3.Fall: $a > c$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (p-1)c^{p-1} < a(a^{p-2} + a^{p-3}c + ... + c^{p-2}) \\
&\Rightarrow (p-1)c^{p-1} = a\frac{a^{p-1} - c^{p-1}}{a-c} \\
&\Rightarrow (p-1)c^{p-1}(a-c) < a^p - ac^{p-1} \\
&\Rightarrow pac^{p-1} \leq a^p + (p-1)c^p \quad (\star)
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$c = b^{\frac{1}{p-1}} \qquad c^{p-1} = b \qquad q = \frac{p}{p-1}$$

$$\Rightarrow pab \leq a^p + (p-1)b^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

(QED)

Beweis von Satz 8: Induktion über n

$n = 1$: klar

$n = 2$:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$a := \sqrt{x_1} \qquad b := \sqrt{x_2}$$

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$$

$n \geq 2$: Seien $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1} > 0$

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} x_{n+1}^{1/(n+1)} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{n}{n+1}} x_{n+1}^{1/(n+1)}$$

(nach Induktionsannahme)

$$a := x_{n+1}^{1/(n+1)} \qquad b := \left(\frac{1}{n}\sum i = 1^n x_i\right) \qquad p = n+1 \Rightarrow q = \frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{Lem4}}{\Rightarrow} \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq ab \\
&\overset{\text{Lem4}}{\leq} \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \\
&= \frac{1}{n+1}x_{n+1} + \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i
\end{aligned}$$

(QED)

1.2.7 Die Betragsfunktion

Definition: Die *Betragsfunktion* ordnet jeder reellen Zahl x die Zahl $|x|$ zu, wobei

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x > 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Lemma 5: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \leftarrow$ Dreiechsungleichung

(iv) $|xy| = |x||y|$

Beweis:

(i) trivial

(ii) trivial

(iv) $|x| = \sqrt{x^2}$

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$$\begin{aligned}
|x+y|^2 &= (x+y)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 \\
&\leq x^2 + 2|xy| + y^2 \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
&= (|x| + |y|)^2
\end{aligned}$$

(QED)

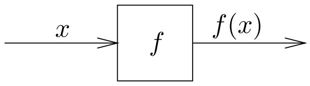
Übung: Seien $x, y > 0$ dann gilt $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$

1.3 Funktionen/Abbildungen

Definition: Seien X, Y Mengen.
Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) von X nach Y ist eine Zuordnung

$$f : X \longrightarrow Y$$

die jedem Element $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) \in Y$ zuordent.



Beispiel 1: $X = Y = \{1, 2, 3\}$

a) $f(1) = 2$
$f(2) = 3$
$f(3) = 1$

b) $f(1) = 1$
$f(2) = 1$
$f(3) = 3$

Wie viele Abbildungen $f : \{1, 2, 3\}$ gibt es?

Beispiel 2: $X = Y = \mathbb{R}$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = 37$ (konstante Funktion)

d) $f(x) = \cos x$

e) $f(x) = -x$

Beispiel 3: $X = Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Beispiel 4: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

Beispiel 5: $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$

a) $f(x, y) = x + y$

b) $f(x, y) = xy$

Beispiel 6: $X = Y$

$$f(x) = x \text{ (Identität)}$$

Bezeichnung: $f : X \longrightarrow Y$ Funktion

- X *Definitionsbereich* von f
- Y *Bildbereich* von f
- $f(X) := \{f(x) \big| x \in X\}$ "Bild" von f

Definition: Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heisst

1. *injektiv*, wenn $\forall x_1, x_2 \in X$ gilt:
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
2. *surjektiv*, wenn $f(X) = Y$ ist, d.h. $\forall y \in Y \, \exists x \in X$:
$$f(x) = y$$
3. *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist

Übung: Seien $X := \{1, ..., n\}$ und $Y := \{1, ..., m\}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.
$\Rightarrow f$ ist nicht injektiv.
(Dirichlet'sches Schubfach-Prinzip)

Definition: Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Abbildungen.
Die *Komposition* von f und g ist die Abbildung $g \circ f : X \longrightarrow Z$, die jedem Element $x \in X$ das Element $g \circ f(x) := g(f(x))$ zuordnet.

Bemerkung: Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es genau eine Abbildung $g : Y \longrightarrow X$, so dass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.
Dieses g nennen wir *Umkehrabbildung* von f und bezeichnen es mit
$$f^{-1} := g$$

Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$
$$\underbrace{f(x)}_{\text{bijektiv}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \; \forall |y| < 1$$

Die Gleichung
$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
hat für jedes $y \in (-1, 1)$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$, nämlich
$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Definition: Zwei Mengen X und Y heissen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt.

Y hat *grössere Mächtigkeit* als X, wenn X zu einer Teilmenge von Y gleichmächtig ist, nicht aber Y zu einer Teilmenge von X, d.h.
$$\exists f : X \longrightarrow Y \text{ injektiv}$$
$$\forall g : Y \longrightarrow X \text{ ist } g \text{ nicht injektiv}$$

Beispiel: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. $\Rightarrow$ Die Menge $\{1, ..., n\} =: Y$ hat grössere Mächtigkeit als die Menge $\{1, ..., m\} =: X$

Beispiel 2: $\mathbb{N}$ hat grössere Mächtigkeit als jede endliche Menge (d.h. als jede Menge mit endlich vielen Elementen)

Definition: Eine Menge X heisst *abzählbar*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ gibt, d.h. X und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, d.h. für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $f(n) = x$

Schreiben wir $x_n := f(n)$, so gilt $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$

Eine Menge X heisst *höchstens abzählbar*, wenn X entweder leer, endlich oder abzählbar ist.

X heisst *überabzählbar*, wenn X eine unendliche Menge ist, die nicht abzählbar ist.

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ heisst *Folge.*

Beispiel:

1.) $\mathbb{N}$ ist abzählbar

2.) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

3.) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\leftarrow & -\frac{3}{1} & & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} \\
& \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
& -\frac{3}{2} & & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} \\
& \uparrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow \\
& -\frac{3}{3} & & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} \\
& \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
& -\frac{3}{4} & \leftarrow & -\frac{2}{4} & \leftarrow & -\frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{0}{4} & \leftarrow & \frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4}
\end{array}$$

$\Rightarrow \exists$ bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$

Übung: Wenn X_n eine abzählbare Menge ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Menge

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

ebenfalls abzählbar.

Satz 9: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: *Annahme:* $\mathbb{R}$ ist abzählbar.

$$\Rightarrow \mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$x_n \notin I_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$I_1 := [x_1 + 1, x_2 + 2]$$

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ bereits konstruiert und sei

$$I_{n+1} := \begin{cases} \left[a_n, \frac{2a_n + b_n}{3}\right] & \text{falls } x_n + 1 \notin \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right] \\ \left[\frac{a_n + 2b_n}{3}, b_n\right] & \text{falls } x_n + 1 \in \left[a_n, \frac{2a_n+b_n}{3}\right] \end{cases}$$

$$|I_n| = \frac{1}{3^{n-1}}|I_1|$$

nach Satz 6 $\exists! y \in \mathbb{R}$, so dass $y \in I_n \, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow y \neq x_n \, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\rightarrow$ Widerspruch! (QED)

Beispiele:

- $(-1, 1)$ ist gleichmächtig wie $\mathbb{R}$
- Für $a < b$ ist das Intervall (a, b) gleichmächtig wie $\mathbb{R}$. Wie ist es mit $[a, b]$?
- $\mathbb{R} \cup \{\star\}$ gleichmächtig wie $\mathbb{R}$

  Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\star\}$

$$f(x) := \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Z} \\ x & x \in \mathbb{Z},\, x < 0 \\ \star & x = 0 \\ x - 1 & x \in \mathbb{Z},\, x > 0 \end{cases}$$

- Sei X abzählbar, dann ist $\mathbb{R} \cup X$ gleichmächtig wie $\mathbb{R}$
- Jedes Intervall (ausser $\varnothing$ und $\{a\}$) ist gleichmächtig wie $\mathbb{R}$

Definition: Sei X eine Menge. Die Menge aller Teilmengen wird bezeichnet mit

$$2^X := \{A \mid A \subset X\}$$

Für jede Teilmenge gibt es eine Funktion

$$\begin{aligned} f :& X \longrightarrow \{0, 1\} \\ A_f :& = \{x \in X \big| f(x) = 1\} \end{aligned}$$

Satz 10: Es gibt keine surjektive Abbildung $f : X \longrightarrow 2^X$ (2^X hat grössere Mächtigkeit als X)

Beweis: Sei

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow 2^X \\ x &\longmapsto A(x) \end{aligned}$$

irgendeine Abbildung mit $A(x) \subset X$. Sei $U := \{x \in X \big| x \notin A(x)\}$

Behauptung: Es gibt kein $x \in X$ so dass $A(x) = U$

Annahme: $U = A(x_0)$ für ein $x_0 \in X$

$$x_0 \in U \overset{\text{Def. von } U}{\Longleftrightarrow} x_0 \notin A(x_0) = U \Longleftrightarrow x_0 \notin U$$

$\rightarrow$ Widerspruch! (QED)

Satz 11: Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ injektive Abbildungen.
$\Rightarrow$ X und Y sind gleichmächtig.

Korollar: Für je zwei Mengen X, Y gilt genau eine der Aussagen:

a) Y ist mächiger als X

b) X, Y sind gleichmächtig

c) X ist mächtiger als Y

Beweis von Satz 11 (Bernstein): *Idee:* Wir konstruieren Teilmengen X', $X'' \subset X$ und Y', $Y'' \subset Y$, so dass

$$X = X' \cup X'' \qquad X' \cap X'' = \varnothing \qquad Y = Y' \cup Y'' \qquad Y' \cap Y'' = \varnothing$$

$$f(X') = Y' \qquad g(Y'') = X''$$

d.h. $f : X' \to Y'$ und $g : Y'' \to X''$ sind bijektiv.

Sei $g^{-1} : X'' \to Y''$ die inverse Abbildung von $g : Y'' \to X''$.
Definiere:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X' \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \in X'' \end{cases}$$

Konstruktion von X', X'', Y', Y'':

$$\begin{array}{ll} X_0 & := \varnothing \\ X_1 & := X \backslash g(Y_0),\ X_0 \subset X_1 \\ X_2 & := X \backslash g(Y_1),\ X_1 \subset X_2 \\ X_{k+1} & := X \backslash g(Y_k),\ X_k \subset X_{k+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Y_0 & := Y \\ Y_1 & := Y \backslash f(X_1),\ Y_1 \subset Y_0 \\ Y_2 & := Y \backslash f(X_2),\ Y_2 \subset Y_1 \\ Y_{k+1} & := Y \backslash f(X_{k+1}),\ Y_{k+1} \subset Y_k \end{array}$$

Behauptung: Die Teilmengen

$$\begin{array}{ll} X' & := \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k \\ X'' & := X \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Y' & := Y \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k \\ Y'' & := \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k \end{array}$$

haben die gewünschten Eigenschaften.

1. $x \in X' \Rightarrow f(x) \in Y'$

$$\begin{aligned} x \in X' &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x \in X_k \\ &\Rightarrow f(x) \in f(X_k) = Y \backslash Y_k \\ &\Rightarrow f(x) \in Y \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k = Y' \end{aligned}$$

2. $y \in Y' \Rightarrow \exists x \in X' : f(x) = y$

$$\begin{aligned} y \in Y' &\Rightarrow y \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y \notin Y_k \\ &\Rightarrow y \in Y \backslash Y_k = f(X_k) \\ &\Rightarrow \exists x \in X_k : y = f(x) \\ &\Rightarrow \exists x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k = X' : f(x) = y \end{aligned}$$

3. $y \in Y'' \Rightarrow g(y) \in X''$

$$\begin{aligned} y \in Y'' &\Rightarrow y \in Y_k \, \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow g(y) \in g(Y_k) \, \forall k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow g(y) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} g(Y_k) = \bigcap_{k=0}^{\infty} (X \setminus X_{k+1}) \\ &\Rightarrow g(y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (X \backslash X_k) = X \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X'' \end{aligned}$$

4. $x \in X'' \Rightarrow \exists y \in Y'' : g(y) = x$

$$\begin{aligned}
x \in X \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k &\Rightarrow x \notin X_k \, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow x \in X \backslash X_k \, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow x \in g(Y_{k-1}) \, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \exists y_{k-1} \in Y_{k-1} : x = g(y_{k-1}) \, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\overset{\text{inj}}{\Rightarrow} y_0 = y_1 = y_2 = ... \\
&\Rightarrow \exists y \in \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k = Y'' : g(y) = x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f : X' \to Y'$ und $g : Y'' \to X''$ sind bijektiv
$\Rightarrow F(x)$ ist bijektiv
$\Rightarrow |X' + X''| = |Y' + Y''|$
$\Rightarrow X$ und Y sind gleichmächtig (QED)

Bemerkung 1: Zu 2.

$$\begin{aligned}
y \in \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k &\Leftrightarrow y \in Y_k \, \forall k \in \mathbb{N} \\
y \notin \bigcap_{k=0}^{\infty} Y_k &\Leftrightarrow \neg(y \in Y_k \, \forall k \in \mathbb{N}) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y \notin Y_k
\end{aligned}$$

Bemerkung 2: Sei $f : X \to Y$ injektiv

$$\Rightarrow \exists g : Y \to X, \text{ so dass } g \circ f = id_X$$

Beweis: Wenn $Z := f(X) \subset Y$, dann ist $f : X \to Z$ bijektiv.
Sei $x_0 \in X$ und

$$g(y) := \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{falls } y \in Z \\ x_0 & \text{falls } y \in Y \backslash Z \end{cases}$$

1.4 Die Kontinuumshypothese

Auswahl-Axiom:

- Seien I, X Mengen
- Für jedes $i \in I$ sei $X_i \subset X$ eine nicht leere Teilmenge
- $X_i \cap X_j = \varnothing \; \forall \; i, j \in I$ mit $i \neq j$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Teilmenge $Z \subset X$, so dass $Z \cap X_i$ genau ein Element enthält für jedes $i \in I$.

Bemerkung: Wir können die Menge Z in der Form $Z = \{x_i \mid i \in I\}$ schreiben mit $x_i \in X_i$, so dass $\{x_i\} = Z \cap X_i$.

Beispiel: Sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung und sei $I := Y$.
Für $y \in Y$ sei

$$X_y := \{x \in X \mid f(x) = y\} =: f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow f^{-1}(y) \subset X$, $f^{-1}(y) \neq \varnothing \; \forall y \in Y$ (da f surjektiv)
$\Rightarrow f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing \, \forall y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$
$\Rightarrow \exists Z \subset X$, so dass $Z \cap f^{-1}(y)$ genau ein Element enthält für jedes $y \in Y$.
$\Rightarrow$ Die Restriktion $f|_z : Z \to Y$ (definiert durch $f|_z(x) := f(x)$ für $x \in Z$) ist

bijektiv.
Sei $g := (f|_z)^{-1} : Y \to Z \subset X$ die Umkehrabbildung

$$\Rightarrow f \circ g = id_Y$$

Definition: Eine Abbildung $g : Y \to X$, die die Gleichung $f \circ g = id_Y$ heisst *Rechts-Inverse* von f.

Bemerkung: Für jede Abbildung $f : X \to Y$ sind folgende Aussagen equivalent:

(i) f ist surjektiv

(ii) f besitzt eine Rechts-Inverse

Die Kantormenge $K \subset \mathbb{R}$: Immer das mittlere Drittel herausschneiden (angefangen beim Intervall $[0,1]$) und was übrig bleibt ist die Kantormenge:

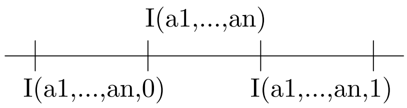
$$\begin{aligned} K_0 &:= [0,1] \\ K_1 &:= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ K_2 &:= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

Formel: Für $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0,1\}$ definieren wir

$$I(a_1, ..., a_n) := \left[2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right]$$

$$K_n := \bigcup I(a_1, ..., a_n)$$

K_n ist eine vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$.



Kantormenge:

$$K := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

Jede Folge $(a_1, a_2, ...) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zahlen $a_n \in \{0,1\}$ bestimmt eine Intervallschachtelung

$$I_n := I(a_1, ..., a_n) > I_{n+1}$$

$\overset{\text{Sa6}}{\Rightarrow}$ Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}$ gibt es genau ein Element

$$x =: \varphi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in K$$

so dass

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I(a_1, ..., a_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$$

Umkehrung: Für jedes $x \in K$ gibt es genau eine Folge $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0,1\}$, so dass $x \in I(a_1, ..., a_n) \, \forall n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Abbildung

$$\varphi : 2^{\mathbb{N}} = \{\text{Folgen in } \{0,1\}\} \to K$$

bijektiv.

Behauptung: K und $[0,1]$ sind gleichmächtig.

Beweis: Wir haben eine injektive Abbildung $f : K \to [0,1]$ mit $f(x) = x$.
Wir konstruieren eine surjektive Abbildung $g : K \to [0,1]$ durch $g := \psi \circ \varphi^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}"'] & & {[0,1]} \\ & 2^{\mathbb{N}} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei ist die Abbildung $\psi : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ durch folgende Formel gegeben:

$$\psi(a_1, a_2, a_3, ...) := \underbrace{0.a_1a_2a_3a_4}_{\text{binäre Darst.}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{2^i}}_{\text{Def. folgt später}} := \sup \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}$$

$\Rightarrow \exists h : [0,1] \to K$, so dass $g \circ h = id_K$
$\Rightarrow h$ ist injektiv!

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = g(h(x_1)) = g(h(x_2)) = x_2$$

$\Rightarrow \exists$ bijektive Abbildung $F : K \to [0,1]$
$\Rightarrow \exists$ bijektive Abbildung $G : K \to \mathbb{R}$

Wir haben gezeigt:
Die Mengen $K, 2^{\mathbb{N}}$, und $\mathbb{R}$ haben die selbe Mächtigkeit.

$$2^{\mathbb{N}} = \{\text{Teilmengen von } \mathbb{N}\} = \{\text{Funktionen } \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

(QED)

Frage: Gibt es überabzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$, die nicht die gleiche Mächtigkeit haben, wie $\mathbb{R}$?

Cantor's Vermutung (1878): Kontinuumshypothese
Es gibt solche Mengen nicht!

Gödel (1938): Cantor's Vermutung lässt sich nicht widerlegen, d.h. man kann aus den Axiomen der Mengenlehre nicht beweisen, dass es überabzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ gibt, die echt kleinere Mächtigkeit haben, als $\mathbb{R}$.

Paul Cohen (1963): Cantor's Vermutung lässt sich nicht beweisen!

1.5 Relationen

Definition: Seien X, Y Mengen.
Das *Karthesische Produkt* von X und Y ist die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.

$$\Rightarrow X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Der *Graph* von f ist die Teilmenge

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Frage: Sei $T \subset X \times Y$ eine Teilmenge.
Wann gibt es eine Funktion $f : X \to Y$, so dass $\text{graph}(f) = T$?

Antwort: Wenn $\forall x \in X \; \exists! y \in Y$, so dass $(x, y) \in T$

Definition: Sei X eine Menge.
Eine *Relation* auf X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Wenn wir ein Element $(x, y) \in R$ haben, so sagen wir "x steht in der Relation R zu y".
Wir schreiben

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Begriffe:

- Eine Relation heisst *reflexiv*, wenn gilt $xRx \, \forall x \in X$ (x steht in Relation zu sich selbst).
- Eine Relation heisst *antireflexiv*, wenn $(x, x) \notin R \, \forall x \in X$.
- Eine Relation heisst *symmetrisch*, wenn $\forall x, y \in X$ gilt
$$xRy \Rightarrow yRx$$
- Eine Relation heisst *antisymmetrisch*, wenn $\forall x, y \in X$ gilt
$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$
- Eine Relation heisst *transitiv*, wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt
$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

Definition: Eine Relation $R \subset X \times X$ heisst *Ordnungsrelation*, wenn sie transitiv und anti-symmetrisch ist.

Beispiel 1: $X = \mathbb{R}$

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$$

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \Leftrightarrow x < y$$

(ist zusätzlich anti-reflexiv).

Beispiel 2: $X = \mathbb{R}$

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y \text{ oder } x = y\}$$

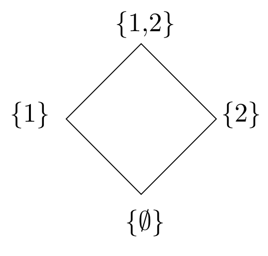
Bemerkung: Jede Ordnungsrelation, die wir betrachten, wird entweder reflexiv oder anti-reflexiv sein.
Aus jeder reflexiven Ordnungsrelation $R \subset X \times X$ können wir eine anti-reflexive konstruieren:

$$R' = R \backslash \Delta, \Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$$

Beispiel 3: X sei eine Menge und 2^X die Menge aller Teilmengen von X.

$$R := \{(A, B) \mid A \subset B \subset X\}$$

$X = \{1, 2\}$ (hat vier Teilmengen)



Beispiel 4: (Teilbarkeit)
$X = \mathbb{N}$
$$R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m|n, \text{ d.h. } n \text{ ist durch } m \text{ teilbar}\}$$

Definition: Eine anti-reflexive Ordnungsrelation "$<$" auf X heisst *total*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in X$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

1. $x < y$
2. $x = y$
3. $y < x$

Eine reflexive Ordnungsrelation $R \in X \times X$ heisst *total*, wenn $R \backslash \Delta$ eine totale Ordnungsrelation ist.

Beispiele 1 und 2 sind total, Beispiele 3 und 4 sind nicht total.

Definition: Eine Relation auf einer Menge X heisst *Äquivalenzrelation*, wenn sie transitiv, symmetrisch und reflexiv ist.

Notation: Eine Äquivalenzrelation wird oft mit "$\sim$" bezeichnet.

Beispiel 1: Gleichheitsrelation
$R = \Delta \subset X \times X$
$$x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

Beispiel 2: $X = \mathbb{R}$
$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$$

Wir schreiben:
$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung: Eine Relation $\sim$ auf X ist eine Äquivalenzrelation genau dann, wenn $\forall x, y, z \in X$ folgendes gilt:

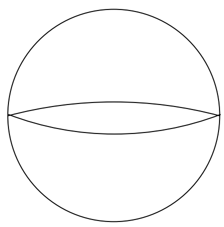
i) $x \sim x$

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

iii) $x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Beispiel 3: $X = \mathbb{Z}$
$$z \sim m \Leftrightarrow m - n \text{ ist durch 7 teilbar} :\Leftrightarrow m \equiv n \pmod 7$$

Beispiel 4: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$
$$X := S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$
$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \wedge x = -y$$



Definition: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.
Eine *Äquivalenzklasse* ist eine Teilmenge $A \subset X$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $A \neq \varnothing$

b) $x, y \in A \Rightarrow x \sim y \quad \forall x, y \in X$

c) $x \in A$ und $x \sim y \Rightarrow y \in A \quad \forall x, y \in X$

Lemma 6: Sei "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf X.

(i) Wenn $A, B \subset X$ zwei Äquivalenzklassen von "$\sim$" sind, dann gilt:

$$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A = B$$

(ii) Jedes Element $x \in X$ bestimmt eine Äquivalenzklasse

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

Beweis:

(i) Sei $x \in A \cap B$ und $y \in A$.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{b)}}{\Rightarrow} x \sim y \\ x \in B &\overset{\text{c)}}{\Rightarrow} y \in B \end{aligned}$$

$\Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

(ii) a) $[x] \neq \varnothing$ (da "$\sim$" reflexiv ist)

b) $y, z \in [x] \Rightarrow x \sim y$ und $x \sim z$
$\overset{\text{sym}}{\Rightarrow} z \sim x$ und $x \sim y$
$\overset{\text{tran}}{\Rightarrow} z \sim y$
$\overset{\text{sym}}{\Rightarrow} y \sim z$

c) $y \in [x]$ und $y \sim z$
$\Rightarrow x \sim y$ und $y \sim z$
$\overset{\text{tran}}{\Rightarrow} x \sim z$
$\Rightarrow z \in [x]$

(QED)

Bemerkung: $\forall x, y \in X$ gilt

$$x \sim y \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \varnothing \overset{\text{Lem6}}{\Leftrightarrow} [x] = [y]$$

Definition: Eine Äquivalenzrelation "$\sim$" auf einer Menge X zerlegt X in die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen von "$\sim$". Die Menge dieser Äquivalenzklassen nennen wir die *Quotientenmenge* von X modulo $\sim$.

Bezeichnung:

$$X/_\sim := \{A \subset X \mid A \text{ ist eine Äquivalenzklasse}\} = \{[x] \mid x \in X\}$$

Beispiel 1: $x \sim y \Rightarrow x = y$

$$\begin{aligned} [x] &= \{x\} \\ X/_\sim &= \{[x] \mid x \in X\} = X \end{aligned}$$

Beispiel 2: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

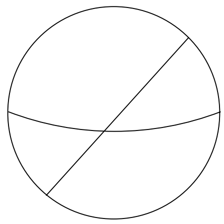
$$\begin{aligned} [x] &= \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} &= \{[x] \mid 0 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

(geometrisch: Kreis)

Beispiel 3: $m \sim n \Leftrightarrow (m - n)|7$

$$\begin{aligned} [n] &= \{n + 7k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{Z}/_\sim &= \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_7 \\ &= \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\} \end{aligned}$$

Beispiel 4: $[x] = \{x, -x\}$



2 Die komplexen Zahlen

In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = c$ nur eine Lösung, wenn $c \geq 0$, deshalb führen wir eine neue Zahl i ein, so dass

$$i^2 = -1$$

Allgemeine Elemente des Körpers der sowohl $\mathbb{R}$ als auch i enthält, haben die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Auf dem Raum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erklären wir folgende Operationen:

1. Summe:
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
2. Multiplikation:
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Satz 1: Mit diesen Operationen erfüllt $\mathbb{R}^2$ die Körperaxiome mit $(0, 0)$ als neutralem Element für die Addition und $(1, 0)$ als neutralem Element für die Multiplikation.
Die Gleichung $z^2 = (-1, 0)$ hat in diesem Körper genau zwei Lösungen.

Beweis:

(i) Kommutativgesetz: $\surd$

(ii) Assoziativgesetz: $\surd$ (ausrechnen)

(iii) Distributivgesetz: $\surd$ (folgt direkt aus Distributivgesetz von $\mathbb{R}$)

(vi) a) Neutrales Element (+):
$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$$
b) Inverses Element (+):
$$-(x, y) = (-x, -y)$$
c) Neutrales Element $(\cdot)$:
$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$$
d) Inverses Element $(\cdot)$: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

Gesucht: Ein Element $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, so dass
$$\begin{aligned}
(x, y) \cdot (x', y') &= (1, 0) \\
\Rightarrow (x, -y) \cdot ((x, y) \cdot (x', y')) &= (x, -y) \\
((x, -y) \cdot (x, y)) \cdot (x', y') &= (x, -y) \\
(x^2 + y^2, 0) \cdot (x', y') &= (x, -y) \\
((x^2 + y^2)x', ((x^2 + y^2)y') &= (x, -y) \\
\Rightarrow (x, y)^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2 - y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)
\end{aligned}$$
(eindeutig, da $x, y \neq 0$)

Gleichung: $z^2 = (-1, 0)$
$$\begin{aligned}
(x, y)^2 &= (-1, 0) \\
(x^2 - y^2, 2xy) &= (-1, 0)
\end{aligned}$$
$$\begin{array}{ll}
\Rightarrow x^2 - y^2 = -1 & \Rightarrow 2xy = 0 \\
\Rightarrow y^2 = x^1 + 1 \geq 1 & \\
\Rightarrow y^2 = 1 & \\
\Rightarrow y = \underline{+}1 & \Rightarrow x = 0
\end{array}$$
$z = (0, 1)$ und $z = (0, -1)$ sind die Lösungen von $z^2 = (-1, 0)$ (QED)

Schreibweise: Der Körper $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper des Körpers $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x,0) \end{aligned}$$

Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$.
Wir definieren $i := (0,1)$, d.h. wir schreiben $z = (x,y)$ in der Form

$$z = x + iy = (x,0) + (0,y)$$

Begriffe:

- Realteil:
$$\mathrm{Re} z := x$$
- Imaginärteil:
$$\mathrm{Im} z := y$$
- Konjugation:
$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \overline{z} := x - iy \end{aligned}$$

Lemma 1: Es gelten folgende Rechenregeln für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $\overline{-z} = -\overline{z}, \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

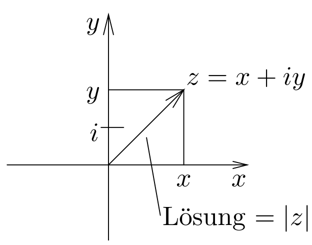
vi) $\overline{\overline{z}} = z$

v) $\mathrm{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

vi) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Beweis: Einfach (siehe Übungen)

Definition: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Die reelle Zahl
$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$
heisst *Absolutbetrag* (oder *Betrag*) von z.

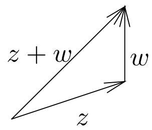


Lemma 2: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt folgendes:

i) $|z|^2 = |\overline{z}|^2 = z\overline{z}$

ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$

iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$



vi) $|\mathrm{Re}z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}z| \leq |z|$

v) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|_{\mathbb{R}} = |z|_{\mathbb{C}}$

Beweis:

i) $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

ii) $|zw|^2 \overset{\text{i)}}{=} (zw)(\overline{zw}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) \overset{\text{i)}}{=} |z|^2 \cdot |w|^2$

iv) $|\mathrm{Re}z|^2 \leq (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = |z|^2$

iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$

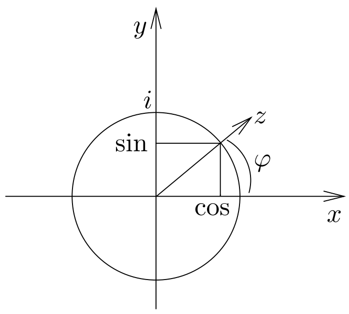
$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + w\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(w\overline{z}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|\mathrm{Re}(wz)| + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|w\overline{z}| + |w|^2 \\
&\overset{\text{ii)}}{=} |z|^2 + 2|w||\overline{z}| + |w|^2 \\
&\overset{\text{i)}}{=} |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

v) Trivial

Bemerkung:

$$zz' = 1 \qquad \overline{z}zz' = \overline{z} \qquad z' = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

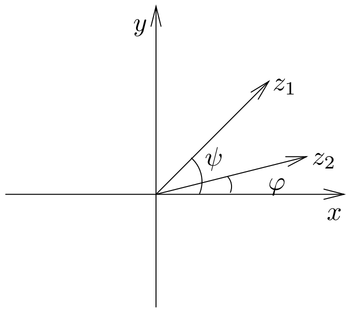
2.1 Komplexe Zahlen geometrisch



$$\begin{aligned}
z &= (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \\
|z|^2 &= r^2 \cdot cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi) = r^2 \\
&\Rightarrow r = |z| \\
\varphi &: = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\varphi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Notation: Euler'sche Formel

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \\
\cos(\varphi+\psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \\
\sin(\varphi+\psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi) \\
\Rightarrow e^{i(\varphi+\psi)} &= e^{i\varphi}e^{i\psi}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \\
&= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\
\arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2)
\end{aligned}
$$

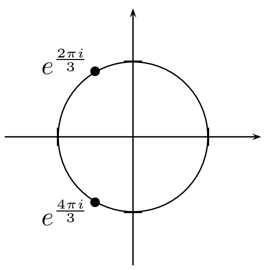
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1 \\
e^{i\pi/2} &= \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2) = i \\
e^{3i\pi/2} &= -i \\
e^{2i\pi} &= i
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$ heissen *n-te Einheitswurzeln.*

$$
\begin{aligned}
z &= re^{i\varphi} \\
z^n &= r^n e^{ni\varphi} = 1 \\
\Rightarrow r &= 1 \\
\varphi &= \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, ..., n-1
\end{aligned}
$$

Es gibt genau n Lösungen



2.2 Polynome

Satz 2: Jede quadratische Gleichung der Form

$$z^2 + az + b = 0 \tag{1}$$

mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$

Beweis:

$$z^2 + az + b = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

Es gilt folgende Gleichung zu lösen:

$$w^2 = c \qquad c = \frac{a^2}{4} - b \tag{2}$$

Dann ist

$$z := w - \frac{a}{2}$$

eine Lösung von (1).

Zu zeigen: $\forall c \in \mathbb{C}\, \exists z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = c$.

Beweis: Sei $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x^2 - y^2 = a & 2xy = b \\ \Rightarrow x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2 & 4x^2y^2 = b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad x^2 - y^2 = a$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + a\right) & y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} - a\right) \\ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \mathrm{Re}c)} & y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| - \mathrm{Re}c)} \end{array}$$

$$\Rightarrow z = x + iy = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \mathrm{Re}c)} + \varepsilon i \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - \mathrm{Re}c)}$$

$$\epsilon := \begin{cases} +1 & \text{falls } \mathrm{Im}c > 0 \\ -1 & \text{falls } \mathrm{Im}c < 0 \end{cases}$$

Allgemeiner Fall:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \tag{3}$$

Satz 2 sagt: (3) hat eine Lösung für $n = 2$

Satz 3: Für jedes $n > 1$ und alle komplexen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ besitzt Gleichung (3) eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra).

Beweis: Folgt später.

Definition: Ein *Polynom* ist eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die sich in der Form $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ schreiben lässt mit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$.
Die Zahlen $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ heissen *Koeffizienten* von f.
Wenn $a_n \neq 0$ ist, nennen wir n den *Grad* von f.

Bezeichnung: Grad n von $f =: \deg(f)$

Nullpolynom: $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[z] &: = \{\text{Menge aller Polynome}\} \\ f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \mathbb{R}[z] &: = \{\text{Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten}\} \end{aligned}$$

Bemerkung 1: Sei X eine Menge und seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ Funktionen.
Die Summe von f und g ist die Funktion $f + g : X \to \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

Das Produkt $fg : X \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

Bemerkung 2: Die Summe und das Produkt zweier Polynome sind ebenfalls Polynome.

Beispiele: Sei $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ und $g(z) = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0$
Summe (für $m = n$):

$$(f+g)(z) = (a_n + b_n)z^n + ... + (a_1 + b_1)z + a_0 + b_0$$

Produkt:

$$\begin{aligned}
(fg)(z) &= f(z)g(z) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{n} a_r z^r\right)\left(\sum_{s=0}^{m} b_s z^s\right) \\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_r b_s z^r z^s \\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_r b_s z^{r+s} \\
&= \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{r+s=k} a_r b_s\right) z^k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (fg)(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \qquad c_k = \sum_{r+s=k} a_r b_s$$

Satz 4: (Division mit Rest)
Seien f, g Polynome und sei g nicht das Nullpolynom.
$\Rightarrow$ Es gibt eindeutige Polynome q, r, so dass $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$

Bemerkung: Der Satz 4 ist auch richtig, wenn

$$\deg(g) = 0 \Rightarrow g = b_0 \in \mathbb{C}\backslash 0$$

In diesem Fall ist "$\deg(r) < 0$" zu interpretieren als: $r = 0$

Konvention:

$$\deg(\text{Nullpolynom}) = -\infty$$

Bemerkung: Für je zwei Polynome f, g gilt

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$$

Beweis von Satz 4: *Eindeutigkeit:* Sei

$$f = qg + r = q'g + r' \qquad \deg(r) < \deg(g) \qquad \deg(r') < \deg(g)$$

$$\Rightarrow (q - q')g = r' - r$$
$$\deg(r' - r) < \deg(g)$$

$\Rightarrow q - q'$ ist das Nullpolynom, andernfalls gilt:

$$\deg(r' - r) = \underbrace{\deg(q - q')}_{\geq 0} + \deg(g) \geq \deg(g)$$

$\rightarrow$ Widerspruch!
$\Rightarrow r' - r$ ist das Nullpolynom
$\Rightarrow q = q'$ und $r = r'$

Existenz: Induktion über $\deg(f)$

$\deg(f) < \deg(g)$:

$$r = f \qquad q = 0 \quad \surd$$

$\deg(f) \geq \deg(g)$:

Induktionsverankerung: $\deg(f) = n = 0$

$$\Rightarrow \deg(g) = 0$$
$$\Rightarrow r = 0,\, q = \frac{f}{g}$$

Induktionsannahme: Die Behauptung sei Bewiesen, für jedes Polynom f mit

$$\deg(f) \leq n - 1$$

Zu zeigen: Die Behauptung gilt für alle Polynome vom Grade n.

Seien

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0,\, a_n \neq 0$$
$$g(z) = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0,\, b_m \neq 0$$
$$\underbrace{\deg(g)}_{m} \leq \underbrace{\deg(f)}_{n}$$

Definiere:

$$f_1(z) := f(z) - \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} g(z)$$
$$\Rightarrow \deg(f_1) < n$$

$\overset{\text{Ann}}{\Rightarrow} \exists$ Polynome q_1, r, so dass

$$f_1 = q_1 g + r \qquad \deg(q_1) < \deg(g)$$
$$\Rightarrow q(z) := q_1(z) + \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$$
$$\Rightarrow f = qg + r$$

(QED)

Definition: f heisst *durch g teilbar*, wenn $r = 0$ ist (in Satz 4). Das heisst

$$f = qg \qquad q \in \mathbb{C}[z]$$

Beispiel: $g(z) = z - \lambda$ (Polynom mit $\deg(g) = 1$)
Nach Satz 4 können wir jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ darstellen in der Form

$$f(z) = q(z)(z - \lambda) + r \qquad q \in \mathbb{C}[z], r \in \mathbb{C}$$
$$\deg(f) \geq 1 \Rightarrow \deg(q) = \deg(f) - 1$$

Nach Satz 4 gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow r = 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist durch das Polynom } z - \lambda \text{ teilbar} \\ &\Leftrightarrow \frac{f(z)}{z - \lambda} \text{ ist ein Polynom} \end{aligned}$$

Korollar 1: Jedes Polynom vom Grade $\deg(f) = n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.

Korollar 2: (Identitätssatz)
Seien

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$$
$$g(z) = b_n z^n + ... + b_1 z + b_0$$

Polynome (vom Grade $\leq n$), deren Werte an $n+1$ verschiedenen Stellen übereinstimmen, dann gilt $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, ..., n$.

Beweis: Sei $h := f - g$, das heisst

$$h(z) = c_n z^n + ... + c_1 z + c_0 \qquad c_k := a_k - b_k$$

Nach Voraussetzung hat h mindestens $n+1$ Nullstellen
$\Rightarrow h$ ist das Nullpolynom (sonst hätte h nach Korollar 1 höchstens n Nullstellen)
$\Rightarrow c_k = 0,\ k = 0, 1, ..., n$ (QED)

Frage: Was heisst "$f = g$" für zwei Polynome?
Analysis: $f(z) = g(z)\,\forall z \in \mathbb{C}$
Algebra: f und g haben die selben Koeffizienten.
$\rightarrow$ Diese beiden Aussagen sind äquivalent nach Korollar 2.

Korollar 3: (Satz von der Linearfaktorzerlegung)
Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$, $f \neq 0$ vom Grade n besitzt eine Darstellung der Form

$$f(z) = a(z - \lambda_1)...(z - \lambda_n) \qquad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$$

Beweis: Satz 4, die anschliessende Bemerkung und Induktion (QED)

Bemerkung: Sei

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = (z + \lambda_1)...(z + \lambda_n)$$

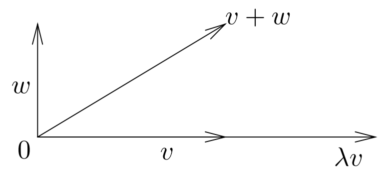
$$\overset{\text{Id'satz}}{\Rightarrow} a_k = \sum_{j_1 < j_2 < ... < j_k} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} ... \lambda_{j_k}$$

$\rightarrow$ k-te Symmetrische funktion in $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Insbesondere

$$a_1 = \lambda_1 + ... + \lambda_n$$

$$a_n = \lambda_1 ... \lambda_n$$

3 Vektorräume



Definition: Ein *Vektorraum* (über $\mathbb{R}$) besteht aus

- einer Menge V
- einem Element $0 \in V$ (Nullvektor)
- eine Abbildung $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$ (Addition)
- einer Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ (skalare Multiplikation)

so dass folgende Axiome gelten:

i) Das Tripel $(V, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h. es gelten
Kommutativgesetz: $\forall v, w \in V$

$$v + w = w + v$$

Assoziativgesetz: $\forall u, v, w \in V$

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

Neutrales Element: $\forall v \in V$

$$v + 0 = v$$

Inverses Element: $\forall v \in V$

$$\exists (-v) \in V$$

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\, \forall v \in V$

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$$

$\forall v \in V$

$$1 \cdot v = v$$

(Verträglichkeit der Multiplikation in $\mathbb{R}$ mit der skalaren Multiplikation auf V)

iii) $\forall v \in V\, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall v, w \in V$

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

(Distributivgesetz)

Notation: Für $v, w \in V$ schreiben wir

$$v - w := v + (-w)$$

Bemerkung 1: $\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall v \in V$ gilt:

$$\lambda \cdot 0_V = 0_V \qquad 0 \cdot v = 0_V$$

($0_V \to$ Nullvektor)

Beweis: Übung

Bemerkung 2: Ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ wird genauso definiert (überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen). Ebenso über $\mathbb{Q}$.
Vektorraum über $\mathbb{R}$: reeller Vektorraum.
Vektorraum über $\mathbb{C}$: komplexer Vektorraum.

Bemerkung 3: Wir können $\mathbb{R}$ auch durch einen beliebigen "Körper" $\mathbb{K}$ ersetzen.

Beispiele für Körper:

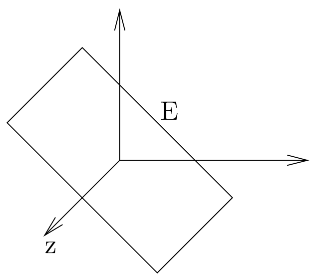
- $\mathbb{K} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}}$, p Primzahl

Beispiele für Vektorräume:

1. $V = \{0\}$
2. $V = \mathbb{R}$ (Vektorraum über $\mathbb{R}$ und auch über $\mathbb{Q}$)
3. $V = \mathbb{C}$ (Vektorraum über $\mathbb{C}$ und auch über $\mathbb{R}$)
4. $V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n &= (x_1, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R} \\ V &= \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \\ x &= (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y &= (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \\ x + y :&= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ \lambda x :&= (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \\ 0_{\mathbb{R}^n} :&= (0, ..., 0) \\ -x :&= (-x_1, ..., -x_n) \end{aligned}$$

5. X Menge
$$V := f(X) = \{\text{Funktion } f : X \to \mathbb{R}\}$$
(X auch bezeichnet mit $\mathbb{R}^X \to$ vgl. Bsp. 4)
6. $V = \{$Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten$\}$
$\subset \{$Menge aller Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ (komplexer Vektorraum)
7. Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, wobei mindestens ein $a_i \neq 0$.
$$E := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$



Definition: Sei V ein reeller Vektorraum und $W \subset V$. W heisst *Unterraum* von V, wenn gilt:

i) $0_V \in W$

ii) $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, v \in W \Rightarrow \lambda v \in W$

Bemerkung: Solch ein Unterraum W ist selbst ein Vektorraum.

Übung: Für jedes $v \in V$ gilt: $(-1)v = -v$

3.1 Die Basis

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Eine (endliche) *Basis* von V ist eine endliche Folge von Vektoren $e_1, ..., e_n \in V$, so dass folgendes gilt:

i) $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

(lineare Unabhängigkeit)

ii) $\forall v \in V \, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

Bemerkung 1: $e_1, ..., e_n$ ist eine Basis von V genau dann, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise in der Form $v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ schreiben lässt.

Bemerkung 2: Wenn V eine Basis mit n Elementen besitzt, so hat jede andere Basis ebenfalls n Elemente (Beweis in Lin. Alg.)
In diesem Fall nennen wir V *n-dimensional*. Wir schreiben dann:

$$\dim^{\mathbb{R}} V = \dim V = n$$

Wenn V keine endliche Basis beseitzt, so nennen wir V *unendlichdimensional*.

Beispiele:

- $\dim\{0\} = 0$
- $\dim \mathbb{R} = 1$
- $\dim^{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (Basis $e_1 = 1, e_2 = i$)
- $\dim \mathbb{R}^n = n$ (Standard Basis)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ... \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

- X unendliche Menge
  $\Rightarrow F(X)$ ist unendlich-dimensional.

Definition: Seien V, W reelle Vektorräume. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ heisst *linear*, wenn $\forall \lambda \in \mathbb{R} \, \forall v_1, v_2, v \in V$ folgendes gilt:

i) $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$

ii) $\Phi(\lambda v) = \lambda \cdot \Phi(v)$

Wenn $\Phi : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung ist, so nennen wir Φ einen *Vektorraumisomorphismus*.

Bemerkung 1: Wenn $\Phi : V \to W$ linear ist, so gilt $\Phi(0_V) = 0_W$. Die Teilmenge

$$V_0 := \Phi^{-1}(0_W) = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0_W\}$$

ist ein Unterraum von V, genannt der *Kern* von Φ.

$$\ker\Phi := \Phi^{-1}(0_W)$$

(insbesondere $0_V \in \ker\Phi$)
Die lineare Abbildung Φ ist injektiv genau dann, wenn $\ker\Phi = \{0_V\}$.

Beweis: Übung oder in Lin. Alg.

Bemerkung 2: Sei V ein reeller Vektorraum mit Basis $e_1, ..., e_n$. Definiere $\Phi : \mathbb{R}^n \to V$ durch

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Dann ist Φ ein Vektorraumisomorphismus.

Beispie l: $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ s+t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}^2 \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

($\cong \to$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$, aber nicht gleich!)

Beispiel 2: $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$
Was ist eine lin. Abbildung von V nach W?
Eine reelle $(n \times m)$ *Matrix* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\} &\to \mathbb{R} \\ (i,j) &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Schreibweise:

$$A = (a_{ij})_{i=1,...,n;\, j=1,...,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{n\times m} = \{$Menge aller reellen $n \times m$-Matrizen$\}$
Jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist eine lineare Abbildung $\Phi_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ zugeordnet.
Φ_A ist definiert durch

$$\Phi_A(x) = y \qquad y_i := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Multiplikation von Matrix und Vektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

Mit dieser Schreibweise gilt

$$\Phi_A(x) = Ax$$

für $x \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Jede lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lässt sich in dieser Form schreiben.

Bemerkung 1: Φ_A ist eine lineare Abbildung (für jede Matrix A)

Bemerkung 2: Sei $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, so gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, so dass $\Phi = \Phi_A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} := \Phi(e_1) \qquad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} := \Phi(e_j) \qquad e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_j hat 1 an j-ter Stelle.

Zu zeigen: Wenn wir die Matrix A auf diese Weise definieren, so gilt

$$\Phi = \Phi_A$$

Beweis: Übung

Matrix-Multiplikation:

$$\mathbb{R}^\ell \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{m\times\ell} \to \mathbb{R}^{n\times\ell}$$
$$(A,B) \to AB$$

Gesucht ist eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ (die wir später mit AB bezeichnen), so dass gilt

$$A(Bx) = Cx\,\forall x \in \mathbb{R}^\ell$$

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;\,1\leq j\leq m} \qquad B = (b_{jk})_{1\leq j\leq m;\,1\leq k\leq \ell}$$

$$y := Bx \qquad z := Ay$$

$$y_j = \sum_{k=1}^{\ell} b_{jk}x_k$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} a_{ij}b_{jk}x_k = \sum_{k=1}^{\ell}\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}}_{c_{ik}}x_k = \sum_{k=1}^{\ell} c_{ik}x_k$$

$$\Rightarrow C = (c_{ik})_{1\leq i\leq n;\,1\leq k\leq\ell}$$

Wir definieren $AB \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ als die Matrix mit den Einträgen

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk},\ i = 1,...,n;\ k = 1,...,\ell$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^m a_{nj}b_{j\ell} \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$(AB)x = A(Bx)$$

1) Allgemeiner: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times k}$

$$\Rightarrow (AB)C = A(BC)$$

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$

$$\Rightarrow A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

3) $\Phi_{AB} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$

$$\Phi_{AB}(x) = \Phi_A(\Phi_B(x)) = \Phi_A \circ \Phi_B(x)$$

3.2 Das Skalarprodukt

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Norm(funktion)* auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto ||v|| \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $||v|| \geq 0 \, \forall v \in V$ und $||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$

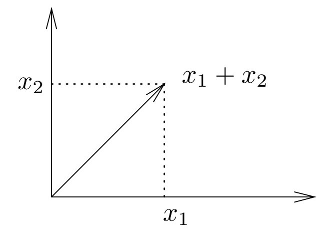
ii) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \, \forall v \in V$

iii) Dreiecksungleichung: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \, \forall v, w \in V$

Beispiele:

1) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$

! 2) $||x||_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$



3) $||x||_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$

Bemerkung: Die Norm-Eigenschaften für diese drei Normen folgen sofort aus den Axiomen für die reellen Zahlen und den Eigenschaften der Betragsfunktion, bis auf die Dreiecksungleichung für $|| \cdot ||_2$ (Euklidische Norm).

Randbemerkung zu Matrizen: $a_{ij} = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_{ij} = B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Addition, Multiplikation:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Nullmatrix:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A + \mathbf{0} = A = A \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot A$$

1) $\exists A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $AB \neq BA$

2) $\exists A \neq \mathbf{0}$, so dass sich die Gleichung $AB = \mathbf{1}$ nicht lösen lässt. Nicht jede von Null verschiedene Matrix besitzt eine Inverse.

Lemma: (Cauchy-Schwartz-Ungleichung)
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Bemerkung:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definition: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die reelle Zahl

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

heisst das *Standard innere Produkt* (oder auch *Skalarprodukt*) von x und y. Dieses innere Produkt definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||x||_2^2$$
$$||x||_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *inneres Produkt* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

mi folgenden Eigenschaften:

i) Symmetrisch: $\forall v, w \in V$
$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

ii) Bilinear: $\forall v, w, w_1, w_2 \in V \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$$
$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

iii) Positiv definit: $\forall v \in V \backslash \{0\}$
$$\langle v, v \rangle > 0$$

Bemerkung: Das Standard innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$ ist ein inneres Produkt.

Bemerkung: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Für $v \in V$ definieren wir

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Warum ist dies eine Norm auf V?

1. $||v|| \geq 0$, $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\lambda v|| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot ||v||$

Satz 2: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf V. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

1) $|\langle v, w \rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$
2) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Korollar: Die Euklidische Norm $||\cdot||_2$ auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Dreiecksungleichung.

Beweis von Satz 2:

1) *Fall 1:* $w = 0$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$
$$||v|| \cdot ||w|| = ||v|| \cdot 0 = 0$$

Fall 1: $w \neq 0$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\left| v - \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} w \right|\right|^2 \\
&= \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} w \right\rangle \\
&= \langle v, v \rangle - 2 \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle^2}{||w||^4} \langle w, w \rangle \\
&= ||v||^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{||w||^2} \\
\Rightarrow 0 &\leq ||v||^2 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{||w||^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{||w||^2} \leq ||v||^2$$
$$\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq ||v||^2 \cdot ||w||^2$$
$$\Rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$$

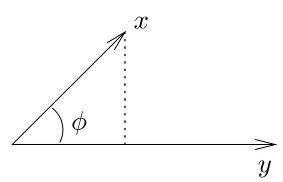
$\rightarrow$ Cauchy-Schwarz!

2) *Beweis der Dreiecksungleichung:*

$$\begin{aligned}
||v + w||^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
&= ||v||^2 + 2 \langle v, w \rangle + ||w||^2 \\
&\leq ||v||^2 + 2 |\langle v, w \rangle| + ||w||^2 \\
&\overset{1)}{\leq} ||v||^2 + 2 ||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 \\
&= (||v|| + ||w||)^2
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Geometrische Interpretation des inneren Produkts im $\mathbb{R}^3$.



$$\cos \phi \cdot ||x|| \overset{!}{=} \frac{\langle x, y \rangle}{||y||}$$

Axiom:

- $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x$ steht senkrecht auf y.
- Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Hinweis:

$$x_0 := \frac{\langle x, y \rangle}{||y||^2}\, y$$

Zu zeigen: $\phi = 90°$

$$\Rightarrow \langle x - x_0, y \rangle \stackrel{?}{=} 0$$

Standard-Basis: $V = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$||e_i|| = 1$$

Euklidische Norm:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Standard inneres Produkt:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0$$

Allgemein:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Eine Basis $e_1, e_2, ..., e_n$ von V heisst *Orthonormalbasis* (ONB), wenn

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},\ i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., n$$

Bemerkung: Sei $e_1, ..., e_n$ eine ONB und $v \in V$, dann lässt sich v in der Form

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

schreiben.

Was ist x_i?

$$\langle v, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ji} = x_i$$

Also gilt

$$x_i = \langle v, e_i \rangle,\ i = 1, ..., n$$

Das heisst, jeder Vektor $v \in V$ lässt sich in der Form

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle\, e_i$$

schreiben.

Bemerkung: Jeder endlich dimensionale Vektorraum mit innerem Produkt besitzt eine ONB. (Beweis: L.A.)

3.3 Das Vektorprodukt

Definition: Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$.
Das *Vektorprodukt* von u und v ist definiert durch

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Das Vektorprodukt ist also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto u \times v \end{aligned}$$

Bemerkung 1: e_1, e_2, e_3 Standard-Basis

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$$

Bemerkung 2: Das Vektorprodukt ist *schiefsymmetrisch* und *bilinear*, das heisst $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} u \times v &= -v \times u \\ (\lambda u) \times v &= \lambda(u \times v) \\ (u + v) \times w &= u \times w + v \times w \end{aligned}$$

Bemerkung 3: Das Vektorprodukt erfüllt die *Jacobi-Identität*:

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

Beweis: Übung

Hinweis:

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle\, v - \langle v, w \rangle\, u$$

Warnung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ:

$$(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$$

$$e_1 \times (e_2 \times e_2) = 0$$

Bemerkung 4: $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$$

Lemma 1: $\forall u, v \in \mathbb{R}$ gilt

$$||u \times v|| = \sqrt{||u||^2 \cdot ||v||^2 - \langle u, v \rangle^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}||u \times v||^2 &= \langle u \times v, u \times v\rangle \\ &\overset{4)}{=} \langle (u \times v) \times u, v\rangle \\ &\overset{3)}{=} \langle \langle u, u\rangle\, v - \langle v, u\rangle\, u, v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle\, \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2 \\ &= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2\end{aligned}$$

(QED)

Lemma 2: $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u, v \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow u \times v = 0$$

Beweis:

- Fall 1: $v = 0$ $\surd$
- Fall 2: $v \neq 0$

$$u, v \text{ linear abhängig } \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : u = \lambda v$$

Wenn es ein solches λ gibt, dann gilt

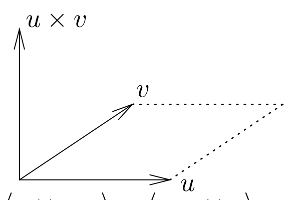
$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda ||v||^2 &\Leftrightarrow u = \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v \\ &\Leftrightarrow 0 = \left|\left| u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v \right|\right|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = \left\langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v \right\rangle \\ &\Leftrightarrow 0 = ||u||^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{||v||^2} \\ &\Leftrightarrow 0 = ||u||^2 ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = ||u \times v||^2\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Geometrische Eigenschaften des Vektorprodukts

1) $u \times v$ steht senkrecht auf u und v
2) $||u \times v||$ = Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms.

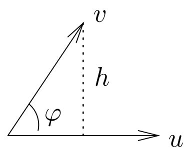
Zu 1):



$$\langle u \times v, v\rangle = \langle u, v \times v\rangle = 0$$

$$\langle u \times v, u\rangle = \langle v \times u, u\rangle = 0$$

Zu 2):



$$\cos\varphi = \frac{\langle v, u\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

$$\begin{aligned} F = \text{Flächeninhalt} &= \text{Grundseitenlänge} \cdot \text{Höhe} \\ &= ||u|| \cdot ||v|| \cdot |\sin\varphi| \\ &= ||u|| \cdot ||v|| \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \\ &= ||u|| \cdot ||v|| \sqrt{1 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{||u||^2 \cdot ||v||^2}} \\ &= \sqrt{||u||^2 ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2} \\ &= ||u \times v|| \end{aligned}$$

3.4 Die Determinante

Definition: Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.
Die *Determinante* von u, v, w ist definiert als die reelle Zahl

$$\det(u, v, w) := \langle u \times v, w\rangle$$

das heisst

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - w_1 v_2 u_3 - v_1 u_2 w_3 - u_1 w_2 v_3 \end{aligned}$$

Eigenschaften der Determinante:

1. Symmetrie:

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) &= \det(v, w, u) = \det(w, u, v) \\ &= -\det(v, u, w) = -\det(w, v, u) = -\det(u, w, v) \end{aligned}$$

2. Multilinearität:

$$\det(\lambda u, v, w) = \lambda \det(u, v, w)$$

$$\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$$

3. Normalisierung:

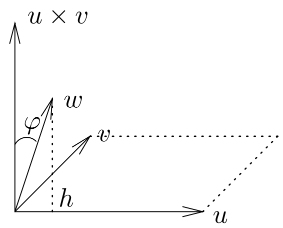
$$\det(e_1, e_2, e_3) = 1$$

Diese Axiome bestimmen die Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

eindeutig.

Bemerkung 6: $|\det(u,v,w)|$ = Volumen des von u,v,w aufgespannten Parallelopipeds.



h = Höhe $= ||w|| \cdot |\cos\varphi|$

$$\cos\varphi = \frac{\langle u \times v, w\rangle}{||u \times v|| \cdot ||w||}$$

Volumen = Fläche · Höhe

$$= ||u \times v|| \cdot ||w|| \cdot |\cos\varphi| = |\langle u \times v, w\rangle|$$

Bemerkung 7: $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ lin. unabhängig $\Rightarrow u,v,w$ Basis (Beweis in L.A.)

Bemerkung 8: Für $u,v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times v \neq 0 \Rightarrow u, v, u \times v \text{ Basis}$$

Beweis: u,v lin. unabhängig (nach Lemma 2)

Behauptung: $u, v, u \times v$ lin. unabhängig
Seien $s,t,\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $su + tv + \lambda u \times v = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \langle u \times v, su + tv + \lambda u \times v\rangle = 0\\
&\Rightarrow s\,\langle u \times v, u\rangle + t\,\langle u \times v, v\rangle + \lambda\|u \times v\|^2 = 0\\
&\Rightarrow \lambda = 0\\
&\Rightarrow su + tv = 0\\
&\Rightarrow s = t = 0
\end{aligned}$$

(QED)

Lemma 3: Für $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(u,v,w) \neq 0 \Leftrightarrow u,v,w \text{ Basis}$$

Beweis: Nach Bemerkung 7 genügt es zu zeigen, dass u,v,w linear unabhängig sind.

- "$\Rightarrow$": Seien $s,t,\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $su + tv + \lambda w = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \langle u \times v, su + tv + \lambda w\rangle = 0\\
&\Rightarrow \lambda\,\langle u \times v, w\rangle = 0\\
&\Rightarrow \lambda \det(u,v,w) = 0\\
&\Rightarrow \lambda = 0\\
&\Rightarrow su + tv = 0
\end{aligned}$$

  $u \times v \neq 0$, sonst wäre $\det(u,v,w) = \langle u \times v, w\rangle = 0$.
  $\Rightarrow$ Nach Lemma 2 sind u und v linear unabhängig

$$\Rightarrow s = t = 0$$

- "$\Leftarrow$": Sei u, v, w Basis, so sind u, v, w lin. unabhängig

$$\overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} u \times v \neq 0$$
$$\overset{\text{Bem8}}{\Rightarrow} u, v, u \times v \text{ Basis}$$

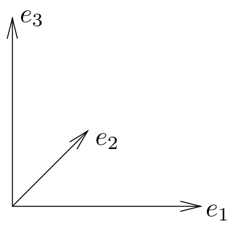
$\Rightarrow \exists s, t, \lambda \in \mathbb{R}$, so dass $w = su + tv + \lambda u \times v$
$\Rightarrow \lambda \neq 0$ (da u, v, w linear unabhängig)

$$\Rightarrow \det(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle \neq 0$$

(QED)

Definition: Eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ heisst *positiv*, wenn $\det(n, v, w) > 0$ und *negativ* wenn $\det(u, v, w) < 0$.

Beispiel: $\det(e_1, e_2, e_3) = 1 > 0$.



"rechte Hand Regel"

Beispiel:
$$\det(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle = ||u \times v||^2 > 0$$

$u, v, u \times v$ ist eine positive Basis!

4 Folgen & Reihen

4.1 Folgen

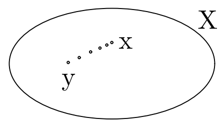
X Menge. Eine *Folge* in X ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to X$$

Schreibweise: $x_n := f(n)$

- $x_1, x_2, x_3, ...$
- $\mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$
- $(x_n), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Was heisst es, dass (x_n) gegen $x \in X$ konvergent ist?



Abstandsfunktion:

$$d : X \times Y \to \mathbb{R}$$

Definition: Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) wobei X eine Menge ist und

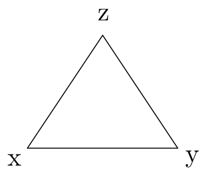
$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften ist.

(i) $d(x, y) \geq 0 \, \forall x, y \in X$
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \, \forall x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)



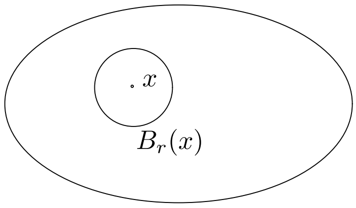
Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
2. V reeller Vektorraum. $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ Norm
$$d(v, w) := ||v - w||$$
z.B.
$$V = \mathbb{R}^n, \, ||x|| = \sqrt{\sum_i^n x_i^2}$$
3. X beliebig
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$
4. $X = \mathbb{N}$. Sei $p \in \mathbb{N}$. ("p-adische Metrik auf $\mathbb{Z}$")
Für $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$ sei $n \in \mathbb{N}$ die grösste Zahl, so dass $x - y$ durch p^n teilbar ist.
Definiere
$$d_p(x, y) := \frac{1}{p^n} = \min\left\{\frac{1}{p^k} \mid x - y \text{ ist durch } p^k \text{ teilbar}\right\}$$

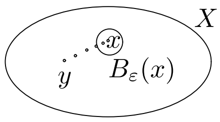
Bezeichnung: $r > 0$, $x \in X$

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

"Ball vom Radius r mit Mittelpunkt x"



(X,d) metrischer Raum, (x_n) Folge in X, $x \in X$



Definition: Wir sagen, dass die Folge (x_n) *gegen x konvergiert*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$$

Als logische Formel: $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

Bezeichnung:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

dies heisst: (x_n) konvergiert gegen x. x heisst in diesem Fall "Limes von (x_n)".

Schreibweise: $x_n \to x$

Bemerkung: Der Limes ist eindeutig.

Beweis: Annahme:

$$x_n \to x \in X \qquad x_n \to y \in X$$

Sei $\epsilon > 0$:
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$
Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$
$\Rightarrow$ Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &= d(x_n,x) + d(x_n,y) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

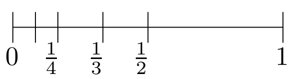
Zusammenfassung: $\forall \epsilon > 0$ gilt

$$0 \leq d(x,y) < \epsilon \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(QED)

Beispiel 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$



Beweis: Sei $\epsilon > 0$
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ ($\rightarrow$ Axiome von $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

(QED)

Beispiel 2: Sei $q \in \mathbb{C}$, so dass $|q| < 1$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|q|^{n_0} < \epsilon$ ($\rightarrow$ Satz 1 aus Kap. 1)
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$:

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \leq |q|^{n_0} < \epsilon$$

(QED)

Beispiele 3:

1. $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht!
2. $x_n = n^2$ "divergiert gegen ∞". Für $x_n \in \mathbb{R}$ heisst das
   $\forall c > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > c$$

Lemma 1: Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$
Dann gilt:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$$

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$$

iv) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $x_n \leq y_n \,\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x \leq y$$

v) $(a_n)(b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$, $a_n \leq x_n \leq b_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Bemerkung: (iv) gilt nicht, wenn man "$\leq$" durch "$<$" ersetzt.

Beispiel: $x_n = 0 < y_n = \frac{1}{n}\,\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

Beweis von Lemma 1:

i) *Summe:* Sei $\epsilon > 0$
$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2$

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |x_n - x + y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Produkt: Sei $\epsilon > 0$.
Wähle n_0 so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

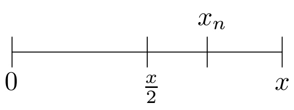
$$\begin{aligned} |x_n - x| &< \frac{\epsilon}{2(|y|+1)} \\ |x_n - x| &< 1 \\ |y_n - y| &< \frac{\epsilon}{2(|x|+1)} \end{aligned}$$

Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \\ &\leq (|x_n - x| + |x|)|y_n - y| + |x_n - x| \cdot (|y| + 1) \\ &\leq \underbrace{(|x| + 1)|y_n - y|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{(|y| + 1)|x_n - x|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \end{aligned}$$

ii) Sei $\epsilon > 0$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x| &< \frac{|x|}{2} \\ |x - x_n| &< \frac{\epsilon |x|^2}{2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow |x_n| \geq \frac{|x|}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x - x_n|}{|x| \cdot |x_n|} \leq \frac{2|x - x_n|}{|x|^2} < \epsilon$$

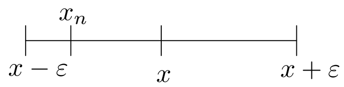
iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

iv) $\forall \epsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \epsilon,\ |y_n - y| < \epsilon$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x - \epsilon < x_n \leq y_n < y + \epsilon \\ &\Rightarrow x - \epsilon < y + \epsilon \\ &\Rightarrow x < y + 2\epsilon\, \forall \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow x \leq y \end{aligned}$$

v) Sei $\epsilon > 0$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow a_n > x - \epsilon,\ b_n < x + \epsilon \\ &\Rightarrow x - \epsilon < x_n < x + \epsilon \\ &\Rightarrow |x - x_n| < \epsilon \end{aligned}$$



$$|x - x_n| < \epsilon \Leftrightarrow x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

(QED)

Beispiel 4:

$$\begin{aligned} x_n = \frac{(2n+9)(3n^2-2)}{(5n-4)^3} &= \frac{(2+\frac{9}{n})(3-\frac{2}{n^2})}{(5-\frac{4}{n})^3} \\ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(2\cdot 3)}{5^3} &= \frac{6}{125} \end{aligned}$$

Beispiel 5: $a > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Fall 1: $a \geq 1$
Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a < (1+\epsilon)^{n_0}$$

(Kap. 1, Satz 1) $\Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} 1 \leq a^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n_0}} &< 1 + \epsilon \\ \Rightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 &< \epsilon \end{aligned}$$

2. Fall: $a < 1$

$$\begin{aligned} b := \frac{1}{a} > 1 &\overset{1.F}{\Rightarrow} b^{\frac{1}{n}} \to 1 \\ b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} &\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \to 1 \end{aligned}$$

Beispiel 6: $s \in \mathbb{Q},\ s > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$$

$\rightarrow$ Übung

Beispiel 7:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$n_0 \geq 1 + \frac{2}{\epsilon^2}$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$n - 1 \geq \frac{2}{\epsilon^2}$$

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + ... > n\underbrace{\frac{n-1}{2}\epsilon^2}_{\geq 1} \geq n$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n < (1+\epsilon)^n\ \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow 1 \leq n^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon\ \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow |n^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon \end{aligned}$$

Beispiel 8: $0 < x < 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0$$

$\to$ Übung

Hinweis:

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ (Bsp 5)}$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{k}{n}} x = x \text{ (Bsp 7)}$$

Lemma 2: (x_n) Folge in $\mathbb{R}$, $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^{1/p} = x^{1/p}$$

Beweis:

- Fall 1: $x = 0$
  Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$
  $$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \epsilon^p$$
  $\Rightarrow$ Für $n \geq n_0$ gilt
  $$|x_n^{1/p} - 0^{1/p}| = |x_n|^{1/p} < \epsilon$$
- Fall 2: $x = 1$
  Sei $y_n := x_n^{1/p}$
  $$(y_n - 1)(1 + y_n + y_n^2 + ... + y_n^{p-1}) = y_n^p - 1 = x_n - 1$$
  $$\begin{aligned} &\Rightarrow |y_n - 1| = \frac{|x_n - 1|}{1 + y_n + ... + y_n^{p-1}} \leq |x_n - 1| \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |y_n - 1| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 1 \end{aligned}$$
- Fall 3: $x > 0$
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n = x &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x}\right)^{1/p} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^{1/p} = x^{1/p} \end{aligned}$$

Lemma 3: $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$, $||x|| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$
$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$ mit

$$x_k = (x_{k1}, ..., x_{kn}) \in \mathbb{R}^n \qquad x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow$ Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (x_k) konvergiert gegen x_0 in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Für $i = 1, ..., n$ konvergiert die Folge $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x_{0i}

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii): $|x_{k_i} - x_{0_i}| \leq ||x_k - x_0||$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} ||x_k - x_0|| = 0 &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_0| = 0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{ki} := x_{0i}\end{aligned}$$

- (ii) $\Rightarrow$ (i): Für $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i} &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_{ki} - x_{0i}|^2 = 0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{0i}|^2 = 0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - x_{0i}|^2} = 0\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0\end{aligned}$$

(QED)

Korollar 1: $(x_k), (y_k)$ Folgen in $\mathbb{R}^n$, (λ_k) Folge in $\mathbb{R}$.

(i) $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$

$$\Rightarrow x_k + y_k \to x_0 + y_0$$

(ii) $x_k \to x_0$, $\lambda_k \to \lambda_0$

$$\Rightarrow \lambda_k x_k \to \lambda_0 x_0$$

(iii) $x_k \to x_0$

$$\Rightarrow ||x_k|| \to ||x_0||$$

Beweis:

(i) $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$

$$\begin{aligned}&\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow} x_{ki} \to x_{0i},\ y_{ki} \to y_{0i}\\ &\overset{\text{Lem1}}{\Rightarrow} x_{ki} + y_{ki} \to x_{0i} + y_{0i}\\ &\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow} x_k + y_k \to x_0 + y_0\end{aligned}$$

(ii) Genauso wie (i)

(iii) $x_k \to x_0$

$$\begin{aligned}&\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow} x_{ki} \to x_{0i}\\ &\overset{\text{Lem1}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} |x_{ki}|^2 \to \sum_{i=1}^{n} |x_{0i}|^2\\ &\overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} ||x_k|| \to ||x_0||\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: (iii) folgt auch aus der Ungleichung:

$$|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x - y||$$

Korollar 2: Seien $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$, $c_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C}$, $z = x + iy, c = a + ib \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow$ Es gelten folgende Aussagen:

(i) $\lim_{k\to\infty} z_k = z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_k = x \\ \lim_{k\to\infty} y_k = y \end{cases}$$

(ii) $\lim_{k\to\infty} z_k = z$, $\lim_{k\to\infty} c_k = c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{k\to\infty}(z_k + c_k) = z + c \\ \lim_{k\to\infty} z_k c_k = zc \end{cases}$$

(iii) $\lim_{k\to\infty} z_k = z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{k\to\infty} \overline{z}_k = \overline{z} \\ \lim_{k\to\infty} |z_k| = |z| \end{cases}$$

(iv) $\lim_{k\to\infty} z_k = z \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1}{z_k} = \frac{1}{z}$$

Beweis:

(i) Lemma 3 mit $n = 2$

(ii) *Summe:* Korollar 1

Produkt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z_k c_k) = x_k a_k - y_k b_k \to \mathrm{Re}(zc) \\ \mathrm{Im}(z_k c_k) = x_k b_k + y_k a_k \to \mathrm{Im}(zc) \end{array}\right\} \overset{(i)}{\Rightarrow} z_k c_k \to zc$$

(iii) *Komplex konjugierte:*

$$\begin{aligned} z_k \to z &\Rightarrow x_k \to x,\, y_k \to y \\ &\Rightarrow -y_k \to -y \\ &\Rightarrow \overline{z}_k \to \overline{z} \end{aligned}$$

Betrag: Korollar 1, (iii)

(iv) $z_k \to z \neq 0$

$$\Rightarrow z_k \neq 0$$

für hinreichend grosse k.

$$\frac{1}{z_k} = \frac{\overline{z}_k}{|z_k|^2} \to \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

(QED)

Definition: Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heisst *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$|x_n| \leq c \,\forall n \in \mathbb{N}$$

Lemma 4: $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

(y_n) beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

Beweis: Sei $c > 0$, so dass $|y_n| \leq c \, \forall n \in \mathbb{N}$ und sei $\epsilon > 0$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\epsilon}{c}$$

$\Rightarrow$ Für $n \geq n_0$ gilt

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq c|x_n| < \epsilon$$

(QED)

Beispiel: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = (-1)^n$

$$\Rightarrow x_n y_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

Lemma 5: Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.

Beweis: $x_n \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |x_n - x| < 1 \\ &\Rightarrow -1 < x_n - x < 1 \end{aligned}$$

für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq \underbrace{|x_n - x|}_{<1} + |x| \\ &\leq |x| + 1 \, \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Sei $c := \max\{|x| + 1, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0} - 1|\}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |x_n| \leq |x| + 1 \leq c \, \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow |x_n| \leq c \text{ für } n = 1, 2, ..., n_0 - 1 \\ &\Rightarrow |x_n| \leq c \, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Beispiel: $x_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Definition: Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heisst

- *monoton wachsend*, wenn

$$a_n \leq a_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$$

- *monoton fallend*, wenn

$$a_n \geq a_{n+1} \, \forall n \in \mathbb{N}$$

- *monoton*, wenn eins von beiden gilt.

Satz 1: Jede monotone, beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis: $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, A ist beschränkt.

- Fall 1: a_n monoton wachsend.

$$a := \sup A = \sup a_n \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

  Sei $\epsilon > 0$
  $\Rightarrow a - \epsilon$ ist keine obere Schranke von A.
  $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_{n_0} > a - \epsilon$
  $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ gilt $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$
  $\Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq n_0$

- Fall 2: a_n monoton fallend.

$$a := \inf A$$

  genauso!

(QED)

Beispiel 1:

$$p_n := \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}$$

Ziel: Zeigen, dass

$$\frac{p_n}{\sqrt{n}}$$

konvergiert.

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Behauptung:

$$\frac{p_n}{\sqrt{n}}$$

ist monoton fallend und

$$\frac{p_n}{\sqrt{n+1}}$$

ist monoton steigend.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p_n}{\sqrt{n}} : \frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2 &= \left(\frac{p_n}{p_{n+1}}\right)^2 \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{(2n+1)^2(n+1)}{(2n+2)^2 n} \\
&= \frac{4n^3 + 8n^2 + 5n + 1}{4n^3 + 8n^2 + 4n} > 1 \\
\left(\frac{p_n}{\sqrt{n+1}} : \frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)^2 &= \left(\frac{p_n}{p_{n+1}}\right)^2 \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+1)^2(n+2)}{(2n+2)^2(n+1)} \\
&= \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4} < 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{2} = \frac{p_1}{\sqrt{2}} < \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} < \frac{p_n}{\sqrt{n}} < p_1 = 2$$

Das heisst, $p_n/\sqrt{n}$ ist monoton und beschränkt
$\Rightarrow$ Der Limes

$$p := \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{\sqrt{n}}$$

existiert (nach Satz 1) und

$$\sqrt{2} \leq p \leq 2$$

(QED)

4.1.1 Das Wallis'sche Produkt

$$\begin{aligned}
w_n &:= \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{p_n^2}{2n+1} \\
\lim_{n\to\infty} w_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{p_n^2}{n}\cdot\frac{n}{2n+1} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{p_n^2}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\right) \\
&= \frac{p^2}{2}
\end{aligned}$$

Wir werden später sehen:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2} = \frac{p^2}{2} \Rightarrow p = \sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2^{2n}}{p_n} \\
\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot 2^{2n} \\
\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} &= \frac{\sqrt{n}}{p_n} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\
\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n\cdot\pi}}{2^{2n}} &\to 1
\end{aligned}$$

Die Folge

$$x_n = \binom{2n}{n}$$

hat das gleiche *asymptotische Verhalten*, wie

$$y_n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\cdot\pi}}$$

das heisst

$$\frac{x_n}{y_n} \to 1$$

$$x_n \cong y_n$$

Beispiel 2: Sei $a > 0$ und $x_0 > 0$ irgendeine pos. reelle Zahl.

$$\begin{aligned}
x_1 &:= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \\
x_2 &:= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) \\
x_{n+1} &:= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)
\end{aligned}$$

"Rekursionsformel"

Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a &= x_{n-1} \cdot \frac{a}{x_{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{2}x_{n-1}^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{x_{n-1}^2} \\ \Rightarrow a &\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{4}x_{n-1}^2 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{x_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{4}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})^2 \\ &= x_n^2 \\ \Rightarrow x_n &\geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

x_n monoton fallend!

$$\begin{aligned} x_n \to x \Rightarrow x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ \Rightarrow x &= \frac{a}{x} \\ \Rightarrow x &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

Definition: Eine *Teilfolge* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, so dass $n_{k+1} > n_k \, \forall k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Metrischen Raum (X, d), die gegen $x \in X$ konvergiert.
$\Rightarrow$ Jede Teilfolge von (x_n) konvergiert ebenfalls gegen x.

Definition: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Element $x \in X$ mit

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$$

heisst *Häufungspunkt* von (x_n), wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N}$:

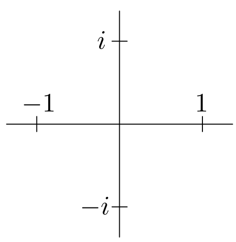
$$n \geq N, \, d(x_n, x) < \epsilon$$

in anderen Worten, für jedes $\epsilon > 0$ enthält der Ball $B_\epsilon(x)$ unendlich viele Glieder der Folge (x_n).

Beispiel 1: $x_n = (-1)^n \in \mathbb{R}$
Häufungspunkte: $1, -1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1$$

Beispiel 2: $x_n = i^n \in \mathbb{C}$
Häufungspunkte: $1, -1, i, -i$



Lemma 6: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) und sei $x \in X$.
Äquivalent sind:

(i) x ist ein Häufungspunkt von (x_n)

(ii) $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert.

Beweis:

- (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$
  $\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}$
  $$k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \epsilon$$
  Sei $k := \max\{k_0, N\}$ und $n := n_k$
  $\Rightarrow n = n_k \geq k \geq N$, $k \geq k_0$
  $$d(x_{n_k}, x) < \epsilon$$
  $\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N}$:
  $$n \geq N, \, d(x_n, x) < \epsilon$$
- (i) $\Rightarrow$ (ii): Annahme x Häufungspunkt von (x_n)
  Konstruktion der Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ durch vollständige Induktion:
  Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_1}, x) < 1$
  Wähle $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$ und $n_2 > n_1$
  Wähle $n_3 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_3}, x) < \frac{1}{3}$ und $n_3 > n_2$
  $\vdots$
  Wähle $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$ und $n_{k+1} > n_k$

  Da $n_{k+1} > n_k$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$, ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n). Da $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, konvergiert (x_{n_k}) gegen x.

(QED)

Satz 2: (Bolzano-Weierstrass)
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung: Die Aussage dieses Satzes ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $c > 0$, so dass
$$|x_n| \leq c \, \forall n \in \mathbb{N}$$
Definiere:
$$\begin{aligned} b_n :&= \sup\{x_k | k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \\ \Rightarrow b_{n+1} &\leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N} \\ -c &\leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$
$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} b_n$ konvergiert.
$$b := \lim_{n\to\infty} b_n$$
Behauptung: b ist ein Häufungspunkt von (x_n).
Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$
$$n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$
Sei $n_1 := \max\{n_0, N\}$
$$b_{n_1} = \sup\{x_k | k \geq n_1\}$$
$\Rightarrow \exists k \geq n_1$, so dass
$$b_{n_1} - \frac{\epsilon}{2} < x_k \leq b_{n_1}$$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow |x_k - b_{n_1}| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow |x_k - b| \leq \underbrace{|x_k - b_{n_1}|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_{n_1} - b|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \end{aligned}$$
und
$$k \geq n_1 \geq N$$
(QED)

Bemerkung: Die Zahl

$$b = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k | k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{k\geq n} x_k}^{b_n}$$

heisst *Limes superior* von (x_n). Ebenso heisst

$$a := \lim_{n\to\infty} \overbrace{\inf_{k\geq n} x_k}^{a_n}$$

Limes inferior von (x_n). Beide Zahlen a, b sind Häufungspunkte von (x_n).

Korollar:

i) Jeder weitere Häufungspunkt x von (x_n) erfüllt $a \leq x \leq b$

ii) $a = b \Rightarrow (x_n)$ konvergiert

Beweis:

i) Übung

ii) Sei $\epsilon > 0$.
Wir wissen $a_n \leq b_n$ und $a_n \to a$, $b_n \to b = a$
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow a - \epsilon \leq a_n \leq a = b \leq b_n \leq b + \epsilon = a + \epsilon \\ &\Rightarrow a_n \leq x_n \leq b_n \\ &\Rightarrow a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon \end{aligned}$$

(QED)

Schreibweise:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

4.1.2 Das Cauchy-Kriterium

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.
(x_n) heisst *Cauchy-Folge*, wenn $\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Bemerkung: Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ und

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(QED)

Lemma 7: Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen $x \in X$ konvergiert.
$\Rightarrow (x_n)$ konvergiert gegen x.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}$

$$k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

Wähle k, so dass $k \geq k_0$, $n_k \geq n_0$
$\Rightarrow$ Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

(QED)

Beispiel: $X = \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y|$

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

(x_n) konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$
(x_n) konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heisst *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge (x_n) in X gegen ein Element $x \in X$ konvergiert.

Lemma 8: Jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist beschränkt.

Beweis: Sei $\epsilon = 1$
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1$$

Definiere $c := \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$
$\Rightarrow$ Für $n = 1, 2, ..., n_0 - 1$ gilt

$$|x_n| \leq c$$

und für $n \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned}|x_n| &= |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \\ &\leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \\ &< 1 + |x_{n_0}| \leq c\end{aligned}$$

(QED)

Satz 3: Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.
$\stackrel{\text{Lem8}}{\Rightarrow} (x_n)$ ist beschränkt
$\stackrel{\text{Sa2}}{\Rightarrow} (x_n)$ besitzt eine konvergente Teilfolge
$\stackrel{\text{Lem7}}{\Rightarrow} (x_n)$ konvergiert. (QED)

Zusammenfassung:

1. Vollständigkeitsaxiom: Für $\mathbb{R}$
2. Existenz von $\sup, \inf$
3. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge
4. Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Bemerkung: Aus 4) folgt auch 1) (ohne Beweis)

Satz 4:

(i) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert

(ii) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge

Beweis: *Notation:* $x(k) =: (x_1(k), ..., x_n(k)) \in \mathbb{R}^n$

(i) Sei $x(k)$ eine Cauchy-Folge

$$|x_i(k) - x_i(l)|_{\mathbb{R}} \leq ||x(k) - x(l)||_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow (x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge für $i = 1, ..., n$
$\overset{\text{Sa3}}{\Rightarrow} (x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $i = 1, ..., n$
$\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow} (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$

(ii) $n = 1$: OK (nach Satz 2)

$n \geq 2$: *Annahme:* (ii) gilt für $n-1$ statt n.
Sei $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$.

Trick: $\widetilde{x}(k) := (x_1(k), ..., x_{n-1}(k)) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$x(k) = (\widetilde{x}(k), x_n(k))$$

$$\Rightarrow ||\widetilde{x}(k)||_{\mathbb{R}^{n-1}} \leq ||x(k)||_{\mathbb{R}^n}$$
$$|x_n(k)|_{\mathbb{R}} \leq ||x(k)||_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow$ Die Folgen $\widetilde{x}(k), x_n(k)$ sind ebenfalls beschränkt
$\overset{\text{Ann}}{\Rightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge

$$(\widetilde{x}(k_l))_{l\in\mathbb{N}}$$

$$k_1 < k_2 < k_3 < ...$$

Die Folge $(x_n(k_l))_{l\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt
$\overset{\text{Sa2}}{\Rightarrow}$ Die Folge $(x_n(k_l))_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge

$$(x_n(k_{l_m}))_{m\in\mathbb{N}}$$

$$l_1 < l_2 < l_3 < ...$$

Die Folge $(\widetilde{x}(k_{l_m}))_m$ konvergiert
$\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow}$ Die Folge

$$(x_i(k_{l_m}))_{m\in\mathbb{N}}$$

konvergiert für $i = 1, ..., n$
$\overset{\text{Lem3}}{\Rightarrow}$ Die Folge

$$(x(k_{l_m}))_{m\in\mathbb{N}}$$

konvergiert. (QED)

4.2 Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Wir wollen dem Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

einen Sinn geben.

Beispiel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

Definition: Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \in \mathbb{C}$$

heisst *Folge der Partialsummen.* Mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichen wir die Folge der Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir sagen die *Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert wenn die Folge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert.

Im Fall der Konvergenz definieren wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Warnung: Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

hat zwei Bedeutungen. Er bezeichnet die Folge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

der Partialsummen und ebenfalls deren Limes, falls dieser existert.

Bemerkung 1: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert.

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

(d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.)

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= a_n \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$
Folgen in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergieren.

1) Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$$
konvergiert ebenfalls und
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) Die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k)$$
konvergiert und
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis:

1) Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

2) Skalarprodukt: Übung

Beispiel 1: $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $a_k := z^k$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-z} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k &= \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

Diese Reihe divergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Betrachte $n = 2^m$

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8}} + ... \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + ... + \frac{1}{2^m}\right)}_{\geq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m}} \\ &\geq \frac{m+2}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

Beispiel 4: Positive Folgen
Sei $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert
$\overset{\text{Sa1}}{\Leftrightarrow}$ Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Beispiel 5: $s \in \mathbb{Q}, s > 0$
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$

- Fall 1: $s \leq 1$

  $$\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$$

  divergiert! ($\to$ Bsp. 2)

- Fall 2: $s > 1$
  Sei $n = 2^m - 1$

$$\begin{aligned}
s_{2^m-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{7^s}\right) + ... \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{(m-1)s}} + ... + \frac{1}{(2^m-1)^s}\right) \\
&\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 4 \cdot \frac{1}{4^s} + ... + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{(2^{m-1})^s} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} (2^k)^{1-s} = \sum_{k=0}^{m-1} (2^{1-s})^k \\
&= \frac{1-(2^{1-s})^m}{1-2^{1-s}} \qquad \Big| 2^{1-s} = \frac{2}{2^s} < 1 \\
&\leq \frac{1}{1-2^{1-s}} \\
\Rightarrow s_n &\leq \frac{1}{1-2^{1-s}} \; \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$, wähle $m \in \mathbb{N}$, so dass $n \leq 2^m - 1$. Dann gilt

$$s_n \leq s_{2^m-1} \leq \frac{1}{1-2^{1-s}}$$

Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$ nach Bsp. 4.

Bezeichnung: Die Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \; s > 1$$

heisst *Riemann'sche Zeta-Funktion*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

Beispiel 6: $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

$$x_1, x_2, x_3, ... \in \{0, 1, ..., b-1\}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$$

konvergiert gegen eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$
Schreibweise:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 ...$$

$b = 10$ Dezimalbruch
$b = 2$ Dualbruch

Konvergenzbeweis:

$$\begin{aligned}
a_k &:= \frac{x_k}{b^k} \leq \frac{b-1}{b^k} \\
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b-1}{b^k} = (b-1) \frac{\frac{1}{b} - \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{b}} \\
&= 1 - b \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{b^n} \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$.
Wir wollen zeigen, dass es eine Folge $x_k \in \{0, 1, ..., b-1\}$ gibt, s.d

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$$

Bezeichnung: Gaussklammer

$$[y] := \max\{k \in \mathbb{N} | k \leq y\},\ y \in \mathbb{R}$$

Wir konstruieren die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ induktiv.

$$x_1 := [bx]$$

$n \geq 2$: Wir nehmen an $x_1, ..., x_{n-1}$ seien bereits konstruiert, dann definieren wir

$$x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) \right]$$

Behauptung: Für diese Folge gilt:

$$x_n \in \{0, 1, ..., b-1\}$$
$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion: $n = 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\Rightarrow 0 \leq bx < b \\ &\Rightarrow 0 \leq [bx] < b \\ &\Rightarrow x_1 = [bx] \in \{0, 1, ..., b-1\} \end{aligned}$$
$$0 \leq bx - [bx] = b\left(x - \frac{x_1}{b}\right) < 1 \Rightarrow 0 \leq x - \frac{x_1}{b} < \frac{1}{b}$$

$n \geq 2$: Die Annahme gelte für $n - 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq x - &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^{n-1}} \\ &\Rightarrow 0 \leq b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) < b \\ &\Rightarrow x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) \right] \in \{0, 1, ..., b-1\} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 0 \leq b^n &\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) - x_n < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} - \frac{x_n}{b^n} < \frac{1}{b_n} \\ &\Rightarrow 0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n} \end{aligned}$$

Beispiel 7: Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} + ...$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergiert!

Satz 5 (Leibnitzkriterium): Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, d.h. $a_n \geq 0,\ a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergiert}$$

Sei

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

dann gilt

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

Beweis:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

$$s_n - s_{n-2} = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} = (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{n-1} - a_n)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow s_n - s_{n-2} \begin{cases} \geq 0 & n \text{ ungerade} \\ \leq 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

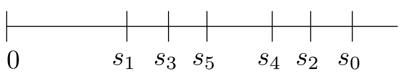
$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \ldots \qquad s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow s_{2k} \geq s_{2k-1} \geq \ldots \geq s_1 \\ &\Rightarrow s_{2k} \geq s_1 \\ &\Rightarrow s_{2k+1} \leq s_0 \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_{2k} \text{ existiert} \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \text{ existiert} \end{aligned}$$

Weiter sollen diese Limites gleich sein:

$$s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k} \to 0$$

$$s_{2k-1} \leq s_{2k} \leq s_{2k-2} \leq \ldots \leq s_0$$



$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n =: s \text{ existiert}$$

Oder mit Intervallschachtelung:

$$|I_k| = a_{2k} \qquad I_k = [s_{2k-1}, s_{2k}]$$

Beweis für die Ungleichung:

$$\begin{aligned} |s - s_{2k-1}| &\leq |s_{2k} - s_{2k-1}| = a_{2k} \\ |s - s_{2k}| &\leq |s_{2k} - s_{2k+1}| = a_{2k+1} \end{aligned}$$

(QED)

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

heisst *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

der Absolutbeträge konvergiert.
Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Satz 6: Majorantenkriterium
Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

eine Reihe in $\mathbb{C}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

eine Reihe in $\mathbb{R}$, so dass

- $0 \leq |a_n| \leq r_n \, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergiert

dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bemerkung: Anwendung des Cauchy-Kriteriums auf Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow}$ Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergiert}$$

$\Leftrightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq n_0$ gilt:

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Beweis von Satz 6:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad |a_k| \leq r_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k \text{ konvergiert}$$

$\stackrel{\text{Bem}}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > m \geq n_0$:

$$\sum_{k=m+1}^{n} r_k < \epsilon$$

$\Rightarrow$ Für $n > m \geq n_0$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} r_k < \epsilon$$

(QED)

Beispiel 8:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n} = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot ... \cdot \frac{n}{n}}_{\leq 2/n^2 =: r_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ konvergiert}$$

Beispiel 9:

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{2n} = a_n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ divergiert}$$

Quotientenkriterium: $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{C}$$

- Fall 1: $|q| < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  konvergiert absolut

- Fall 2: $|q| > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  divergiert

Satz 7: Umordnungssatz
Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen und sei

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

eine bijektive Abbildung.
$\Rightarrow$ Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

konvergiert ebenfalls absolut und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bemerkung: Sei $a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert, aber nicht absolut.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = x$$

Beweis: Kolloquium

Beweis von Satz 7:

$$\begin{aligned} s_n &: = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad p_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \\ s &: = \lim_{n\to\infty} s_n \end{aligned}$$

Zu zeigen: $p_n \to s$
Absolute Konvergenz:

$$\begin{aligned} c &: = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_{\varphi(k)}| \le \sum_{\ell=1}^{N} |a_\ell| \le c \\ N &= \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \end{aligned}$$

konvergiert.

Beweis: $p_n \to s$
Sei $\epsilon > 0$
Wähle $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m, n \in \mathbb{N}$:

(1) $n > m \ge m_0$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=m+1}^{n} |a_\ell| < \frac{\epsilon}{2}$$

(2) Wähle n_0, so dass

$$\{1, ..., m_0\} \subset \{\varphi(1), ..., \varphi(n_0)\}$$

Dann gilt:

1. Für $n \ge m_0$

$$|s_n - s_{m_0}| = \left| \sum_{k=m_0+1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=m_0+1}^{n} |a_k| \overset{(1)}{<} \frac{\epsilon}{2}$$

2. $|s - s_{m_0}|$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{m_0}) \right| = \lim_{n\to\infty} |s_n - s_{m_0}| \le \frac{\epsilon}{2}$$

3. Für $n \geq n_0$ sei $N := \max\{\varphi(1), ..., \varphi(n)\}$
   Damit gilt:

$$\begin{aligned} |p_n - s_{m_0}| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{\ell=1}^{m_0} a_\ell \right| \\ &\overset{(2)}{=} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \right| \text{ für } \varphi(k) > m_0 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{\varphi(k)}| \text{ für } \varphi(k) > m_0 \\ &\leq \sum_{\ell=m_0+1}^{N} |a_\ell| \end{aligned}$$

   da $m_0 < \varphi(k) \leq N$ für jeden Summanden.

$$\overset{(1)}{<} \frac{\epsilon}{2}$$

   da $N \geq n \geq n_0 \geq m_0$

$\overset{2\&3}{\Rightarrow}$ Für $n \geq n_0$ gilt

$$|s - p_n| \leq \underbrace{|s - s_{m_0}|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|s_{m_0} - p_n|}_{\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = s$$

(QED)

Produkte:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i\leq n;\, j\leq n;\, i+j=k} a_i b_j\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) = \sum_{k+i\leq n} a_k b_i$$

Satz 8: Seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$$

absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen und sei

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k},\ m = 0, 1, 2, ...$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

konvergiert absolut und

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=0}^{n} c_m - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right)\right| &= \left|\sum_{k+\ell\leq n} a_k b_\ell - \sum_{k\leq n;\, \ell\leq n} a_k b_\ell\right| \\
&= \left|\sum_{k\leq n;\, \ell\leq n;\, k+\ell>n} a_k b_\ell\right| \\
&\leq \sum_{k,\ell=0;\, k+\ell>n}^{n} |a_k|\cdot|b_\ell|
\end{aligned}$$

$$< \left(\sum_{\frac{n}{2}\leq k\leq n} |a_k|\right)\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} |b_\ell|\right)}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)}_{\text{beschränkt}}\left(\sum_{\frac{n}{2}\leq \ell\leq n} |b_\ell|\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} c_m - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right)\right| = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_m &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right)
\end{aligned}$$

4.3 Potenzreihen

$a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$

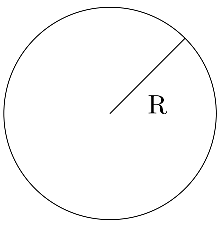
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\star)$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe?

Satz 9: Sei

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$)



$\Rightarrow$ Die Reihe $(\star)$ konvergiert absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$. R heisst *Konvergenzradius*.

Beweis:

- 1. Fall: $|z| < R$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z| = \frac{|z|}{R} < 1$$

$\Rightarrow \exists \rho < 1$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z| < \rho$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| \leq \rho$$
$$\Rightarrow |a_n| \cdot |z|^n \leq \rho^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt nach Majorantenkriterium: Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

konvergiert
$\Rightarrow (\star)$ konvergiert absolut.

- 2. Fall: $|z| > R$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| > 1$$

$\Rightarrow \exists \rho > 1$, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| > \rho$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z| > \rho$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0$

$$\sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z| > \rho$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$, so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |z| > \rho$$

$\Rightarrow$ Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, so dass

$$\sqrt[k]{|a_{n_k}|} \cdot |z| > \rho$$
$$\Rightarrow |a_{n_k} z^k| > \rho^k > 1$$

$\Rightarrow$ Die Folge $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen Null
$\Rightarrow$ Die Reihe $(\star)$ konvergiert nicht

(QED)

Beispiel 1: $a_n = \frac{1}{n^s}, s \in \mathbb{Q}$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} n^{\frac{s}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^s = 1$$

Wir wissen: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

konvergiert absolut für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$.
Was ist mit $|z| = 1$?

- $s > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

konvergiert absolut für $|z| = 1$

- $0 < s < 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

konvergiert für $z = -1$ und divergiert für $z = 1$.

- $s \leq 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

divergiert für $|z| = 1$.

Beispiel 2: $a_n = \frac{1}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

das heisst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
Quotienten-Kriterium:
$z \neq 0$

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$

$\Rightarrow$ konvergiert.

Definition: Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

die durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

definiert ist, heisst *Exponentialfunktion*.

Satz 10:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)\,\forall z, w \in \mathbb{C}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!}\right) \\
&\overset{\text{Sa8}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\right) z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= \exp(z+w)
\end{aligned}$$

(QED)

Korollar:

i) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

ii) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exp(n) = \exp(1)^n = e^n$

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) = 2.71...$$

iii) $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exp(s) = e^s$

iv) $z = i\omega, \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow |\exp(i\omega)| = 1$

Beweis:

iii) $\exp(qs) = \exp(p) \overset{\text{ii)}}{=} e^p = \exp(s)^q$

$$\Rightarrow \exp(s) = (e^p)^{1/q} = e^{p/q} = e^s$$

iv) $|\exp(i\omega)|^2 = \overline{\exp(i\omega)}\exp(i\omega)$

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \Rightarrow \exp(-i\omega)\exp(i\omega) = 1$$

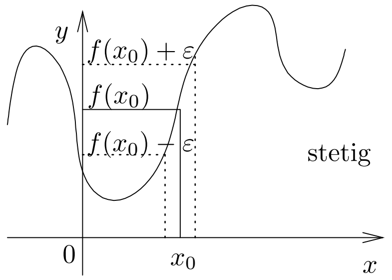
(QED)

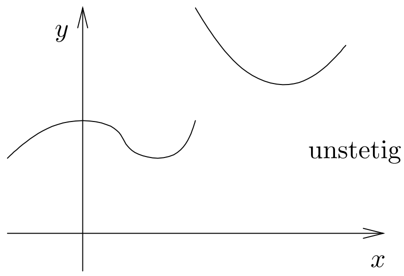
$$\exp(i\omega) = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$$

Definition:

$$\cos\omega := \operatorname{Re}\exp(i\omega)$$
$$\sin\omega := \operatorname{Im}\exp(i\omega)$$

5 Stetige Funktionen





$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $x_0\in\mathbb{R}$: $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in\mathbb{R}$

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

Definition: Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume.
Eine Funktion $f:X\to Y$, heisst *stetig an der Stelle* $x_0\in X$, wenn $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0:\forall x\in X$

$$d_X(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\epsilon$$

f heisst *stetig in* X, wenn f an jedem Punkt $x\in X$ stetig ist.

Beispiele:

1. Konstante Funktionen sind steig.
   Sei $y_0\in Y$ und $f(x)=y_0\,\forall x\in X$.

2. Die Identität ist stetig.
   $X=Y, f(x)=x\,\forall x\in X, \delta=\epsilon$

3. Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.
   $f:X\to Y$ *Lipschitz-stetig*, wenn $\exists L>0:\forall x_0,x_1\in X$

   $$d_Y(f(x_0),f(x_1))\leq Ld_X(x_0,x_1)$$

   $\delta:=\frac{\epsilon}{L}$

4. $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

   $$\begin{aligned}|x_0^2-x_1^2|&=|x_0-x_1|\cdot|x_0+x_1|\\&\leq|x_0-x_1|\cdot(|x_0|+|x_1|)\\&\leq 2|x_0-x_1|\end{aligned}$$

Lemma 1: Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $f:X\to Y$ stetig an der Stelle x_0 und $g:Y\to Z$ stetig an der Stelle $y_0=f(x_0)$.

Behauptung: $g\circ f:X\to Z$ ist stetig an der Stelle x_0.

Sei $\epsilon > 0$:
$\Rightarrow \exists \rho > 0 : \forall y \in Y$

$$d_Y(y, y_0) < \rho \Rightarrow d_Z(g(y), g(y_0)) < \epsilon$$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in X$

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \rho$$

$\Rightarrow$ Für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt

$$d_Y(f(x), y_0) < \rho$$

und daher

$$d_Z(g(f(x)), g(y_0)) = d_Z(g \circ f(x), g \circ f(x_0)) < \epsilon$$

(QED)

Lemma 2: $f : X \to Y$, $x_0 \in X$
Äquivalent sind:

i) f ist stetig, an der Stelle x_0.

ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii): *Annahme:* f stetig an der Stelle x_0 und $x_n \to x_0$.

  Behauptung: $f(x_n) \to f(x_0)$
  Sei $\epsilon > 0$
  Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall x \in X$:

  $$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

  Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$

  $$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta \\ &\Rightarrow d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon \end{aligned}$$

  das heisst $f(x_n) \to f(x_0)$.

- (ii) $\Rightarrow$ (i): *Annahme:* f sei nicht stetig an der Stelle x_0.
  f stetig in x_0: $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X$

  $$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

  f nicht stetig in x_0: $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists x \in X$

  $$d_X(x, x_0) < \delta \text{ und } d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$$

  Wähle $\delta = \frac{1}{n}$
  $\Rightarrow x_n \in X$, so dass

  $$\begin{aligned} d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} &\text{ und } d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \neq x_0 \end{aligned}$$

  $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$
  $\to$ Widerspruch!

(QED)

Lemma 3: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{C}$ stetig.

i) $f + g, fg : X \to \mathbb{C}$ stetig

ii) $|f|, \overline{f} : X \to \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : X \to \mathbb{R}$ sind stetig

iii) Sei $X_0 := \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$, dann ist $f/g : X_0 \to Y$ stetig

Beweis:

i) $x_n \to x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x_n) \to f(x),\ g(x_n) \to g(x) \\
&\Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x) \\
&\Rightarrow f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x)
\end{aligned}$$

Also folgt Stetigkeit von $f + g$ und fg aus Lemma 2.

ii) Genauso

iii) Genauso

(QED)

Beispiel 1: $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z, w) := z + w$.

$$\begin{aligned}
&(z_n, w_n) \to (z, w) \\
&\Rightarrow z_n \to z, w_n \to w \\
&\Rightarrow z_n + w_n \to z + w
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit nach Lemma 2.

Genauso $f(z, w) := zw$.

Beispiel 2: Polynome sind stetig.

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

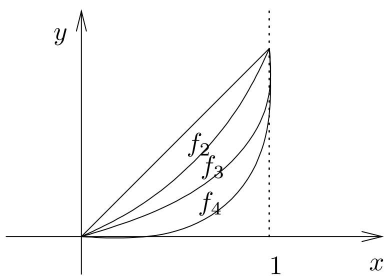
(nach Lemma 3)

Beispiel 3: $f : [0, \infty) \Rightarrow [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$

$$f(x) := \sqrt[p]{x}$$

(nach Lemma 2)

Beispiel 4: $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, $f_n(x) := x^n$



$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} f_n(x) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \\
&=: f(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig (an der Stelle $x = 1$).

Definition: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ eine Folge von Abbildungen $f : X \to Y$.

i) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen f, wenn $\forall x \in X$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
das heisst $\forall x \in X\, \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$
$$n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

ii) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmässig* gegen f, wenn $\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X$
$$n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Satz 1: Sei $f_n : X \to Y$ eine Folge stetiger Abbildungen, die gleichmässig gegen $f : X \to Y$ konvergiert.
$\Rightarrow f$ ist stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in X$
$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$$
Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall x \in X$
$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$
$\Rightarrow \forall x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt (Dreiecksungleichung)
$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$
(QED)

Spezialfall: $Y = \mathbb{C}$

Definition: Seien
$$\begin{aligned} F(X) &:= \{\text{Funktionen } f : X \to \mathbb{C}\} \\ \zeta(X) &:= \{f : X \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ ist stetig und beschränkt}\} \end{aligned}$$
Vektorräume. $\zeta(X)$ ist ein linearer Unterraum von $F(X)$ ($\zeta(X) \subset F(X)$).
$f : X \to \mathbb{C}$ heisst *beschränkt*, wenn $\exists c > 0 : \forall x \in X$
$$|f(x)| \leq c$$
Die *sup-Norm* auf $\zeta(X)$ ist definiert durch
$$0 \leq ||f|| := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$
Dies ist eine Norm:

- $||f|| \geq 0$
  $||f|| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\, \forall x \in X$
  (folgt durch "scharfes hingucken")
- $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||\, \forall \lambda \in \mathbb{C}\, \forall f \in \zeta(X)$
  (folgt durch "scharfes hingucken")
- $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||\, \forall f, g \in \zeta(X)$

  Beweis: $|f(x)| \leq ||f||\, \forall x \in X$
  $$\begin{aligned} &\Rightarrow |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||\, \forall x \in X \\ &\Rightarrow \sup_{x\in X} |(f+g)(x)| \leq ||f|| + ||g|| \\ &\Rightarrow ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| \end{aligned}$$

Satz 2: $\zeta(X)$ mit der sup-Norm ist vollständig.

Bemerkung: Ein vollständiger, normierter Vektorraum $(V, ||\cdot||)$ heisst *Banach-Raum*.

Beweis:

1. $f_n, f \in \zeta(X), n \in \mathbb{N}$
   Dann gilt: $f_n \to f$ in sup-Norm $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$
   $$n \geq n_0 \Rightarrow ||f - f_n|| \leq \epsilon$$
   $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X$
   $$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$
   $\Leftrightarrow f_n$ konvergiert gleichmässig gegen f

2. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\zeta(X)$
   $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||$$
   $\Rightarrow$ Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen für jedes $x \in X$.
   $\Rightarrow$ Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $x \in X$.
   Definiere $f : X \to \mathbb{C}$ durch
   $$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
   Behauptung:
   $$f \in \zeta(X) \qquad ||f - f_n|| > 0$$
   Sei $\epsilon > 0$.
   $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$
   $$n, m \geq n_0 \Rightarrow ||f_n - f_m|| \leq \epsilon$$
   $\Rightarrow$ Für jedes $x \in X$ und jedes $n \geq n_0$ gilt
   $$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty} ||f_n - f_m|| \leq \epsilon$$
   Wir haben gezeigt, dass $\forall \epsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\, \forall x \in X$
   $$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$
   $\Rightarrow f_n$ konvergiert gleichmässig gegen f.
   $\stackrel{\text{Sa1}}{\Rightarrow} f$ ist stetig.

   Ausserdem:
   $$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq\epsilon} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq||f_n||}$$
   $$\Rightarrow ||f|| \leq ||f_n|| + \epsilon$$
   $\Rightarrow f$ ist beschränkt.
   $\Rightarrow f \in \zeta(X)$
   Und damit gilt:
   $$||f_n - f|| \to 0$$
   Wir haben also gezeigt, dass jede Cauchy-Folge in $\zeta(X)$ konvergiert, d.h. $\zeta(X)$ ist vollständig.

(QED)

5.1 Potenz-Reihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\star)$$

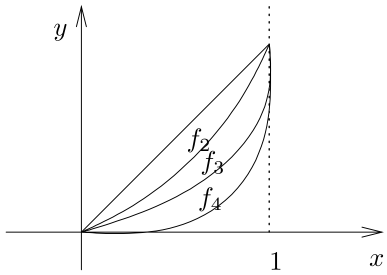
$a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}$
Konvergenz-Radius

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Satz 3: Die Formel $(\star)$ definiert eine stetige Funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}$$

Beweis:



Sei $0 < r < R$ und $X_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$
Definiere $f_n : X_r \to \mathbb{C}$ durch

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ |z| \leq r$$

Behauptung: f_n ist eine Cauchy-Folge in $\zeta(X_r)$.

Beweis: Wähle $\rho > R$, s.d.

$$\frac{r}{R} < \rho < 1$$

$$\Rightarrow r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < \rho$$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$

$$r \sqrt[n]{|a_n|} < \rho \Rightarrow r^n |a_n| < \rho^n$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$n_0 \geq N, \frac{\rho^{n_0+1}}{1-\rho} < \epsilon$$

$\Rightarrow$ Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r$ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f_m(z)| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k z^k \right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \cdot |z|^k \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| r^k \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho} \\
&\leq \frac{\rho^{m+1}}{1-\rho} < \epsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ||f_n - f_m|| < \epsilon$$

für $n \geq m \geq n_0$ (Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$)
$\overset{\text{Sa2}}{\Rightarrow}$ Die Cauchy-Folge f_n konvergiert gegen f in $\zeta(X_r)$
$\Rightarrow f$ ist stetig in X_r, $\forall r < R$
$\Rightarrow f$ ist stetig in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ (QED)

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n!}$, $R = \infty$ (Exponentialfunktion)

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

Satz 4: (Zwischenwertsatz)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ (oder $f(a) \geq \gamma \geq f(b)$).

$$\Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma$$

Beweis: Sei $X := \{x \in [a, b] | f(x) \leq \gamma\}$
$\Rightarrow X \neq \varnothing$ (da $a \in X$) und beschränkt.
Definiere

$$c := \sup X \in [a, b]$$

Schritt 1: $f(c) \leq \gamma$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists x \in X$:

$$c - \epsilon < x \leq c$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n \in X$:

$$c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$$

$$\Rightarrow |x_n - c| = c - x_n < \frac{1}{n} \, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = c$$
$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \gamma$$

Schritt 2: $f(c) \geq \gamma$

- 1. Fall: $c = b$
$$\Rightarrow f(c) = f(b) \geq \gamma$$
- 2. Fall: $c < b$
$$\Rightarrow c + \frac{1}{n} < b$$
  für grosse n
$$c + \frac{1}{n} \notin X$$
$$\Rightarrow f(c + \frac{1}{n}) > \gamma$$
  wenn n gross
$$c + \frac{1}{n} \to c$$
$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(c) = \lim_{n\to\infty} f(c + \frac{1}{n}) \geq \gamma$$

Nach Schritt 1 und 2 gilt

$$f(c) = \gamma$$

(QED)

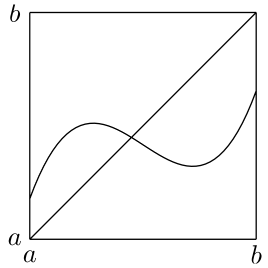
Korollar: Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig.
$\Rightarrow f$ hat einen *Fixpunkt*, das heisst $\exists x \in [a, b]$, so dass $f(x) = x$.

Beweis: Sei

$$g(x) := f(x) - x \qquad g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

stetig. Es gilt

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0$$



$$\Rightarrow g(b) \leq 0 \leq g(a)$$

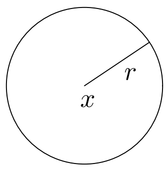
Nach Zwischenwertsatz (Satz 4) $\exists x \in [a, b]$, so dass $g(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = x$$

(QED)

5.2 Topologische Begriffe

Sei (X, d) ein metrischer Raum



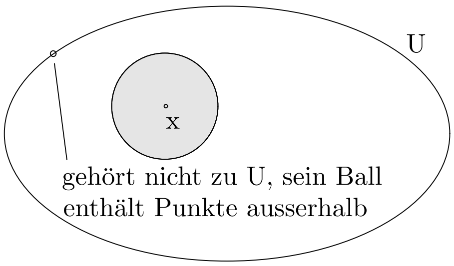
$$B_r(x) := \{y \in X | d(y, x) < r\}$$

"offener Ball"

Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heisst *offen*, wenn

$$\forall x \in U\, \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U$$

$\Rightarrow$ Teilmenge, die den "Mengen-Rand" nicht enthält.



Bemerkung:

1. Jeder offene Ball ist offen.

   Beweis: $U = B_r(x_0)$
   Sei $x \in U$

   $$\Rightarrow d(x, x_0) < r$$

   Sei $\epsilon := r - d(x, x_0) > 0$, dann gilt $\forall y$

   $$y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x + y, x_0) \leq d(x, x_0) + \underbrace{d(y, x)}_{<\varepsilon} < r$$

   $$\Rightarrow y \in B_r(x)$$
   $$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_r(x) = U$$

2. $\varnothing$ und X sind offen.

3. $U_1, ..., U_n$ offen
   $\Rightarrow U := U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ ist offen.

   Beweis: Sei $x \in U$

$$\Rightarrow x \in U_i,\ i = 1, ..., n$$
$$\Rightarrow \forall x \in U\ \exists \epsilon_i > 0 : B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$$

   Sei $\epsilon := \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\} \leq \epsilon_i\ \forall i$

$$\Rightarrow B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i\ \forall i$$
$$\Rightarrow B_\epsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$$

4. I beliebige Menge. Für jedes $i \in I$ sei $U_i \subset X$ offen

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i =: U$$

   ist offen.

   Beweis: Sei $x \in U$

$$\Rightarrow \exists i \in I \text{ s.d. } x \in U_i$$
$$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U_i$$
$$\Rightarrow B_\epsilon(x) \subset U$$

5. Offene Intervalle:

$$\varnothing,\ \mathbb{R},\ (a, b),\ (-\infty, b),\ (a, \infty)$$

Beispiel: Sei $U_i := (-1/i, 1/i) = B_{1/i}(0) \subset \mathbb{R}$

$$= \{x \in \mathbb{R} |\, |x| < 1/i\},\ i = 1, 2, 3, 4, ...$$

U_i ist offen $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$$

ist nicht offen.

Definition: Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathscr{U})$, wobei X eine Menge ist und $\mathscr{U} \subset 2^X$ eine Menge von Teilmengen von X ist, so dass

i) $\varnothing, X \in \mathscr{U}$

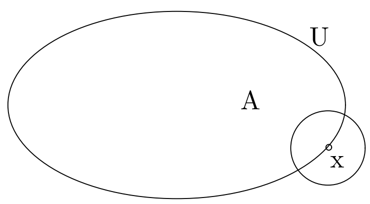
ii) $U_1, ..., U_n \in \mathscr{U} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{U}$

iii) $U_i \in \mathscr{U}$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{U}$

Die Elemente von $\mathscr{U}$ heissen *offene Teilmengen* von X.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst *abgeschlossen*, wenn für jedes $x \in X$ gilt:

$$B_\epsilon(x) \cap A \neq \varnothing\ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow x \in A$$



Bei abgeschl. Mengen gehören
die Randpunkte dazu

Beispiel:

i) $\varnothing$ und X sind abgeschlossen

ii) Abgeschlossene Intervalle:

$$\varnothing,\ \mathbb{R},\ [a,b],\ [a,\infty),\ (-\infty,b]$$

iii) Weder offene, noch abgeschlossene Intervalle:

$$[a,b),\ (a,b]$$

Lemma 4: Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Äquivalent sind:

i) A ist abgeschlossen

ii) $X \backslash A$ ist offen

iii) $x_n \in A\,\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dann folgt $x \in A$

Beweis:

- "i) $\Rightarrow$ iii)": Sei $x_n \in A\,\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall \epsilon > 0\,\exists n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon \\
&\Rightarrow \forall \epsilon > 0\,\exists n \in \mathbb{N} : x_n \in B_\epsilon(x) \cap A \\
&\Rightarrow B_\epsilon(x) \cap A \neq \varnothing\,\forall \epsilon > 0 \\
&\overset{\text{i)}}{\Rightarrow} x \in A
\end{aligned}$$

- "iii) $\Rightarrow$ ii)": Sei $x \in X \backslash A$.

  Behauptung: $\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap A = \varnothing$

  Annahme: $\forall \epsilon > 0$ ist $B_\epsilon(x) \cap A \neq \varnothing$
  Sei $x_n \in A\,\forall n \in \mathbb{N}$ und
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$
  $\Rightarrow x \notin A$, da $x \in B_\varepsilon(x)$ und $B_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing\,\forall \varepsilon > 0$
  $\rightarrow$ Widerspruch zu iii)!

- "ii) $\Rightarrow$ i)": Sei $x \in X$, so dass $B_\epsilon(x) \cap A \neq \varnothing\,\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B_\epsilon(x) \not\subset X \backslash A\,\forall \epsilon > 0 \\
&\Rightarrow x \notin X \backslash A \\
&\Rightarrow x \in A
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel: (Kantormenge)
Die Kantormenge ist abgeschlossen.

$$\underbrace{K}_{\text{abg.}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_n}_{\text{abg.}}$$

Bemerkung:

i) $\varnothing$ und X sind abgeschlossen

ii) $A_1, ..., A_n$ abgeschlossen
$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
abgeschlossen.

iii) A_i abgeschlossen $\forall i \in I$
$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$$
abgeschlossen.

Lemma 5: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung.
$\Rightarrow$ Äquivalent sind:

i) f ist stetig

ii) $U \subset Y$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ ist offen

iii) $A \subset Y$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A) \subset X$ ist abgeschlossen

Erinnerung: Für $f : X \to Y$ und $Z \subset Y$ definieren wir
$$f^{-1}(Z) := \{x \in X | f(x) \in Z\}$$

Beweis:

- "i) $\Rightarrow$ ii)": Sei f stetig und $U \subset Y$ offen

  Zu zeigen: $f^{-1}(U)$ ist offen
  Sei $x \in f^{-1}(U)$
  $$\Rightarrow f(x) \in U$$
  $$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(f(x)) \subset U$$
  $\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall x' \in X$
  $$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$
  das heisst
  $$f(x') \in B_\epsilon(f(x)) \subset U$$
  $\Rightarrow \forall x' \in X$ gilt
  $$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow x' \in f^{-1}(U)$$
  $$\Rightarrow B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$$
  Da $x \in f^{-1}(U)$ beliebig war, ist $f^{-1}(U)$ offen.

- "ii) $\Rightarrow$ iii)": Sei $A \subset Y$ abgeschlossen
  $\overset{\text{Lem4}}{\Rightarrow} Y \backslash A$ ist offen
  $\overset{\text{iii)}}{\Rightarrow} f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A)$ ist offen
  $\overset{\text{Lem4}}{\Rightarrow} f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen

- "iii) $\Rightarrow$ ii)": Genauso

- "ii) $\Rightarrow$ i)": Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B_\epsilon(f(x_0)) \subset Y \text{ ist offen} \\
&\overset{\text{ii)}}{\Rightarrow} x_0 \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \subset X \text{ ist offen} \\
&\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \\
&\Rightarrow f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))
\end{aligned}$$

das heisst $\forall x \in X$ gilt

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

(QED)

Beispiel: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig

$$\underbrace{\{x \in X | f(x) < c\}}_{\text{offen}} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, c)}_{\text{offen}})$$

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Eine Teilmenge $K \subset X$ nennen wir *kompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von K konvergiert.

Lemma 6: Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig.

i) $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt

ii) $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow K$ abgeschlossen

iii) $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt

Beweis:

i) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in K : f(x_n) = y_n$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}\, \exists x \in K$ so dass $x_{n_i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} y_{n_i} = f(x_{n_i}) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \in f(K)$$

Also ist $f(K)$ kompakt.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$$

$\overset{K \text{ kpkt}}{\Rightarrow} \exists$ Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, so dass

$$x = \lim_{i\to\infty} x_{n_i} \in K$$
$$\Rightarrow x \in K$$

iii) Sei K kompakt, $A \subset K$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A.
$\overset{K \text{ kpkt}}{\Rightarrow} \exists$ Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ in K

$$\Rightarrow x_{n_i} \in A\, \forall i \in \mathbb{N} \overset{A \text{ abg}}{\Rightarrow} x \in A$$

(QED)

Satz 5: Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig, bijektiv und sei X kompakt.
$\Rightarrow f^{-1} : Y \to X$ ist stetig.

Beweis: *Zu zeigen:* $U \subset X$ offen $\Rightarrow f(U) \subset Y$ offen
Sei $U \subset X$ offen

$$\begin{aligned}
\text{(Lemma 4)} &\Rightarrow X \backslash U \text{ abgeschlossen} \\
\text{(Lemma 6 iii))} &\Rightarrow X \backslash U \text{ kompakt} \\
\text{(Lemma 6 i))} &\Rightarrow f(X \backslash U) \text{ kompakt} \\
\text{(Lemma 6 ii))} &\Rightarrow f(X \backslash U) = Y \backslash f(U) \text{ abgeschlossen} \\
\text{(Lemma 4)} &\Rightarrow f(U) \text{ offen}
\end{aligned}$$

Also ist f stetig (nach Lemma 5). (QED)

Satz 6: (Heine-Borel)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$K \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow K \text{ ist abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis:

- "$\Rightarrow$": K ist abgeschlossen nach Lemma 6.

  Annahme: K nicht beschränkt.
  $\Rightarrow \forall c > 0\, \exists x \in K : |x| > c$
  Sei $c = k \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists x_k \in K : |x_k| > k$
  $\Rightarrow$ Keine Folge von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt
  $\Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge
  $\rightarrow$ Widerspruch!

- "$\Leftarrow$": Sei K abgeschlossen und beschränkt und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K.
  $\overset{K \text{ beschr.}}{\Rightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{k_\ell})_{n \in \mathbb{N}}$ (Bolzano-Weierstrass)

  $$x := \lim_{\ell \to \infty} x_{k_\ell} \in \mathbb{R}^n$$

  $\overset{K \text{ abg.}}{\Rightarrow} x \in K$

(QED)

Beispiel: Die Kantormenge ist kompakt.

Kompakte Intervalle: $\varnothing$, $\{a\}$, $[a, b]$

Satz 7: (Minimum/Maximum)
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\varnothing \neq K \subset X$ kompakt, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
$\Rightarrow x_0, x_1 \in K$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\, \forall x \in K$$

Beweis: Sei K kompakt und f stetig

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(K) \subset \mathbb{R} \text{ ist kompakt} \\
&\overset{\text{Sa6}}{\Rightarrow} f(K) \text{ ist beschränkt} \\
&\Rightarrow -\infty < \sup f(K) < \infty
\end{aligned}$$

$c_1 := \sup f(K)$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in K : c_1 - \frac{1}{n} < f(x_n)$$

$\overset{K \text{ kpkt}}{\Rightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in K : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1$$

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(x_1) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = c_1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(x_1)\, \forall x \in K$$

(QED)

Erinnerung:

$$f : X \to Y \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall x_0 \in X\, \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X$$

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Definition: f heisst *gleichmässig stetig*, wenn gilt
$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X$

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Satz 8: Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt.
$\Rightarrow f$ ist gleichmässig stetig.

Beweis: *Annahme:* f ist nicht gleichmässig stetig.
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists x, x' \in X$:

$$d_X(x, x') < \delta,\ d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

$\overset{\delta=\frac{1}{n}}{\Rightarrow} \exists x_n, x'_n \in X$:

$$d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n},\ d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon$$

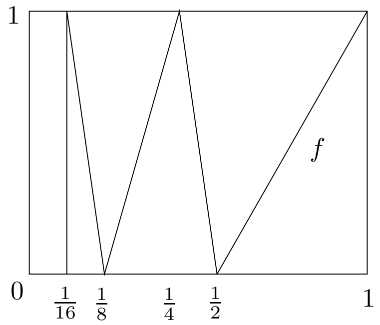
$\overset{X \text{ kpkt}}{\Rightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$

$$x := \lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \lim_{i\to\infty} x'_{n_i}$$

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(x) = \lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} f(x'_{n_i})$$

$\rightarrow$ Widerspruch zu $d(f(x_{n_i}), f(x_{n_i})) \geq \epsilon$! (QED)

Beispiel: Sei $X = (0, 1]$ und $Y = R$



$$f(x) = \begin{cases} 2^{2n+1}\left(x - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) & \frac{1}{2^{2n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^{2n}} \\ 2^{2n}\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - x\right) & \frac{1}{2^{2n}} \leq x \leq \frac{1}{2^{2n-1}} \end{cases}$$

f nicht gleichmässig stetig (nur stetig).

$$f\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = 1 \quad f\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right) = 0$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) - f\left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right)\right| = 1 \qquad \left|\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n-1}}\right| = \frac{1}{2^{2n}} \to 0$$

$$\epsilon = 1\, \nexists \delta$$

5.3 Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z$$
$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$$

Eigenschaften:

1) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig

2) $\exp(0) = 1$
$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

3) Limes
$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$$

Beweis:

3) *Zu zeigen:* $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall z \in \mathbb{C}$
$$0 < |z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\frac{e^z-1}{z} - 1 = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$$
$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + ...$$
$$\Rightarrow \left| \frac{e^z-1}{z} - 1 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|$$

für $|z| < \frac{1}{2}$
$$\Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

falls $\epsilon < 1$.

(QED)

Satz 9: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass $\forall z, w \in \mathbb{C}$
$$f(0) = 1 \qquad f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$$
$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{f(z)-1}{z} = 1$$

dann folgt
$$f = \exp$$

Beweis:
$$z = \underbrace{\frac{z}{n} + ... + \frac{z}{n}}_{n-\text{mal}} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{z}{n}\right)^n$$

Sei
$$z_n := n \cdot f\left(\frac{z}{n}\right) - n = \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

Es gilt:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= z \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z} \\ &= z \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{\frac{z}{n}} \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n &= z\end{aligned}$$

Ausserdem:
$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{z}{n}\right)^n = f(z) \qquad f\left(\frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{z_n}{n}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = f(z)$$

Behauptung: $z_n \in \mathbb{C}$
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)$$

Also $f = \exp$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

und $\forall n \geq n_0$
$$|z_n| \leq |z| + 1$$

$\Rightarrow$ für $n \geq n_0$
$$\left|\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right|$$
$$\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} \left|\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{z!}\right|}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k}}_{<\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}}_{<\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon$$

Term 1:
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left|\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right| = 0\end{aligned}$$

$\exists n_1 \geq n_0 : \forall n \geq n_1$
$$\sum_{k=0}^{n_0-1} \left|\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Term 2 & 3:
$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \cdot |z_n|^k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{|z_n|^k}{k!} \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$$

(QED)

Bemerkung 1:

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \; \forall x > 0 \Rightarrow \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

Bemerkung 2: $|x| \leq 1$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + ... \right)$$
$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... \right) \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Abschätzung des Fehlers:

$$\left| e - 2 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} \right| < \frac{2}{7!} = \frac{1}{360 \cdot 7} < \frac{1}{2000}$$

Satz 10:

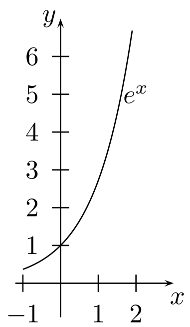
i) $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exp(x) \in \mathbb{R} \qquad \exp(x) > 0$$

ii) exp ist monoton wachsend

$$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$$

iii) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv



Beweis:

i) $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$$
$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \exp(x) \neq 0 \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

ii) $x > 0$

$$\Rightarrow \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...$$
$$\geq 1 + x$$
$$> 1 = \exp(0)$$

$y > x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow y - x > 0\\
&\Rightarrow \exp(y-x) > 1\\
&\Rightarrow \exp(y)\exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)} > 1\\
&\Rightarrow \exp(x) < \exp(y)
\end{aligned}$$

iii) Injektiv: $x \neq y$
$\Rightarrow$ entweder $x < y$ oder $x > y$
$\Rightarrow$ entweder $\exp(x) < \exp(y)$ oder $\exp(x) > \exp(y)$

$$\Rightarrow \exp(x) \neq \exp(y)$$

Surjektiv: $\forall y > 0\, \exists x \in \mathbb{R} : \exp(x) = y$

- 1. Fall: $y = 1 \Rightarrow x = 0$
- 2. Fall: $y > 1$

$$\begin{aligned}
\exp(0) &= 1\\
\exp(y) &= 1 + y + \frac{y^2}{2!} + ...\\
&> y
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exp(0) < y < \exp(y)$$

$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} \exists x \in [0, y] : \exp(x) = y$

- 3. Fall: $0 < y < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} > 1$$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : \exp(z) = \frac{1}{y}$

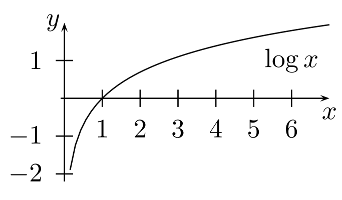
$$\Rightarrow \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} = y$$

(QED)

5.4 Der natürliche Logarithmus

$$\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$\log(y) = x \Leftrightarrow y = e^x \qquad y = e^{\log y} \qquad x = \log e^x$$



Bemerkung 1:

i) $0 < x < y \Rightarrow \log x < \log y$

ii) log ist stetig

iii) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

iv) Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

Beweis:

i) $0 < x < y$

$$\begin{aligned} x = e^{\log x} < y = e^{\log y} \\ \Rightarrow \log x < \log y \end{aligned}$$

ii) Sei $a < b$ und $[a, b]$ kompakt

$$\exp|_{[a,b]} : [a, b] \to [e^a, e^b]$$

ist bijektiv und stetig

$$\stackrel{\text{Sa5}}{\Rightarrow} \log = \exp^{-1}[e^a, e^b] \to \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \log|_{[e^a,e^b]}$ ist stetig für alle $a < b$
Für ein beliebiges $y > 0$ wähle $a < b$, so dass $e^a < y < e^b$
$\Rightarrow \log$ ist stetig an der Stelle y
$\Rightarrow \log$ stetig

iii) $\log(xy)$

$$\begin{aligned} e^{\log(xy)} = xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \\ \Rightarrow \log(xy) = \log x + \log y \end{aligned}$$

iv) Sei $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \neq 0$ und $x_n \to 0$.
Sei $y_n := \log(1 + x_n)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \log 1 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{e^{y_n} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{e^{y_n}-1}{y_n}\right)} \to 1 \end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung 2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

Beweis:

$$\frac{e^y}{y^n} \xrightarrow{y\to\infty} \infty \quad \Rightarrow \frac{y^n}{e^y} = \frac{(\log x)^n}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \frac{\log x}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

(QED)

Bemerkung 3: Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$a^z := e^{z \log a}$$

Dann gilt:

i) $a^0 = 1$, $a^1 = a$

ii) $a^{z+w} = a^z a^w$

iii) $(a^z)^w = a^{zw}, z \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$

iv) $(ab)^z = a^z b^z$

v) $|a^z| = a^{\mathrm{Re} z}$

Beweis:

i) Definition

ii) Definition

iii) $\log a^z = z \log a$

$$\Rightarrow (a^z)^w = e^{w \log a^z} = e^{(wz) \log a} = a^{wz}$$

iv) $(ab)^z$

$$(ab)^z = e^{z \log(ab)} = e^{z \log a + z \log b} = e^{z \log a} e^{z \log b} = a^z b^z$$

v) $|a^z|$

$$|a^z|^2 = \overline{a^z} \cdot a^z = a^{\overline{z}} \cdot a^z \overset{\text{ii)}}{=} a^{\overline{z}+z} = a^{2\text{Re}z} = (a^{\text{Re}z})^2$$

(QED)

Bemerkung 4: $n^s = e^{s \log n}$ ist wohldefiniert für jedes $s \in \mathbb{C}$.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s \in \mathbb{C}$$

konvergiert absolut für $\text{Re}s > 1$.

Bemerkung 5: Potenzreihen-Darstellung (Siehe Königsberger)

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right)$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = 2$$

5.5 Trigonometrische Funktionen

Erinnerung: Für $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} e^{-ix} = 1$$

Definition: Die *Cosinus-Funktion* und die *Sinus-Funktion* sind definiert durch

$$\cos x := \text{Re}\, e^{ix} \qquad \sin x := \text{Im}\, e^{ix}$$

Direkt aus den Definitionen folgen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{2}$$

Bemerkung 1:

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$$

Beweis:

$$e^{i0} = e^0 = 1 = 1 + i \cdot 0$$

(QED)

Bemerkung 2:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y \tag{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)}\\ &= e^{ix}e^{iy}\\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil vergleichen! (QED)

Bemerkung 3:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{4}$$

Beweis:

$$\frac{e^{ix}-1}{ix} = \frac{\cos x - 1 + i\sin x}{ix} \xrightarrow[x\neq 0]{x\to 0} 1 = 1 + i0$$

(QED)

Bemerkung 4: Potenzreihen-Darstellung

$$\begin{aligned}\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(ix)^n}{n!} + \frac{(-ix)^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}\\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots\end{aligned}$$

1. Beide Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{C}$.
   Wir können also cos und sin als Funktionen von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachten.

2. (3),(4) gelten für diese erweiterten Funktionen.

Lemma 1: Für $0 < x \leq 2$ gilt:

i) Cosinus:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

ii) Sinus:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

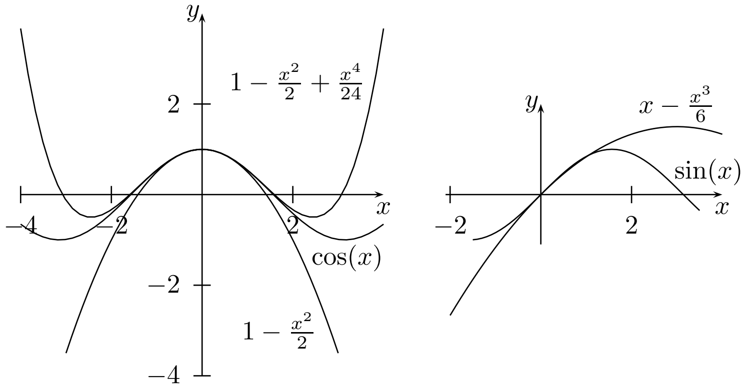
Beweis:

i) Cosinus: Alternierende Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

ii) Sinus: Alternierende Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$



(QED)

Korollar 1: $0 < x \leq 2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geq \frac{x}{3} > 0 \\
&\Rightarrow \sin x > 0
\end{aligned}$$

Korollar 2: $0 \leq x < y \leq 2$

$$\Rightarrow \cos x > \cos y$$

(cos ist monoton fallend im Intervall $[0, 2]$)

Beweis: $0 \leq x < y \leq 2$

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0 \\
a + b &= y \\
b - a &= x
\end{aligned}$$

(QED)

Korollar 3:

1. $\exists!$ Nullstelle von cos im Invervall $[0, 2]$
2. $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

   Die Abbildung

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{R} &\to S' \\
   x &\mapsto e^{ix}
   \end{aligned}$$

   mit $S' = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$, hat die Periode 2π.
3. $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$
   $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$
   $\cos(z + \pi) = -\cos z$
   $\sin(z + \pi) = -\sin z$
   $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
   $\sin(z + 2\pi) = \sin z$

Beweis:

1. Eindeutig, da monoton fallend

$$\begin{aligned}&\cos(2) < 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0\\ &\cos(0) > 0\end{aligned}$$

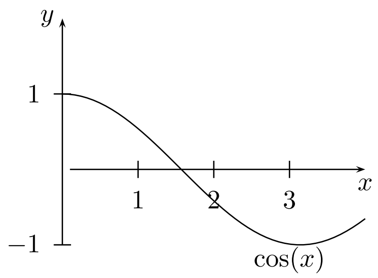
$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} \exists$ Nullstelle
$\frac{\pi}{2} :=$ Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$.

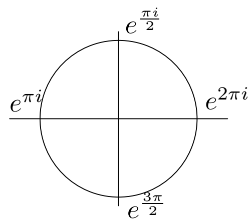
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$$

$\sin x > 0$ für $0 < x \leq 2$

$$\begin{aligned}e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\\ e^{\pi i} &= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1\\ e^{2\pi i} &= \left(e^{\pi i}\right)^2 = (-1)^2 = 1\end{aligned}$$





$$\Rightarrow e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}e^{2\pi i} = e^{ix}\ \forall x \in \mathbb{C}$$

3. $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}}{2}\\ &= \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2}\\ &= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\\ &= -\sin z\end{aligned}$$

Rest genauso!

(QED)

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}e^{z+2\pi i} &= e^z\\ \cos(z + 2\pi) &= \cos z\\ \sin(z + 2\pi) &= \sin z\end{aligned}$$

Satz 11: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Beweis:

- "$\Leftarrow$": $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin 0 = 0$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0\,\forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin\pi = -\sin 0 = 0$$
$$\Rightarrow \sin(k\pi) = 0\,\forall k \in \mathbb{Z}$$

- "$\Rightarrow$": Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x = 0$

  1. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
  2. $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \Rightarrow \cos x = \cos(-x) > 0$

$$\cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \cos x - i\sin x$$
$$\Rightarrow \cos x = \cos(-x)$$
$$\Rightarrow \sin x = -\sin(-x)$$

Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $x - k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = 0$

$$\Rightarrow \cos(x - k\pi) = 0$$
$$\Rightarrow x - k\pi = \frac{\pi}{2}$$

das heisst

$$-k = \left[-\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right]$$

(Gauss-Klammer)

$x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = 0$$
$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = 0$$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}\pi := \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

(QED)

Korollar 1: 2π ist die kleinste Periode von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beweis: cos
Wir haben gesehen:

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\cos\pi = -\cos 0 = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Sei $0 < p \leq 2\pi$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + p) = \cos x$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$\overset{\text{Sa11}}{\Rightarrow} p \in \mathbb{Z}\pi \Rightarrow p \in \{\pi, 2\pi\}$

$$\cos p = \cos 0 = 1 \qquad \cos\pi = -1$$

$$\Rightarrow p \neq \pi \Rightarrow p = 2\pi$$

(QED)

Korollar 2: $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$

Beweis:

- "$\Leftarrow$": $\cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

$$\Rightarrow e^{2\pi i k} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1$$

- "$\Rightarrow$": Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$

$$\begin{aligned} & z = x + iy \\ & \Rightarrow 1 = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \\ & \Rightarrow 1 = |e^z| = e^x,\ x \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow x = 0 \\ & \Rightarrow \cos y + i \sin y = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \cos y &= 1 \\ \sin y &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Sa11}}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \cos y &= 1 \\ y &\in \mathbb{Z}\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow y \in 2\mathbb{Z}\pi$$

(QED)

Korollar 3: $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \\ \sin z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 & \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \\ & \Rightarrow e^{2iz} = e^{iz}e^{iz} = e^{iz}e^{-iz} = 1 \\ & \overset{\text{Ko2}}{\Rightarrow} 2iz \in 2\pi i \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow z \in \mathbb{Z}\pi \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 & \Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ & \Rightarrow e^{2iz} = e^{iz}e^{iz} = -e^{iz}e^{-iz} = -1 \\ & \Rightarrow e^{2iz+\pi i} = e^{\pi i}e^{2iz} = -e^{2iz} = 1 \\ & \overset{\text{Ko2}}{\Rightarrow} 2iz + \pi i \in 2\pi i \mathbb{Z} \\ & \Rightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

(QED)

Satz 12: Polarkoordinaten
Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine reelle zahl $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass

$$z = re^{i\varphi},\ r := |z|$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass $|z| = 1$.

Zu zeigen: $\exists \varphi \in \mathbb{R}$, so dass $z = e^{i\varphi}$
Sei $z = x + iy$, dann gilt $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$

- 1. Fall: $x \geq 0, y \geq 0$

$$0 \leq x \leq 1$$

$\Rightarrow \exists \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \cos\varphi = x$

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$$

$$y \geq 0,\ \sin\varphi \geq 0 \Rightarrow y = \sin\varphi$$

- 2. Fall: $x \leq 0, y \geq 0$
$\Rightarrow$ Nach dem 1. Fall für $-x + iy$ gibt es ein $\psi \in \mathbb{R}$, so dass

$$\cos\psi = -x \qquad \sin\psi = y$$

Sei $\varphi := \pi - \psi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\varphi &= \cos(\pi - \psi) = \cos(\psi - \pi) = \cos(\psi + \pi) = -\cos(\psi) = x \\ \sin\varphi &= \sin(\pi - \psi) = -\sin(\psi - \pi) = -\sin(\psi + \pi) = \sin\psi = y \end{aligned}$$

- 3. Fall: $y \leq 0$ (1. & 2. Fall $\Leftrightarrow y \geq 0$)
Nach 1./2. Fall $\exists \psi$, so dass

$$\cos\psi = x \qquad \sin\psi = -y$$

$\Rightarrow$ Für $\varphi := -\psi$ gilt

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\psi = x \\ \sin\varphi &= -\sin\psi = y \end{aligned}$$

Damit ist Satz 12 für $|z| = 1$ bewiesen.

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.

$$\Rightarrow \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

$\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi} \Rightarrow z = |z|e^{i\varphi}$$

(QED)

Satz 13: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $c \in \mathbb{C}$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$, so dass

$$z^n = c$$

Beweis: Nach Satz 12 $\exists \varphi \in \mathbb{R}$, so dass

$$c = |c|e^{i\varphi}$$

Sei $z := \sqrt[n]{|c|} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}$

$$\Rightarrow z^n = \left(\sqrt[n]{|c|} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{|c|}\right)^n \left(e^{\frac{i\varphi}{n}}\right)^n = |c|e^{i\varphi} = c$$

(QED)

Satz 14: Fundamentalsatz der Algebra
Jedes nicht konstante Polynom hat eine Nullstelle.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

Sei $A := |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|$, $R := \max\{1, 2A\}$ und

$$r(z) := \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + \frac{a_{n-1}}{z},\ z \neq 0$$

$$\Rightarrow p(z) = z^n(1 + r(z))$$

Betrachte $|z| \geq R$

$$\Rightarrow |r(z)| \leq \frac{|a_0|}{|z|} + ... + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} = \frac{A}{|z|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |1 + r(z)| \geq 1 - |r(z)| \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Für $|z| \geq R$ gilt

$$|p(z)| = |z|^n \cdot |1 + r(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{|z|}{2} \geq \frac{R}{2} \geq A$$

Die Menge

$$K := \{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt.
(Heine-Borel) $\Rightarrow K$ ist kompakt
$\overset{\text{Sa7}}{\Rightarrow} \exists z_0 \in K$, so dass

$$|p(z_0)| = \min_{z \in K} |p(z)|$$

Wir wissen

$$|p(0)| = |a_0| \leq A \Rightarrow |p(z_0)| \leq |p(0)| \leq A \leq |p(z)|\, \forall z \notin K$$

$$\Rightarrow |p(z_0)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$$

Behauptung: $p(z_0) = 0$

Annahme: $p(z_0) \neq 0$
Definiere:

$$q(w) := \frac{p(z_0 + w)}{p(z_0)}$$

q ist ein nichtkonstantes Polynom und

$$1 = |q(0)| \leq |q(w)|\, \forall w \in \mathbb{C}$$

$b \in \mathbb{C}, b \neq 0$

$$q(w) = 1 + bw^k + \text{THO}$$

THO $\rightarrow$ Terme höherer Ordnung

Nach Satz 13 $\exists \beta \in \mathbb{C}$, so dass

$$\beta^k = -\frac{1}{b},\ \beta \neq 0$$

$$\Rightarrow q(w) = 1 - \left(\frac{w}{\beta}\right)^k + \text{THO}$$

$$r(w) := q(\beta w)$$

nicht konstantes Polynom

$$\Rightarrow 1 = |r(0)| \leq |r(w)|\, \forall w \in \mathbb{C}$$

und

$$\begin{aligned} r(w) &= 1 - w^k + \text{THO} \\ &= 1 - w^k + w^{k+1}s(w) \end{aligned}$$

$s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom

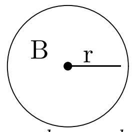
$$B := \{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq 1\} \text{ kompakt (Satz 6)}$$

$s|_B : B \to \mathbb{C}$ stetig
$\overset{\text{Sa7}}{\Rightarrow} \exists c > 0$, so dass

$$|s(w)| \leq c \, \forall w \in B$$

$\Rightarrow$ Für $0 \leq w \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} |r(w)| &= |1 - w^k + w^{k+1}s(w)| \\ &\leq |1 - w^k| + |w|^{k+1}|s(w)| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq |1 - w^k| + w^{k+1}c \\ &= 1 - w^k + w^{k+1}c \\ &= 1 - w^k(1 - cw) \end{aligned}$$

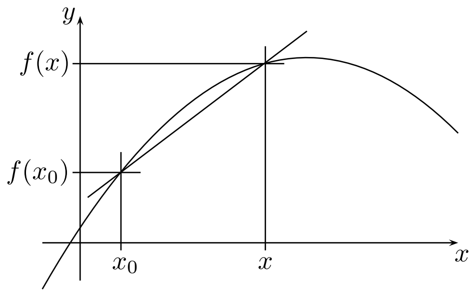
Wähle ein $w \in \mathbb{R}$, so dass $0 < w < \frac{1}{c}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 - cw > 0 \\ &\Rightarrow w^k(1 - cw) > 0 \\ &\Rightarrow |r(w)| \leq 1 - w^k(1 - cw) < 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Widerspruch! (QED)

6 Differential-Rechnung

6.1 Definition der Ableitung



Was ist die Steigung von f an der Stelle x_0?
Steigung der Sekante:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\rightarrow$ *Differenzenquotient*

Definition: Sei $a < b$ und $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}|\mathbb{C}$ eine Funktion.
f heisst *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 : \forall x \in (a,b)$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon$$

das heisst, der Limes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: A$$

existiert und wir nennen ihn die *Ableitung von f an der Stelle x_0*.

Bezeichung:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oder auch

$$\dot{f}(x_0) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Beispiel 0: (Physikalische Interpretation der Ableitung)

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Im Zeitinervall $[t_0, t]$ durchschnittlich pro Zeiteinheit zurückgelegte Strecke.

$$\dot{s}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

Beispiel 1: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \,\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 1 \,\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Beispiel 3: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 \,\forall x_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Beispiel 4: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \,\forall x_0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Beispiel 5: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $x \mapsto \cos x$ ist differenzierbar und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x &= \cos'(x) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

Genauso

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$$

Beispiel 6: $f(x) = \log x$

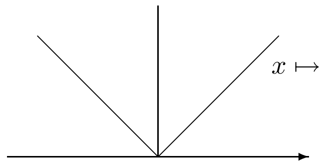
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{\log(1 + h/x)}{h/x}\right) \\ \Rightarrow \log'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n \to 0} \frac{\log(1 + h/x)}{h/x} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Beispiel 7: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + ... + x_0^{n-1} \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} n x_0^{n-1}$$

Behauptung: Gilt auch für $n \in \mathbb{Z}$

Beispiel 8: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$



Betrachte $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

konvergiert nicht für $x \to 0$, das heisst f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel 9:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Betrachte $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

konvergiert nicht für $x \to x_0 = 0$.

Übung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle x_0.
$\Rightarrow f$ ist stetig an der Stelle x_0.

Lemma 1: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$.
$\Rightarrow$ Äquivalent sind:

i) f ist differenzierbar an der Stelle x_0

ii) $\exists$ Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass φ stetig ist an der Stelle x_0 und

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$$

iii) $\exists$ lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Wenn diese äquivalenten Aussagen gelten, so ist

$$\varphi(x_0) = f'(x_0)$$

und

$$L(h) = f'(x_0)h \, \forall h \in \mathbb{R}$$

Diese Lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst das *Differential von f an der Stelle x_0* und wird mit

$$\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

bezeichnet. Das heisst

$$\mathrm{d}f(x_0) := f'(x_0)h$$

Beweis:

- "i) $\Rightarrow$ ii)":

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Stetigkeit an der Stelle x_0: Sei $\varepsilon > 0$.
Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall x \in (a,b)$

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

- "ii) $\Rightarrow$ iii)": Definiere $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $L(h) := \varphi(x_0)h$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \\ &= \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) \\ \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} (\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- "iii) $\Rightarrow$ i)": $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear, das heisst $\exists A \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} L(h) &= Ah \, \forall h \in \mathbb{R} \\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - A \\ &\to 0 \\ \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} A \\ A &= f'(x_0) \end{aligned}$$

6.2 Rechenregeln für die Ableitung

Satz 1: Sei $a < b$, $I := (a,b)$ und seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle x_0.
$\Rightarrow$ Die Funktionen $f+g$, fg, f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) sind differenzierbar an der Stelle x_0.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + f'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \quad (\star) \\ (f/g)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

$(\star)$ ist die Leibnitz-Regel.

Beweis:

$$\begin{aligned} &\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\to f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \\ &= f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} g(x_0) \\ &\to f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

Sei $g(x_0) \neq 0$.
Da g stetig ist an der Stelle x_0 $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a,b)$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon = |g(x_0)| \Rightarrow g(x) \neq 0$$

$\Rightarrow f/g$ ist zumindest auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definiert.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)\\
&\quad = \frac{1}{h}\,\frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}\\
&\quad = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,\frac{g(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}\,\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\\
&\quad \to f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\,g'(x_0)
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 2: Kettenregel
Seien $I, J \in \mathbb{R}$ offene Intervalle,
$f : I \to J$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$,
$g : J \to \mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0) \in J$.

$\Rightarrow g \circ f : I \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beweis: $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0, so dass

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$

und $\exists \psi : J \to \mathbb{C}$ stetig an der Stelle y_0, so dass

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\psi(y)$$

$y = f(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(f(x)) - g(f(x_0)) &= (f(x) - f(x_0))\psi(f(x))\\
&= (x - x_0)\varphi(x)\psi(f(x))\\
\Rightarrow g \circ f(x) - g \circ f(x_0) &= (x - x_0)\chi(x)\\
\chi &= \varphi \cdot (\psi \circ f) : I \to \mathbb{C}
\end{aligned}$$

χ ist stetig an der Stelle x_0
$\overset{\text{Lem1}}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ ist stetig an der Stelle x_0 und

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \chi(x_0)\\
&= \varphi(x_0)\psi(f(x_0))\\
&= f'(x_0)g'(f(x_0))
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 3: Umkehrfunktionen
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle,
$f : I \to J$ streng monoton, bijektiv, differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$.

$\Rightarrow g := f^{-1} : J \to I$ ist differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bemerkung:

$$g(f(x)) = x \stackrel{\text{Sa2}}{\Rightarrow} g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$$
$$\Rightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis: Annahme: f ist streng monoton wachsend, das heisst $\forall x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Schritt 1: g ist stetig an der Stelle y_0, $f'(x_0) \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\delta := \min\{\underbrace{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}_{>0}, \underbrace{f(x_0) - f(x_0-\varepsilon)}_{>0}\} > 0$$

$$\Rightarrow \delta \leq f(x_0+\varepsilon) - f(x_0) \qquad \delta \leq f(x_0) - f(x_0-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x_0-\varepsilon) \leq f(x_0) - \delta < f(x_0) + \delta \leq f(x_0+\varepsilon)$$
$$\Rightarrow x_0 - \varepsilon \leq g(y_0-\delta) < g(y_0+\delta) \leq x_0 + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Wenn $|y - y_0| < \delta$, dann ist $|g(y) - x_0| < \varepsilon$.

Schritt 2: g differenzierbar an der Stelle $y_0 = f(x_0)$
Nach Lemma 1 $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, so dass φ stetig an der Stelle x_0 und

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$
$$\Rightarrow \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$$
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

für $x \neq x_0$

Definiere $\psi : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(y) := \frac{1}{\varphi(g(y))}$$

Nach Schritt 1 ist ψ stetig an der Stelle y_0.

$$y = f(x),\ y_0 = f(x_0) \Rightarrow y - y_0 = (x - x_0)\varphi(x)$$
$$x = g(y),\ x_0 = g(y_0) \Rightarrow y - y_0 = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y))$$
$$\Rightarrow g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\underbrace{\frac{1}{\varphi(g(y))}}_{\psi(y)}$$

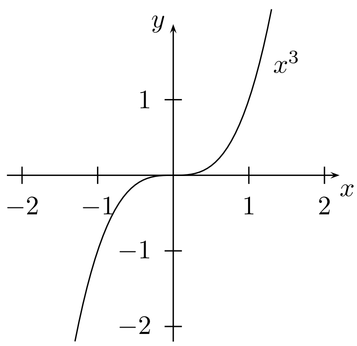
$\stackrel{\text{Lem1}}{\Rightarrow}$ g ist differenzierbar an der Stelle y_0. (QED)

Bemerkung: Sei $f : I \to J$ bijektiv und differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$.

$$f^{-1} : J \to I \text{ differenzierbar an der Stelle } f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \neq 0$$

Beispiel 1: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$$



$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|y|}, & y \leq 0 \end{cases}$$

nicht differenzierbar an der Stelle $y = 0$.

Beispiel 2: $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$$\begin{aligned} g(y) &= f^{-1}(y) = \log y \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f(g(y))} = \frac{1}{y} \\ \Rightarrow \log'(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Beispiel 3: $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) := x^a := e^{a \log x}$, $a \in \mathbb{R}$

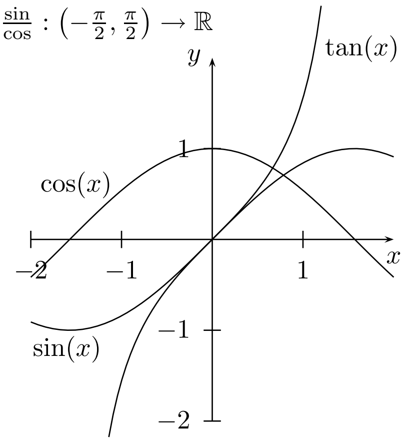
$$f := g \circ h \circ k$$

$$k(x) := \log x \qquad h(y) := ay \qquad g(z) := e^z$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(h \circ k(x))h'(k(x))k'(x) = g(h \circ k(x))\frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$$

Beispiel 4: $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



tan ist strikt monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x < \tan y$$

Für $x \geq 0$ folgt dies aus der Ungleichung

$$\cos x > \cos y \qquad \sin x < \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y}$$

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist surjektiv nach dem Zwischenwertsatz
$\Rightarrow \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv

Definiere:

$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

1. $\tan'(x)$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

2. $\tan(\arctan y) = y$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} \tan'(\arctan y)\arctan'(y) &= 1 \\ \left(1+\tan(\arctan y)^2\right)\arctan' y &= 1 \\ (1+y^2)\arctan' y &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}$$

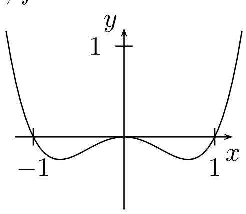
6.3 Lokale Extrema

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ein Punkt $x_0 \in I$ heisst *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*) von f, wenn es eine Konstante $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x \in I \\ f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)) \end{cases}$$

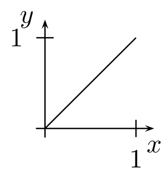
$x_0 \in I$ heisst *lokales Extremum* von f, wenn x_0 entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist.

Beispiel 1: $f(x) = x^4 - x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$x_0 = 0$ ist ein lokales Maximum.

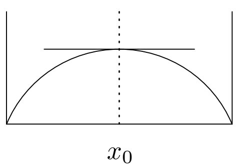
Beispiel 2: $I = [0,1]$, $f(x) = x$



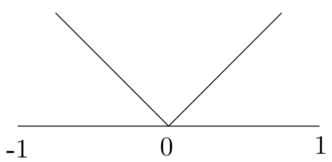
$x_0 = 1$ und $x_0 = 0$ sind keine lokalen Minima (x_0 muss im Inneren des Intervalls liegen).

Satz 4: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, f differenzierbar an der Stelle x_0.

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$



Beispiel 3: $f(x) = |x|$



$x_0 = 0$ ist kein lokales Minimum, da f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar ist.

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
$x_0 \in I$ heisst *kritischer Punkt* von f, wenn $f'(x_0) = 0$.

Beweis von Satz 4: Betrachte ein lokales Maximum
$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I, f(x) \leq f(x_0)$$

$\Rightarrow$ Für $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h < \delta$ gilt:

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \qquad f(x_0 - h) \leq f(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

(QED)

Beispiel 1: $f(x) = x^4 - x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow 2x^2 = 1$$

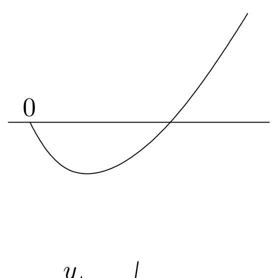
$$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Beispiel 2: $p, q > 1,\ a, b \geq 0$

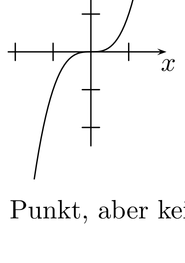
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (\star)$$

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p - xb = x\left(\frac{x^{p-1}}{p} - b\right)$$
$$f'(x) = x^{p-1} - b = 0$$
$$x = b^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f(a) \geq f\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right)\ \forall a \geq 0 \Leftrightarrow (\star)$$



Beispiel 3: $f(x) = x^3$



$f'(0) = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ ist ein kritischer Punkt, aber kein lokales Extremum!

Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b).

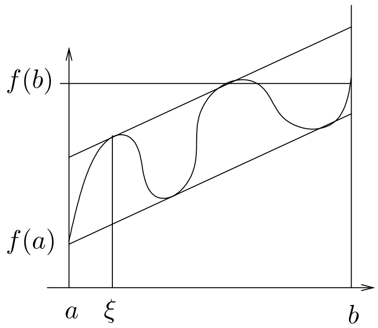
$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

Beweis:

- Fall 1: $f \equiv \text{const}$
$$\Rightarrow f'(\xi) = 0 \, \forall \xi \in (a, b)$$
- Fall 2: $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) > f(a) = f(b)$
$\Rightarrow$ Nach Kapitel 5 $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) \geq f(x) \, \forall x \in [a, b]$
$\Rightarrow \xi \neq a, \xi \neq b$
$\Rightarrow \xi \in (a, b)$
$\Rightarrow \xi$ ist ein lokales Maximum
$$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$$
- Fall 3: $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) < f(a) = f(b)$
$\overset{\text{2.Fall}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a, b) : (-f)'(\xi) = 0$
$$\Rightarrow f'(\xi) = 0$$

(QED)

Satz 5: Mittelwertsatz



Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar an der Stelle $x \in (a, b)$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis: Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\Rightarrow g$ ist stetig und differenzierbar auf (a, b)

$$g(a) = f(a)$$
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

$$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

(QED)

Korollar 1: Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x) = 0 \, \forall x \in I$

$$\Rightarrow f = \text{const}$$

Beweis: Seien $x, y \in I$ mit $x < y$.
$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists \xi \in I : x < \xi < y$

$$\Rightarrow 0 = f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f(x) = f(y)$$

(QED)

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' = f, f(0) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = e^x \,\forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis: Definiere $g(x) := f(x)e^{-x}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \\ &\overset{\text{Kor1}}{\Rightarrow} g(x) \equiv \text{const} = g(0) = 1 \\ &\Rightarrow f(x)e^{-x} = 1 \,\forall x \\ &\Rightarrow f(x) = e^x \,\forall x \end{aligned}$$

(QED)

Korollar 2: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $L > 0$, $|f'(x)| \leq L \,\forall x \in I$

$\Rightarrow \forall x_0, x_1 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq L|x_1 - x_0|$$

$\to$ Lipschitz-stetig

Beweis: o.B.d.A. $x_0 < x_1$

$$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_0, x_1) : f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| \leq L$$

$\Rightarrow$ Behauptung (QED)

Korollar 3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt

(1) $f'(x) \geq 0 \,\forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton wachsend

(2) $f'(x) > 0 \,\forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

Beweis:

(2) $x, y \in I$, $x < y$
$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists \xi \in I : x < \xi < y$

$$\Rightarrow 0 < f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(1) "$\Rightarrow$": genauso wie (2)

"$\Leftarrow$":

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \underbrace{\frac{f(x + h) - f(x)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

falls x nicht der rechte Randpunkt ist.

(QED)

Beispiel: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, obwohl

$$f'(0) = 0$$

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *stetig differenzierbar*, wenn f differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, *2mal differenzierbar*, wenn f differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar ist, *2mal stetig differenzierbar*, wenn f differenzierbar und f' stetig differenzierbar ist.

Bezeichnungen:

$$f'' := (f')' \qquad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$f'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

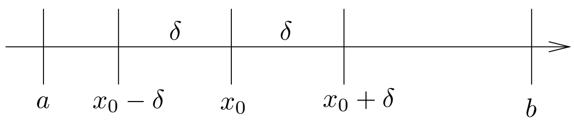
Korollar 4: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = 0$.

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist lokales Maximum}$$
$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist lokales Minimum}$$

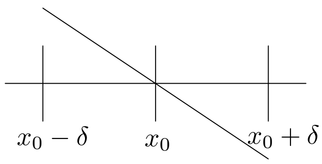
Beweis: f'' stetig, $f''(x_0) < 0$.
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (a,b)$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$$



$\overset{\text{Kor3}}{\Rightarrow}$ Die Funktion f' ist auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ streng monoton fallend.



$\Rightarrow f(x) \geq 0$ für $x_0 - \delta < x \leq x_0$
$\Rightarrow f(x) \leq 0$ für $x_0 \leq x < x_0 + \delta$
$\overset{\text{Kor3}}{\Rightarrow}$ f monoton wachsend auf $(x_0 - \delta, x_0]$ monoton fallend auf $[x_0, x_0 + \delta)$

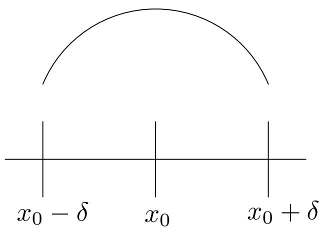
Für $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Für $x_0 - \delta < x \leq x_0$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0)$$

$\Rightarrow x_0$ ist lokales Maximum.



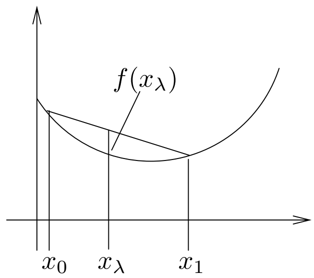
(QED)

Beispiel: $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$ ist lokales Minimum, aber

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

6.4 Konvexe Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.



Definition: $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *konvex* für alle $x_0, x_1 \in I$ und alle $\lambda \in [0, 1]$, wenn gilt

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

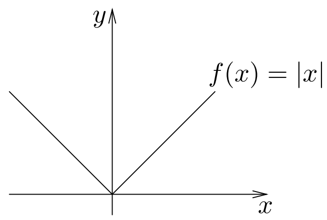
Notation:

$$x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$$

Definition: f heisst *strikt konvex*, wenn $\forall x_0, x_1 \in I \ \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(x_\lambda) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

Beispiel: $f(x) = |x|$

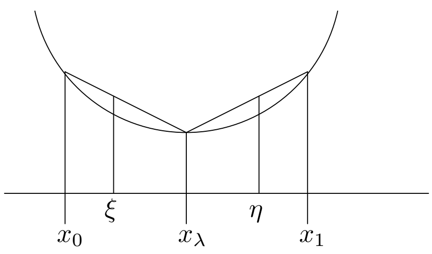


$\to$ konvex!!

Korollar 5: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2mal stetig differenzierbar, dann gilt

$$f'' \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ ist konvex}$$
$$f'' > 0 \Rightarrow f \text{ ist strikt konvex}$$

Beweis:



$$f'' \geq 0 \Leftrightarrow f' \text{ ist monoton wachsend}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es Elemente $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, so dass

$$x_0 < \xi < x_\lambda < \eta < x_1$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{x_\lambda - x_0} \qquad f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{x_1 - x_\lambda}$$

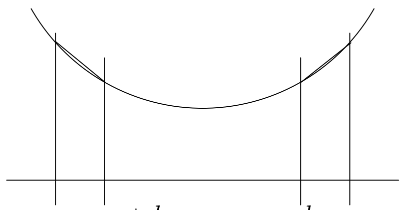
$$\begin{aligned} f'(\xi) \le f'(\eta) &\Leftrightarrow \frac{f(x_\lambda) - f(x_0)}{\lambda(x_1 - x_0)} \le \frac{f(x_1) - f(x_\lambda)}{(1-\lambda)(x_1 - x_0)} \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(f(x_\lambda) - f(x_0)) \le \lambda(f(x_1) - f(x_\lambda)) \\ &\Leftrightarrow f(x_\lambda) \le (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' \text{ ist monoton wachsend } &\Rightarrow f \text{ ist konvex} \\ f' \text{ ist streng monoton wachsend } &\Rightarrow f \text{ ist strikt konvex} \end{aligned}$$

Zu zeigen: f ist konvex $\Rightarrow f'$ ist monoton wachsend

Seien $x_0, x_1 \in I$, $h > 0$, so dass

$$2h < x_1 - x_0$$



$$\begin{aligned} x_0 + h &= (1-\lambda)x_0 + \lambda(x_1 - h) \\ x_1 - h &= \lambda(x_0 + h) + (1-\lambda)x_1 \\ 0 < \lambda &= \frac{h}{x_1 - x_0 - h} < 1 \\ \Rightarrow f(x_0 + h) &\le (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1 - h) \\ f(x_1 - h) &\le \lambda f(x_0 + h) + (1-\lambda)f(x_1) \\ \overset{\text{Add}}{\Rightarrow} f(x_0+h) + f(x_1 - h) &\le f(x_0) + f(x_1) \\ \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &\le \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \\ \overset{h\to 0}{\Rightarrow} f'(x_0) &\le f'(x_1) \end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2 > 0$$

$\to$ strikt konvex.

Beispiel 2: $f(x) = x^4$

$$f''(x) = 12x^2 \ge 0 \qquad f''(0) = 0$$

$\to$ trotzdem strikt konvex.

Beispiel 3: $f(x) = e^x$

$$f''(x) = e^x > 0$$

$\to$ strikt konvex

Beispiel 4: $f(x) = \log x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2} < 0$$

$\to$ log ist strikt konkav, das heisst $-\log$ ist strikt konvex.

Beispiel 5:

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \sinh'(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh'' = \cosh > 0$$

$\rightarrow$ cosh ist konvex.

$$\sinh'' = \sinh$$

$\rightarrow$ sinh ist konvex für $x > 0$, konkav für $x < 0$.
Das Vorzeichen von f'' ändert sich $\leftrightarrow$ *Wendepunkt*!
Bei Wendepunkten ist $f''(x) = 0$, aber nicht jeder Punkt $x \in I$ mit $f''(x) = 0$ ist ein Wendepunkt.

Lemma: Jensen
Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex
$\Rightarrow \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $\forall x_1, ..., x_n \in I$

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n) \quad (\star)$$

Beweis:

- $n = 1$: Trivial
- $n = 2$: Definition von "konvex"
- $n \geq 3$: Vollständige Induktion

  Annahme: Ungleichung gilt für $n - 1$ statt für n.

  Sei $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1}$
  $\Rightarrow \lambda + \lambda_n = 1$

$$x := \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda} x_{n-1}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda} f(x_{n-1})$$
$$f(\lambda x + \lambda_n x_n) \leq \lambda f(x) + \lambda_n f(x_n)$$
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

(QED)

Bemerkung: Sei f konkav
$\Rightarrow -f$ erfüllt $(\star)$
$\Rightarrow f$ erfüllt $(\star)$ mit "$\geq$"

Beispiel: $f = \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_1, ..., x_n > 0 \qquad \lambda_1, ..., \lambda_n > 0 \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \log x_i \leq \log\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$
$$\Rightarrow e^{\sum \lambda_i \log x_i} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i \log x_i} = \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$
$$\Rightarrow x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$$

Beispiel: $\lambda_i = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Beispiel: $n = 2$

$$\lambda_1 := \frac{1}{p} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{q} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$a := x_1^{\lambda_1} \qquad b := x_2^{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \tag{1}$$

Beispiel: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| := (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p}$$

$p \geq 1$, Euklidische Norm: $p = 2$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$$

Hölder-Ungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, \forall p, q \geq 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{2}$$

Beweis: Betrachte $p = 1$, $q = \infty$

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) \|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty$$

Betrachte $p > 1$, $q < \infty$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \\ &\overset{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

(QED)

Minkowski-Ungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \, \forall p \geq 1$ gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} \\
&\le \sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)\,|x_i+y_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \\
&\overset{(2)}{\le} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\le (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\overset{x+y\neq 0}{\Rightarrow} \|x+y\|_p = \frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p^{p-1}} \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

(QED)

Bemerkung: Die Normen $\|\cdot\|$ sind äquivalent zueinander.

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p} \cdot \|x\|_\infty$$

6.5 Die Regel von l'Hospital

Definition: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ eine Funktion und $y_0\in\mathbb{C}$.
$f(x)$ konvergiert gegen y_0 für $x\to b$, wenn $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall x\in(a,b)$

$$|x-b|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\varepsilon$$

Schreibweise:

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = y_0$$

Satz 6 (l'Hospital): Seien $f,g:(a,b)\to\mathbb{C}$ differenzierbar, $g(x)\neq 0\,\forall x\in(a,b)$ und

$$\lim_{x\to b} f(x) = 0 = \lim_{x\to b} g(x)$$

Sei $g'(x)\neq 0\,\forall x\in(a,b)$ und existiere der Limes von $\frac{f'}{g'}$ für $x\to b$.

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ konvergiert für $x\to b$ und

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: Sei $\varepsilon>0$
$\Rightarrow \exists\delta>0\,\exists A\in\mathbb{C}:\forall x\in(a,b)$

$$|x-b|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$$

Behauptung:

$$|x-b|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$$

Wähle $x \in \mathbb{R}$, so dass $b - \delta < x < b$
Definiere: $h : (x, b) \to \mathbb{C}$ durch

$$h(\xi) := f(x)g'(\xi) - f'(\xi)g(x)$$

und $h(b) := 0$ (gilt nur für $\xi < b$)

$$\Rightarrow h(x) = 0 = h(b)$$

h ist auf (x, b) differenzierbar.
$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x, b) : h'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow f(x)g'(\xi) = f'(\xi)g(x)$$
$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$$

da $|\xi - b| < \delta$. (QED)

Beispiel:

1) sin und cos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) Polynome

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} \frac{4t^2 + 3t - 7}{5t^3 - 7t + 2} = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} \frac{8t + 3}{15t^2 - 7} = \frac{11}{8}$$

3) $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$

$$\tanh' = \frac{\sinh' \cosh - \sinh \cosh'}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$$
$$\lim_{t \to 0} \frac{\log \cosh(\alpha t)}{\log \cosh(\beta t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha \tanh(\alpha t)}{\beta \tanh(\beta t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha^2(1 - \tanh^2(\alpha t))}{\beta^2(1 - \tanh^2(\beta t))} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) $f'(0) = 0$

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|h \sin \frac{1}{h}\right| \leq |h| \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

b) $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$
$\Rightarrow f'$ ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0$
$\Rightarrow f$ ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

6.6 Höhere Ableitungen

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.
$f : I \to \mathbb{R}$ heisst *n-mal stetig differenzierbar*, wenn f stetig differenzierbar ist und f' $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist (rekursive Definition).

Bezeichnung: $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ ist die n-te Ableitung von f.

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} := f^{(n)}$$

$$C^\ell([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ ist } \ell\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$
$$C^\infty([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ ist beliebig oft stetig differenzierbar}\}$$

Norm auf $\mathbf{C}^{\ell}([\mathbf{a},\mathbf{b}])$:

$$\|f\|_{C^\ell} := \sum_{k=0}^{\ell} \sup_{a\le x\le b} |f^{(k)}(x)| = \sum_{k=0}^{\ell} \|f^{(k)}\|_{\sup}$$

Satz 7: $C^\ell([a,b])$ ist mit dieser Norm ein *Banach-Raum*, das heisst vollständig.

Beweis: $\ell = 0$: Kapitel V

$\ell = 1$: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^1([a,b])$

$$\|f_n - f_m\|_{C^1} = \|f_n - f_m\|_{C^0} + \|f_n' - f_m'\|_{C^0}$$

$\Rightarrow (f_n)$ und (f_n') sind Cauchy-Folgen
$\overset{\ell=0}{\Rightarrow}$ Es gibt stetige Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^0} = 0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_{C^0}$$

Behauptung: $f \in C^1$ und $g = f'$.
Sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in [a,b] =: I$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \ge n \, \forall x \in I$

$$|f_m'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in I$ und $|h| < \delta$

$$\left| f_n'(x_0) - \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow |f_n'(x) - f_m'(x)| \le \underbrace{|f_n'(x) - g(x)|}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{|g(x) - f_m'(x)|}_{<\varepsilon/4} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall m \ge n \, \forall x \in I$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} |(f_n - f_m)(y) - (f_n - f_m)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}|y - x| \\
&\overset{\substack{y=x+h \\ y\ne x}}{\Rightarrow} \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \le \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$\forall x \in I \, \forall n \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in I$, $|h| < \delta$.

$$\begin{aligned}
&\overset{\substack{|h|<\delta \\ x_0+h\in I}}{\Rightarrow} \left| g(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \\
&\le \underbrace{|g(x_0) - f_n'(x_0)|}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{\left| f_n'(x_0) - \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} \right|}_{<\varepsilon/4} \\
&\quad + \underbrace{\left| \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|}_{\le\varepsilon/2} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\ell \ge 2$: Induktions-Annahme: $C^{\ell-1}([a,b])$ ist ein Banach-Raum.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^\ell([a,b])$.

$\Rightarrow (f_n)$ ist eine Cauchy-Folge in $C^1([a,b])$
(f'_n) ist eine Cauchy-Folge in $C^{\ell-1}([a,b])$

$$\|f_n - f_m\|_{C^1} \leq \|f_n - f_m\|_{C^\ell}$$
$$\|f'_n - f'_m\|_{C^{\ell-1}} \leq \|f_n - f_m\|_{C^\ell}$$

$\Rightarrow f_n$ konvergiert in C^1
$\Rightarrow f'_n$ konvergiert in $C^{\ell-1}$

Seien

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C^1([a,b]) \qquad g := \lim_{n\to\infty} f'_n \in C^{\ell-1}([a,b])$$
$$\Rightarrow f' = \lim_{n\to\infty} f'_n (\in C^0) = g \in C^{\ell-1}$$

(QED)

6.7 Die Taylorreihe

Beispiel: $a_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert für $|x| < R, x \in \mathbb{R}$

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Sei $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Die Folge

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

konvergiert gleichmässig auf $[-r, r]$ für jedes $r < R$

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\
&= \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Folge f_n ist Cauchy-Folge in $C^1([-r, r])$ für jedes $r < R$
$\overset{\text{Ind}}{\Rightarrow} (f_n)$ ist eine Cauchy-Folge in $C^\ell([-r, r])$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und jedes $r < R$
$\Rightarrow f$ ist beliebig oft differenzierbar, das heisst:

$$f \in C^\infty([-r, r]) \, \forall r \in (0, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
f^{(\ell)}(x) &= \sum_{n=\ell}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-\ell+1) a_n x^{n-\ell} \\
f^{(\ell)}(0) &= \ell! \cdot a_\ell \\
\Rightarrow a_\ell &= \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)
\end{aligned}$$

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *glatt* ($\in C^\infty$), $I \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in I$.
Sei
$$a_k := \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$
Die Reihe
$$T_0^\infty f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$
heisst die *Taylorreihe* von f an der Stelle 0. Genauso heisst
$$T_a^\infty f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$
die *Taylorreihe* von f an der Stelle a und
$$T_a^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$
heisst *Taylor-Polynom* vom Grade n von f an der Stelle a.
Wie gross ist der Fehler
$$R_n(x) = f(x) - T_{x_0}^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Satz 8: Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$ und $a < x_0 < x < b$
$\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 < \xi < x$ und
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Lemma: Sei $g : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $x_0, x \in I$ mit $x_0 < x$ und
$$g(x_0) = g'(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0$$
$\Rightarrow \exists \xi \in (x_0, x)$, so dass
$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Beweis: Induktion
$n = 0$: $\exists \xi \in (x_0, x)$, so dass
$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
Mittelwertsatz.

$n \geq 1$: Annahme: Lemma gilt für $n-1$ statt n.
Definiere $h : I \to \mathbb{R}$ durch
$$h(t) := g(x)(t-x_0)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1} g(t)$$
mit $x_0 \leq t \leq x$
$$\Rightarrow h(x_0) = 0 = h(x)$$
$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_0, x)$, so dass $h'(\xi) = 0$
$$\Rightarrow 0 = (n+1) g(x)(\xi - x_0)^n - (x-x_0)^{n+1} g'(\xi)$$
$$\Rightarrow \frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n}$$

$\overset{\text{An.für } g'}{\Rightarrow} \exists \eta \in (x_0, \xi)$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{g'(\xi)}{(\xi - x_0)^n} &= \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{n!} \\ \frac{1}{n+1} \cdot \frac{g'(\xi)}{(\xi - x_0)^n} &= \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} = \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 8: Sei

$$\begin{aligned} g(x) : &= R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ \Rightarrow g(x_0) &= 0 \\ g'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ g^{(n)}(x_0) &= 0 \\ g^{(n+1)} &= f^{(n+1)} \end{aligned}$$

$\overset{\text{Lem}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_0, x)$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} &= \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \\ \Rightarrow R_n(x) = g(x) &= \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

(QED)

Korollar: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq c \, \forall x \in I$$

$\Rightarrow \forall x_0, x \in I$ gilt

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \leq \frac{c}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Beispiel 1: $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} k! \cdot a_k, & k = 0, 1, ..., n \\ 0, & k > n \end{cases} \\ &\Rightarrow T_0^n f(t) = f(t) \\ &\Rightarrow T_a^n f(t) = T_a^\infty f(t) = f(t) \, \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $f(t) = \frac{1}{1-t}$ mit $t < 1$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1-t)^2} \\ f''(t) &= \frac{2!}{(1-t)^3} \\ f^{(k)}(t) &= \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} \\ f^{(k)}(0) &= k! \\ T_0^\infty f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \end{aligned}$$

Konvergenzradius $= 1$

$$T_0^\infty f(t) = f(t)$$

für $|t| < 1$ (nur auf Teilintervall). Für $|t| \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq c = (n+1)! \cdot 2^{n+1} \overset{f}{\Rightarrow} \underbrace{\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right|}_{t \to 0, n \to \infty} \leq |2t|^{n+1}$$

Beispiel 3: $f = \log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k},\ k \geq 1 \\
f^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)!,\ k = 1, 2, 3, ... \\
T_1^\infty f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} \\
T_1^\infty f(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \\
T_1^\infty \log(1-x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}
\end{aligned}$$

Konvergenzradius $= 1$

Behauptung: $T_1^\infty \log = \log$ auf $(0, 2)$
Sei $|x| \leq r < 1$

$$\left| \log^{(k+1)}(1-x) \right| = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \leq \frac{k!}{(1-r)^{k+1}} = c$$

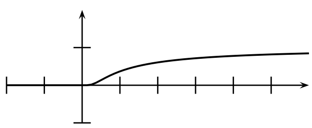
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left| \log(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| &\leq \frac{n!}{(1-r)^{n+1}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(1-r)^{n+1}} \\
&\leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)(1-r)^{n+1}} \overset{|x| \leq 1/2}{\leq} \frac{1}{n+1} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

für $|x| \leq \frac{1}{2}$ (gilt sogar für $|x| < 1$).

Beispeil 4: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$



Wir zeigen: f ist glatt!

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \qquad f''(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x}$$

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \\
p_{k+1}(t) &= t^2\left(p_k(t) - p_k'(t)\right) \\
f^{(k+1)}(x) &= p_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-1/x} - \frac{1}{x^2}\,p_k'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \\
&= p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}
\end{aligned}
$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0 &\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n}e^{-1/x} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\underbrace{p_k\left(\frac{1}{h}\right)e^{-1/h}}_{f^{(k)}(h)} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(h) = f'(0) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f'(h)}{h} = 0 \\
&\Rightarrow f''(0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Induktion f ist k-mal differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$
$\Rightarrow T_0^\infty f(x) = 0.$

7 Differentialgleichungen

7.1 Fragestellungen, Anwendungen (PH, CH, BIO, ...)

Beschreibung eines Systems (Zeitliche Entwicklung), das durch Angabe von endlich vielen Grössen (Variablen) bestimmt ist und bei dem für die zeitliche Veränderung dieser Grössen ein Modell besteht.

Beispiele:

1) Seien die Substanzmenge $x(t)$ zum Zeitpunkt t und Substanzmenge x_0 zum Zeitpunkt t_0 gegeben.

   Modell: $\alpha \in \mathbb{R}$: Veränderungsrate pro Zeiteinheit und pro Mengeneinheit

   $$\dot{x}(t) = \alpha x(t)$$

   Gesucht: Die zeitliche Entwicklung der Substanzmenge, das heisst eine Funktion

   $$x : I \to \mathbb{R} \quad I \subset \mathbb{R}$$

   $x(t_0) = x_0$ (Anfangsbedingung)

   Lösung:

   $$\dot{x}(t) = \alpha x(t)$$

2) Räuber und Beute:
   Sei $y(t)$ die Grösse einer Räuberpopulation, $x(t)$ die Grösse einer Beutepopulation und seien x_0, y_0 die Populationen zum Zeitpunkt t_0.

   Einfaches Modell: $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

   $$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\alpha - \beta y(t))x(t) \\ \dot{y}(t) &= (-\gamma + \delta x(t))y(t) \end{aligned}$$

   Gesucht:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$$
   $$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
   $$x(t_0) = x_0 \qquad y(t_0) = y_0$$

   $\binom{x}{y}$ löst I.

3) Schwingung:
   Sei $x(t)$ die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage.

   Modell (Newton):

   $$m\ddot{x}(t) = -\underbrace{\tau x(t)}_{\text{Federkr.}} - \underbrace{\mu \dot{x}(t)}_{\text{Dämpfung}} + K(t)$$

   wobei $K(t)$ $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist.

7.2 Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Definition: Eine *zeitabhängige Differentialgleichung n-ter Ordnung F* auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ist eine Abbildung:

$$F : \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$
$$(x_0, ..., x_n, t) \mapsto F(x_0, ..., x_n, t)$$

oder

$$F : \underbrace{\mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{C}$$
$$(z_0, ..., z_{n-1}, t) \mapsto F(z_0, ..., z_{n-1}, t)$$

F heisst *zeitunabhängig*, falls

$$F : \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$
$$(x_0, ..., x_n) \mapsto F(x_0, ..., x_n)$$

F also nicht explizit von t abhängt.

Definition: Sei F eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), dann heisst eine n-mal differenzierbare Funktion $I \subset \mathbb{R}$

$$x : I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

Lösung von F, falls

$$x^{(n)} = F(x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n-1)}(t), t)$$

Beispiel: $n = 1$, zeitunabhängig, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \alpha x$$

Lösung:

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto x(t) := ce^{\alpha t},\ c \in \mathbb{R}$$

da

$$\dot{x}(t) = \alpha ce^{\alpha t} = \alpha x(t) = F(x(t))$$

7.2.1 Das Cauchy Anfangswert-Problem (CAP)

Gegeben:

- F Differentialgleichung n-ter Ordnung auf $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
- $w_0, ..., w_{n-1} \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) Anfangswerte zum Zeitpunkt t_0

Gesucht: n-mal differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), so dass $\forall t \in I$

$$\text{CAP zu } F \begin{cases} x^{(n)}(t) = F(x(t), x^{(1)}(t), ..., x^{(n-1)}(t), t) \\ x(t_0) = w_0 \\ x^{(1)}(t_0) = w_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = w_{n-1} \end{cases}$$

Fragen:

α: Gibt es immer Lösungen zu allen Anfangswerten?

β: Sind die Lösungen eindeutig?

γ: Wie lange existieren Lösungen?

α, β: Die Antwort hängt natürlich von der Differentialgleichung ab. Später werden wir zeigen, dass unter relativ milden Voraussetzungen an die Abbildung F (Lipschitz-stetig) immer eine eindeutige Lösung zu allen Anfangsbedingungen existiert. Die erwähnte Existenz von Lösungen ist abstrakt und liefert keine Formel für Lösungen.

7.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine *inhomogene* unabhängige Differentialgleichung (L) n-ter Ordnung auf $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ mit konstanten Koeffizienten hat folgende Gestalt:

$$(L) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i x^{(i)}\right) + x^{(n)} = K(t)$$

wobei $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ gegeben ist und $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.
Die dazugehörige *homogene* Differentialgleichung (H)

$$(H) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i x^{(i)}\right) + x^{(n)} = 0$$

Mit gegebenen Anfangswerten $w_0, ..., w_{n-1}$ zum Zeitpunkt t_0 wird das dazugehörige (CAP) meistens gegeben als:

$$\text{(L)} \begin{cases} K(t) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) \\ x(t_0) = w_0 \\ x^{(1)}(t_0) = w_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = w_{n-1} \end{cases}$$

Ziel: Finde für alle Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung des CAP (L), die zudem explizit durch Formeln gegeben werden kann. Die Linearität von (L) und (H) erlaubt folgende Feststellungen:

Lemma 1:

1) Falls $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ Lösungen von (H) sind und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, so ist auch
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$$
eine Lösung von (H)

2) Falls $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ Lösungen von (L) sind, so ist
$$x_1 - x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$$
eine Lösung von (H)

3) Sei $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, wobei x_1 eine Lösung von (L) und x_2 eine Lösung von (H) ist, dann ist
$$x_1 + x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$$
eine Lösung von (L)

Beweis:

3) $\forall 0 \leq j \leq n \, \forall t \in \mathbb{R}$

$$(x_1 + x_2)^{(j)}(t) = x_1^{(j)}(t) + x_2^{(j)}(t)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (x_1 + x_2)^{(i)} + (x_1 + x_2)^{(n)}$$
$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_1^{(i)} + x_1^{(n)}}_{K(t)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_2^{(i)} + x_2^{(i)}}_{0}$$
$$= K(t)$$

1) Analog

2) Analog (QED)

2), 3) besagen, dass es genügt, eine Lösung von (L) und die Gesamtheit aller Lösungen von (H) zu finden, um alle Lösungen von (L) zu kennen.
Zusätzlich besagt 1), dass die Gesamtheit der Lösungen von H

$$\mathscr{H} := \{x \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}\ (\mathbb{C})) \mid x \text{ löst H}\} \subset C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}\ (\mathbb{C}))$$

ein $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)-Vektorraum ist.

7.3.1 Eindeutige Lösbarkeit des CAP von (L)

Satz 1: Seien $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ Lösungen des CAP (L) zu beliebigen Anfangswerten $w_0, ..., w_{n-1}$ zum Zeitpunkt t_0, dann folgt $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x_1(t) = x_2(t)$$

Lemma 2: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, bei der $\forall t \in I$

$$|f'(t)| \leq c \cdot |f(t)|$$

für ein $c > 0 \in \mathbb{R}$ und

$$f(t_0) = 0$$

für ein $t_0 \in I$, dann folgt

$$f(t) = 0$$

für alle $t \in I$.

Beweis:

- Fall 1: $f(t) \geq 0\, \forall t \in I$.
  Betrachte die Funktion

  $$\begin{aligned} g : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t)e^{-ct} \end{aligned}$$

  welche positiv ist und wegen

  $$\dot{g}(t) = e^{-ct}(\dot{f}(t) - cf(t)) \overset{\text{NV}}{\leq} 0$$

  monoton fallend ist und zudem in t_0 eine Nullstelle hat. Somit gilt

  $$g(t) = 0 \Rightarrow f(t) = 0\, \forall t \geq t_0$$

  Durch betrachten von

  $$t \mapsto h(t) := e^{ct} \cdot f(t)$$

  kann analog

  $$f(t) = 0\, \forall t \leq t_0$$

  gezeigt werden, da

  $$\dot{h}(t) = e^{Ct}(\dot{f}(t) + Cf(t)) \geq 0$$

  also h monoton steigend und positiv ist und in t_0 eine Nullstelle hat.

- Fall 2: $f(t) \in \mathbb{C}$
  Betrachte

  $$\begin{aligned} g : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) \cdot \overline{f(t)} \end{aligned}$$

Also $g \geq 0$.

$$\begin{aligned} |\dot{g}(t)| &= |\dot{f}(t) \cdot \overline{f(t)} + f(t) \cdot \overline{\dot{f}(t)}| \\ &\leq 2|\dot{f}(t) \cdot \overline{f(t)}| \leq 2c|f(t) \cdot \overline{f(t)}| = 2c|g(t)| \end{aligned}$$

also wegen Fall 1:

$$g(t) = 0 \, \forall t \in I \Rightarrow f(t) = 0 \, \forall t \in I$$

(QED)

Beweis von Satz 1: Betrachte

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) := \sum_{i=0}^{n-1} |x^{(i)}(t)|^2 \end{aligned}$$

wobei $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) = &\sum_{i=0}^{n-2} \left(x^{(i)}(t)\overline{x^{(i+1)}(t)} + x^{(i+1)}(t)\overline{x^{(i)}(t)} \right) \\ &+ \left(x^{(n-1)}(t)\overline{x^{(n)}(t)} + x^{(n)}(t)\overline{x^{(n-1)}(t)} \right) \end{aligned}$$

mit $|x^{(i)}| \leq \sqrt{f}$ für $0 \leq i \leq n-1$ und

$$x^{(n)}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t)$$

da x Lösung von (H) ist (Lemma 1). Es folgt

$$|\dot{f}(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-2} 2 \cdot f(t) + 2\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| f(t) = cf(t) = c|f(t)|$$

wobei

$$c := 2\left((n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right)$$

Nach Anfangsbedingungen gilt

$$f(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |x^{(i)}(t_0)|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |x_1^{(i)}(t_0) - x_2^{(i)}(t_0)|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |w_i - w_i|^2 = 0$$

$\overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} \forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

(QED)

Folgerungen aus Satz 1:

$$\mathscr{H} := \{x \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}\ (\mathbb{C})) \mid x \text{ löst } (H)\}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &\to \mathbb{R}^n\ (\mathbb{C}^n) \\ x &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), ..., x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

ist offensichtlich linear und nach Satz 1 injektiv.

$$\Rightarrow \dim \mathscr{H} \leq \dim \mathbb{C}^n = n$$

Somit genügt es n linear unabhängige Lösungen von (H) (ein Fundamentalsystem) zu finden, die dann eine Basis von $\mathscr{H}$ bilden. In diesem Fall ist die obige Abbildung *bijektiv*, das heisst, das CAP (H) ist für alle Anfangswerte (zu t_0) eindeutig lösbar. Jede Lösung ist eine Linearkombination von Lösungen des Fundamentalsystems, wobei die Koeffizienten durch die Anfangswerte bestimmt werden.

Beispiel: $n = 2$

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

Die Lösungen bilden einen Vektorraum $\mathscr{H}$ mit $\dim \mathscr{H} \leq 2$. Die beiden Funktionen

$$e^{it},\, e^{-it}$$

sind Lösungen, die linear unabhängig sind, da

$$ae^{it} + be^{-it} \equiv 0 \Rightarrow a = b = 0$$

$$\left[\left. \begin{array}{ll} t = 0 & a + b = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} & a - b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = 0 \right]$$

Somit ist jede Lösung von der Form

$$x(t) = ae^{it} + be^{-it}$$

wobei a, b durch die Anfangswerte bestimmt werden.

7.4 Ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$(H) \qquad x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)} = 0$$

Obiges Beispiel motiviert den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

wobei λ noch zu bestimmen ist.
Man löst die Differentialgleichung $x(t) = e^{\lambda t}$ genau dann, wenn

$$\left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\lambda t}\right)^{(i)} = \left(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i\right) \cdot e^{\lambda t} = 0$$

λ muss also eine Nullstelle des Polynoms

$$P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

sein. Es heisst *charakteristisches Polynom*.

Satz 2: Fundamentalsystem
Sei (H) eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung in $\mathbb{C}$ mit konstanten Koeffizienten. Sei $P(x)$ das charakteristische Polynom von (H), seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen von $P(x)$ und $k_1, ..., k_r$ deren Vielfachheiten.

$$\left[\sum_{i=1}^{r} k_i = \deg(P) = \text{Ordnung von } H\right]$$

Dann besitzt (H) folgende linear unabhängige Lösungen:
k_ℓ Lösungen zu λ_ℓ

$$e^{\lambda_\ell t},\, t \cdot e^{\lambda_\ell t}, ..., t^{k_\ell - 1} e^{\lambda_\ell t}$$

$1 \leq \ell \leq r$

Operator-Notation: Sei $P(x)$ ein Polynom mit

$$P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

so definiert $P(D)$ eine lineare Differentialgleichung mit $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$P(D)\, f := \underbrace{D^n f}_{f^{(n)}} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \underbrace{D^i f}_{f^{(i)}}$$

(L) und (H) in dieser Notation:

$$\begin{aligned} (L) \qquad & P(D)\, f = K \\ (H) \qquad & P(D)\, f = 0 \end{aligned}$$

Für zwei Polynome $P_1(x)$, $P_2(x)$ gilt $\forall f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}\ (\mathbb{C}))$
(A) Polynom-Multiplikation:

$$P_1(D)(P_2(D)\, f) = (P_1 \cdot P_2)(D)\, f = (P_2 \cdot P_1)(D)\, f = P_2(D)(P_1(D)\, f)$$

wie sich durch Ausrechnen zeigen lässt.

Hilfssatz 1:

1) Sei f k-mal differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$(D - \lambda)^k \left(f(t)e^{\lambda t}\right) = f^{(k)}(t)e^{\lambda t}$$

2) Sei $g \neq 0$ ein Polynom und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq \mu$, dann gilt

$$(D - \lambda)^k (g(t)e^{\mu x}) = h(t)e^{\mu x}$$

Beweis:

1) k-malige Anwendung von

$$(D - \lambda)\left(f(t)e^{\lambda t}\right) = \left(\dot{f}(t)e^{\lambda t} + f(t)\lambda e^{\lambda t}\right) - \lambda f(t)e^{\lambda t} = \dot{f}(t)e^{\lambda t}$$

2) Die Anwendung von $(D - \lambda)$ ergibt

$$(D - \lambda)(g(t)e^{\mu x}) = g'(t)e^{\mu x} + \mu g(t)e^{\mu x} - \lambda g(t)e^{\mu x} = h(t)e^{\mu x}$$

mit $h := (\mu - \lambda)g + g'$. h ist ein Polynom mit demselben Grad wie g.
Analog bei wiederholter Anwendung von $(D - \lambda)$.

(QED)

Hilfssatz 2: Seien $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ verschieden und $g_1, ..., g_r$ Polynome.
Es gelte $\forall t \in I$

$$\sum_{\ell=1}^{r} g_\ell(t)e^{\lambda_\ell t} = 0$$

dann gilt

$$g_1 = ... = g_r = 0$$

Beweis: Induktion über r

$r = 1$:
$$g_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0 \Rightarrow g_1(t) = 0$$

$r-1 \to r$: Wähle $k \in \mathbb{N} : k > \deg(g_r)$ und wende $(D-\lambda_r)^k$ auf
$$\sum_{\ell=1}^{r} g_\ell(t)e^{\lambda_\ell t}$$
an. Nach Hilfssatz 1, (1) und (2) gilt
$$0 + \sum_{\ell=1}^{r-1} h_\ell(t)e^{\lambda_\ell t} = 0$$
wobei $h_\ell \neq 0$, falls $g_\ell \neq 0$.
Die Induktionsannahme liefert
$$h_1 = ... = h_{r-1} = 0 \Rightarrow g_1 = ... = g_{r-1} = 0$$
und damit auch $g_r = 0$. (QED)

Beweis von Satz 2:

a) Die angegebenen Funktionen sind wirklich Lösungen von (H). Da λ_ℓ eine k_ℓ-fache Nullstelle von P ist, kann man schreiben
$$P(x) = Q(x)(x-\lambda_\ell)^{k_\ell}$$
$\forall 0 \leq s \leq k_\ell - 1, s \in \mathbb{N}$
$$P(D)\left(t^s e^{\lambda_\ell t}\right) = Q(D)\left((D-\lambda_\ell)^{k_\ell}(t^s e^{\lambda_\ell t})\right) = Q(D)((t^s)^{(k_\ell)}e^{\lambda_\ell t}) = 0$$
(nach Hilfssatz 1)

b) Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Lösungen:
$$\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{i=0}^{k_\ell-1} \mu_{\ell i}\cdot t^i e^{\lambda_\ell t} = \sum_{\ell=1}^{r} g_\ell(t)e^{\lambda_\ell t} = 0 \qquad g_\ell(t) := \sum_{i=0}^{k_\ell-1}\mu_{\ell i}\cdot t^i$$
Nach Hilfssatz 2 folgt
$$g_1(t) = g_2(t) = ... = g_r(t) = 0$$
Damit $g_\ell(t) = 0$ muss gelten
$$\mu_{\ell 1} = \mu_{\ell 2} = ... = \mu_{\ell(k_\ell-1)} = 0$$
da $g_\ell(t)$ nur endlich viele Nullstellen haben kann
$\Rightarrow$ Alle Koeffizienten sind Null
$\Rightarrow$ Die gefundenen Gleichungen sind linear unabhängig

(QED)

Reelle Lösungen: Sei
$$P(D)f = f^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{(i)}$$
Mit $a_i \in \mathbb{R}$ suchen wir ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.

Lemma 3: Sei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Lösung von (H)
$$(H) \qquad P(D)f = 0$$
So sind auch $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ (reelle) Lösungen von (H).

Beweis:
$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad z^{(k)} = x^{(k)}(t) + iy^{(k)}(t)$$

das heisst
$$P(D)z(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(D)x(t) = 0 \\ P(D)y(t) = 0 \end{cases}$$

(QED)

Betrachte ein Fundamentalsystem komplexer Lösungen von (H).
Falls λ_ℓ eine reelle Nullstelle von P ist, so sind

$$e^{\lambda_\ell t}, te^{\lambda_\ell t}, ..., t^{(k_\ell - 1)}e^{\lambda_\ell t}$$

k_ℓ-reelle Lösungen.
Falls $\lambda_\ell = a + ib$ eine k_ℓ-Fache komplexe Nullstelle von P ist, so ist auch $\overline{\lambda_\ell} = a - ib$ eine k_ℓ-Fache Nullstelle von P, da P reelle Koeffizienten hat.
Die $2k_\ell$ komplexen Lösungen zu $\lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}$ sind also

$$\begin{aligned} &e^{(a+ib)t}, ..., t^{k_\ell - 1}e^{(a+ib)t} \\ &e^{(a-ib)t}, ..., t^{k_\ell - 1}e^{(a-ib)t} \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 erhalten wir $2k_\ell$ reelle Lösungen

$$\begin{aligned} &e^{at}\cos(bt), te^{at}\cos(bt), ..., t^{k_l - 1}e^{at}\cos(bt) \\ &e^{at}\sin(bt), te^{at}\sin(bt), ..., t^{k_l - 1}e^{at}\sin(bt) \end{aligned}$$

Die so erhaltenen reellen Lösungen von (H) sind linear unabhängig, da sich aus ihnen die ursprünglichen komplexen Lösungen als Linearkombinationen zurückgewinnen lassen.

Beispiele: $n = 2$ und $n = 4$

Differentialgleichung	$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$	$x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0$
Charakt. Polynom	$x^2 - 2x + 5 = 0$	$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
Nullstellen	$1 + 2i$, $1 - 2i$	$2\times\ i$, $2\times\ -i$
Kompl. Fund'system	$e^{(1+2i)t}$, $e^{(1-2i)t}$	e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}
Reelles Fund'system	$e^t\cos(2t)$, $e^t\sin(2t)$	$\cos t$, $t\cos t$, $\sin t$, $t\sin t$

7.5 Berechnung einer partikulären Lösung

Satz 3: Sei $K(t)$ von der Form

$$K(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i t^i\right) e^{\mu t}$$

wobei μ eine k-fache Nullstelle von P ist ($k = 0$ bedeutet $P(\mu) \neq 0$), dann besitzt (L) eine Lösung der Form

$$f(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} c_i t^i\right) t^k e^{\mu t}$$

und falls $m = 0$ die Lösung

$$f(t) = \frac{b_0}{P^{(k)}(\mu)} t^k e^{\mu t}$$

Beweis: Da μ eine k-fache Nullstelle von P ist, kann
$$P(x) = Q(x)(x-\mu)^k$$
geschrieben werden, wobei $Q(\mu) \neq 0$

Induktion nach m: $m = 0$
$$\begin{aligned} P(D)\left(t^k e^{\mu t}\right) &= Q(D)\left((D-\mu)^k (t^k e^{\mu t})\right) \\ &\overset{\text{Hs1}}{=} Q(D)(k! e^{\mu t}) \\ &= k! Q(\mu) e^{\mu t} \\ &= P^{(k)}(\mu) e^{\mu t} \end{aligned}$$

$m-1 \to m$:
$$\begin{aligned} P(D)(t^m t^k e^{\mu t}) &= Q(D)\left((D-\mu)^k (t^m t^k e^{\mu t})\right) \\ &\overset{\text{Hs1}}{=} Q(D)\left(\frac{(m+k)!}{m!} t^m e^{\mu t}\right) \\ &= h(t) e^{\mu t} \end{aligned}$$
wobei $h(t)$ ein Polynom ist mit $\deg h = \deg(t^m) = m$. Da
$$b(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i$$
auch $\deg m$ hat, existiert eine Konstante c_m:
$$\deg(b(t) - c_m h(t)) \leq m - 1$$
Nach Induktions-Annahme existiert ein Polynom $\tilde{c}(t)$ mit $\deg(\tilde{c}(t)) \leq m-1$:
$$P(D)(\tilde{c}(t) t^k e^{\mu t}) = (b(t) - c_m h(t)) e^{\mu t}$$
Das heisst, mit
$$f(t) := (\tilde{c}(t) + c_m t^m) t^k e^{\mu t}$$
gilt dann
$$\begin{aligned} P(D) f &= P(D)\left(\tilde{c}(t) t^k e^{\mu t}\right) + P(D)(c_m t^m t^k c^{\mu t}) \\ &= (b(t) - c_m h(t)) e^{\mu t} + c_m h(t) e^{\mu t} \\ &= b(t) e^{\mu t} \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ f ist eine Lösung der gesuchten Form
(QED)

Beispiel:
$$(L) \qquad x^{(3)}(t) - x^{(1)}(t) = K(t)$$
Charakteristisches Polynom: $P(x) = x^3 - x$
Nullstellen: $0, 1, -1$

1) $K(t) = e^{2t}$, das heisst $m = 0$, $\mu = 2$, $k = 0$
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{6} e^{2t}$$

2) $K(t) = e^t$, das heisst $m = 0$, $\mu = 1$, $k = 1$
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} t e^t$$

3) $K(t) = t^2$, das heisst $m = 2$, $\mu = 0$, $k = 1$
$$f(t) = (c_2 t^2 + c_1 t + c_0) t$$
$$f^{(3)}(t) - f^{(1)}(t) = 6c_2 - 3c_2 t^2 - 2c_1 t - c_0 = t^2$$
Koeffizienten-Vergleich: $c_2 = -\frac{1}{3}, c_1 = 0, c_0 = -2$
$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{3} t^3 - 2$$

Superposition: Falls $K(t)$ als Linear-Kombination

$$K(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i K_i(t)$$

beschrieben werden kann und für alle $1 \leq i \leq r$ f_i eine Lösung von $P(D)f_i = K_i$ ist, löst

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i(t)$$

die Differentialgleichung $P(D)f(t) = K(t)$, da $P(D)$ linear ist.

Komplexifizierung: Seien die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $P(x)$ reell, $K(t) = \mathrm{Re}(\tilde{K}(t))$ und f eine Lösung von

$$P(D)f(t) = \tilde{K}(t)$$

so ist $g(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ eine reelle Lösung von

$$P(D)g(t) = K(t)$$

Dies eignet sich besonders für Inhomogenitäten der Gestalt

$$K(t) = p(t)e^{at}\cos(bt) = \mathrm{Re}\left(p(t)e^{(a+ib)t}\right)$$
$$K(t) = p(t)e^{at}\sin(bt) = \mathrm{Im}\left(p(t)e^{(a+ib)t}\right)$$

für reelle Polynome $p(x)$.

Beispiel:

$$x^{(3)}(t) - x^{(1)}(t) = \cos t = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right)$$
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{P(i)}e^{it} = \frac{i}{2}e^{it}$$

ist eine komplexe Lösung

$$\Rightarrow \tilde{f}(t) = \mathrm{Re}(f(t)) = -\frac{1}{2}\sin t$$

ist eine reelle Lösung.

7.6 Freie Schwingung

$$(H) \qquad \ddot{x}(t) + 2d\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$d \geq 0$, $k > 0$
Das charakteristische Polynom

$$P(x) = x^2 + 2dx + k$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k}$$

3 Fälle:

- $d^2 < k$: Schwache Dämpfung
- $d^2 > k$: Starke Dämpfung
- $d^2 = k$: Kritische Dämpfung

- *Schwache Dämpfung:* In diesem Fall sind die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -d \pm i\omega \qquad \omega := \sqrt{k - d^2}$$

(Eigenfrequenz)
$\Rightarrow$ Die allgemeine Lösung von (H) hat die Form

$$x(t) = e^{-dt}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

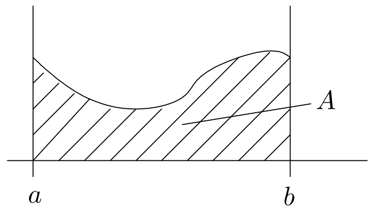
wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ durch die Anfangswerte $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ bestimmt werden. Diese Lösung kann noch in anderer Form geschrieben werden:

$$x(t) = e^{-dt}\mathrm{Re}\left((c_1 - ic_2)e^{i\omega t}\right) = Ae^{-dt}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\left[c_1 - ic_2 = Ae^{i\varphi}\right]$$

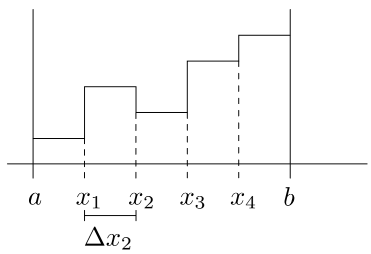
8 Integralrechnung

Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt



$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{ Flächeninhalt}$$

Beispiel: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$



$f(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$. Solch eine Funktion heisst *Treppenfunktion.*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k(x_k - x_{k-1})$$

Definition: Sei $I := [a,b]$
Eine *Partition* (Teilung) des Intervalls I ist eine endliche Teilmenge $P \subset I$, so dass $a, b \in P$.

$$\mathscr{P}(I) := \mathscr{P} := \{\text{Menge der Partitionen von } I\}$$

Eine Partition können wir in der Form

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$$

schreiben, wobei $a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$.

Notation: Anzahl Intervalle:

$$N(P) := \#P - 1$$

Feinheit:

$$\mu(P) := \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

Definition: Für eine solche Partition $P = \{x_0, ..., x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ definieren wir die *Obersumme* von f:

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

und die *Untersumme* von f:

$$\underline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Lemma 1: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{S}(f,P) \le \inf_{P \in \mathscr{P}(I)} \overline{S}(f,P)$$

Beweis:

1. Seien $P, Q \in \mathscr{P}(I)$ und $P \subset Q$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) \le \underline{S}(f,Q) \qquad \overline{S}(f,P) \ge \overline{S}(f,Q)$$

2. Für alle $P, Q \in \mathscr{P}(I)$ gilt:

$$\underline{S}(f,P) \le \underline{S}(f,P \cup Q) \le \overline{S}(f,P \cup Q) \le \overline{S}(f,Q)$$

$\Rightarrow \overline{S}(f,Q)$ ist eine obere Schranke der Menge $\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}(I)\}$

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,Q) \quad \forall Q \in \mathscr{P}(I)$$

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} \underline{S}(f,P) \le \inf_{Q \in \mathscr{P}(I)} \overline{S}(f,Q)$$

(QED)

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann-Integrierbar*, wenn

$$\sup_{P \in \mathscr{P}} \underline{S}(f,P) = \inf_{P \in \mathscr{P}} \overline{S}(f,P)$$

Falls f Riemann-integrierbar ist, so nennen wir die Zahl

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sup_{P \in \mathscr{P}} \underline{S}(f,P) = \inf_{P \in \mathscr{P}} \overline{S}(f,P)$$

das *Integral* von f über $I = [a,b]$.

Satz 1: Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $A \in \mathbb{R}$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist Riemann-Integrierbar und

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall P = \{x_0, x_1, ..., x_N\} \in \mathscr{P}(I) \, \forall \xi_1, \xi_2, ..., \xi_N \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} \mu(P) < \delta \\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k \end{array}\right\} \Rightarrow \left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Bemerkung: Wir können (ii) in der Kurzform schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\mu(P) \to 0 \\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]}} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Hilfssatz: Sei $M > 0$, so dass $\forall x \in I$

$$-M \le f(x) \le M$$

$\Rightarrow \forall P, Q \in \mathscr{P}(I)$ gilt:

$$\underline{S}(f,P) \ge \underline{S}(f,Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P)$$
$$\overline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,Q) + 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P)$$

Beweis: Sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$. Definiere (für $k = 1, ..., N$):

$$h_k^\pm := \begin{cases} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) & \text{falls } [x_{k-1}, x_k] \cap Q = \varnothing \\ \pm M & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der Zweite Fall tritt höchstens $2N(Q)$ mal auf.
- Wir wissen $x_k - x_{k-1} \leq \mu(P)$ für alle $k \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{N(P)} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N(P)} h_k^-(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N(P)} h_k^+(x_k - x_{k-1}) - 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P) \\ &\geq \underline{S}(f, P \cup Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P) \\ &\geq \underline{S}(f, Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P) \end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 1:

- "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
  1. Wähle Q, so dass
  $$A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$
  2. Wähle $\delta > 0$, so dass
  $$4M \cdot N(Q) \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

  $\Rightarrow$ Für $P \in \mathscr{P}$ mit $\mu(P) < \delta$ gilt:
  $$\begin{aligned} \underline{S}(f,P) &\geq \underline{S}(f,Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \mu(P) \\ &\geq \underline{S}(f,Q) - 4M \cdot N(Q) \cdot \delta \\ &\geq \underline{S}(f,Q) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> A - \varepsilon \end{aligned}$$

  Genauso:
  $$\overline{S}(f,P) < A + \varepsilon$$

  $\Rightarrow$ Für jedes $P \in \mathscr{P}$ mit $\mu(P) < \delta$ gilt:
  $$A - \varepsilon < \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) < A + \varepsilon$$

- "(ii) $\Rightarrow$ (i)": Wir nehmen an, dass (ii) gilt.

  Behauptung 1:
  $$\sup_{P \in \mathscr{P}} \underline{S}(f,P) \leq A$$

  Behauptung 2:
  $$\sup_{P \in \mathscr{P}} \underline{S}(f,P) \geq A$$

  Behauptung 1 und 2:
  $$\Rightarrow \sup_{P \in \mathscr{P}} \underline{S}(f,P) = A$$

Genauso:

$$\Rightarrow \inf_{P\in\mathscr{P}} \overline{S}(f,P) = A$$

Beweis von Behauptung 1: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ wie in (ii). Sei $P \in \mathscr{P}(I)$.
$\Rightarrow \exists P_0 \in \mathscr{P}(I)$, so dass $P \subset P_0$ und $\mu(P_0) < \delta$.
$\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ Mit $P_0 = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$ und $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ gilt:

$$\begin{aligned}
A - \varepsilon < \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &< A + \varepsilon \\
&\Rightarrow \underline{S}(f, P_0) \leq A + \varepsilon \\
&\Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P_0) \leq A + \varepsilon \\
&\Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq A + \varepsilon \, \forall \varepsilon > 0 \\
&\Rightarrow \underline{S}(f, P) \leq A
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung 2: Sei $\varepsilon > 0$

Zu zeigen: $\exists P \in \mathscr{P}(I) : \underline{S}(f,P) \geq A - \varepsilon$
Wähle $\delta > 0$ wie in (ii) und $P = \{x_0, ..., x_N\}$, so dass $\mu(P) < \delta$. Wähle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, so dass

$$f(\xi_k) \leq \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{N} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} \left(f(\xi_k) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) (x_k - x_{k-1}) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{>A-\varepsilon} - \varepsilon \\
&> A - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists P \in \mathscr{P}(I) : \underline{S}(f,P) > A - 2\varepsilon$:

$$\Rightarrow \sup_{P\in\mathscr{P}} \underline{S}(f,P) \geq A$$

(QED)

Satz 2: Sei $I = [a,b]$, $\mathscr{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ ist Riemann-Integrierbar}\}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}(I) &\to \mathbb{R} \\
f(x) &\mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(i) Seien $f, g \in \mathscr{R}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f + g, \lambda f \in \mathscr{R}(I)$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) Seien $f, g \in \mathscr{R}(I)$, $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in I$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(iii) Sei $f \in \mathscr{R}(I) \Rightarrow |f| \in \mathscr{R}(I)$

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(iv) Sei $f \in \mathscr{R}(I)$, $a < c < b$

$$\Rightarrow f|_{[a,b]} \in \mathscr{R}([a,b]),\ f|_{[c,b]} \in \mathscr{R}([c,b])$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bemerkung 1: Mit der Konvention

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

gilt (iv) für alle a, b, c.

Bemerkung 2: Seien $f, g \in \mathscr{R}(I)$

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\,(f + g + |f - g|) \in \mathscr{R}(I)$$
$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\,(f + g - |f - g|) \in \mathscr{R}(I)$$

Bemerkung 3: Nach Satz 1 ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(i) f ist beschränkt

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathscr{P}(I)$

$$\mu(P) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

Beweis von Satz 2:

(i) Seien

$$A := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad B := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie in Satz 1, so dass $\forall P = \{x_0, ..., x_N\} \in \mathscr{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta \; \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt

$$\left| A - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\left| B - \sum_{k=1}^{N} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow \left| A + B - \sum_{k=1}^{N} (f + g)(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} f + g \in \mathscr{R}(I)$ und

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Genauso: $\lambda f \in \mathscr{R}(I)$ und

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) $f(x) \le g(x)\, \forall x \in I$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{S}(f,P) \le \overline{S}(g,P)\, \forall P \in \mathscr{P}(I) \\ &\Rightarrow \inf_{P\in\mathscr{P}(I)} \overline{S}(f,P) \le \inf_{P\in\mathscr{P}(I)} \overline{S}(g,P) \end{aligned}$$

(iii) $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|\ \forall x, y \in I$

$$\begin{aligned} \sup_{x,y\in I} ||f(x)| - |f(y)|| &\le \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| \\ \sup_{x,y\in I} |f(x)| - |f(y)| &\le \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| \\ \sup_{x,y\in J} |f(x)| - |f(y)| &\le \sup_{x,y\in J} |f(x) - f(y)| \qquad J \subset I \\ \sup_J |f| - \inf_J |f| &\le \sup_J f - \inf_J f \\ \Rightarrow \overline{S}(|f|,P) - \underline{S}(|f|,P) &\le \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \end{aligned}$$

$\overset{\text{Bem3}}{\Rightarrow} |f| \in \mathscr{R}(I)$

$$-|f(x)| \le \pm f(x) \le |f(x)|\, \forall x \in I$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \pm \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

(iv) *Übung:* Zeige $f|_{[a,b]}$, $f|_{[c,b]}$ sind Riemann-integrierbar

Seien

$$A := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad B := \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sei $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow \exists P_0 \in \mathscr{P}([a,b])$, so dass

$$\overline{S}(f|_{[a,c]}, P_0) < A + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \underline{S}(f|_{[a,c]}, P_0) > A - \frac{\varepsilon}{2}$$

$\exists P_1 \in \mathscr{P}([c,b])$, so dass

$$\begin{aligned} \overline{S}(f|_{[c,b]}, P_1) &< B + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \underline{S}(f|_{[c,b]}, P_1) > B - \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \overline{S}(f, P_0 \cup P_1) &< A + B + \varepsilon \qquad \underline{S}(f, P_0 \cup P_1) > A + B - \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$:

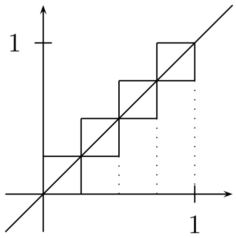
$$\Rightarrow \inf_P \overline{S}(f,P) < A + B + \varepsilon \qquad \sup_P \underline{S}(f,P) > A + B - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf_P \overline{S}(f,P) = \sup_P \underline{S}(f,P) = A + B$$

(QED)

Beispiel: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ ist integrierbar.

Beispiel: Sei $f(x) = x$, $P = \{0, \frac{1}{n}, ..., 1\}$



$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Satz 3: Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f \in \mathscr{R}(I)$

(ii) $f : I \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f \in \mathscr{R}(I)$

Beweis:

(i) *Schritt 1:* f ist gleichmässig stetig, das heisst $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beweis: Annahme, f sei nicht gleichmässig stetig, das heisst $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \, \exists x, y \in I$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow \exists x_n, y_n \in I$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Nach Bolzano-Weierstrass $\exists$ Teilfolge n_k, so dass die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: x \in I \qquad \lim_{k\to\infty} y_{n_k} =: y \in I$$

existieren.

$$y = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} + y_{n_k} - x_{n_k}) = \underbrace{\lim_{k\to\infty} x_{n_k}}_{=x} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} (y_{n_k} - x_{n_k})}_{=0}$$

$$\Rightarrow x = y \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$$

$\Rightarrow \exists k$, so dass

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |f(y_{n_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$$

$\to$ Widerspruch!

Schritt 2: $f \in \mathscr{R}(I)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie in Schritt 1.
Sei $P \in \mathscr{P}(I)$ mit $\mu(P) < \delta$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$
$\Rightarrow \forall k \in \{1, ..., N\} \, \forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt

$$|x - y| < \delta \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x,y \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - f(y)| = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

$\overset{\text{Bem3}}{\Rightarrow} f \in \mathscr{R}(I)$

(ii) Übung

(QED)

Satz 4: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \, \forall x \in I$$

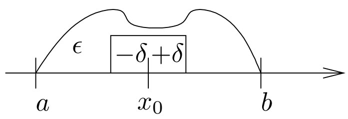
Beweis: Annahme: $\exists x_0 \in I$, so dass $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x_0) > 0$
Sei

$$\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

Da f stetig ist $\exists \delta > 0 : \forall y \in I$

$$|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(y) = |f(y)| > |f(x_0)| - \varepsilon = \varepsilon > 0$$



Sei

$$g(x) := \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } |x - x_0| < \delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq g(x) \, \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \delta\varepsilon > 0$$

solange $\delta \leq b - a$
$\to$ Widerspruch! (QED)

Definition: Sei $I = [a,b]$

$$\mathscr{C}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\} \overset{\text{Sa3}}{\subset} \mathscr{R}(I)$$

dann ist die L^p-*Norm* definiert durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

Behauptung: $\| \, \|_p$ ist eine Norm auf $\mathscr{C}(I)$

i) $\|f\|_p \geq 0 \, \forall f \in \mathscr{C}(I)$ (Satz 2)

ii) $\|f\|_p = 0, \; f \in \mathscr{C}(I) \Rightarrow f = 0$ (Satz 4)

iii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ (Satz 2)

iv) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Hölderungleichung)

Hölderungleichung: Seien $f, g \in \mathscr{C}(I)$

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} &\le \int_a^b \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b \left(\frac{|f(x)|^p}{p \cdot \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \|g\|_q^q}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

für $f, g \neq 0$.
(QED)

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} (\|f\|_p + \|g\|_q)\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q=p}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Dreiecks-Ungleichung für $\|\cdot\|_p$

8.1 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

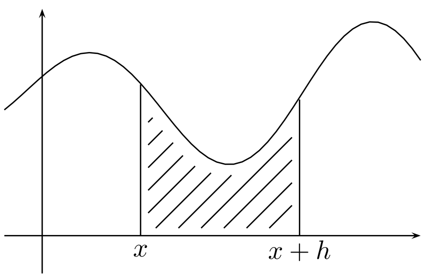
Satz 5: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\ a \le x \le b$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$F'(x) = f(x)\,\forall x \in [a, b]$$

Beweis:



$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

(Satz 2)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int\limits_x^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - hf(x)\right| \\
&= \frac{1}{h}\left|\int\limits_x^{x+h} (f(\xi)-f(x))\,\mathrm{d}\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} |f(\xi)-f(x)|\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \sup_{x\leq\xi\leq x+h} |f(\xi)-f(x)|
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$.
Da f (an der Stelle x) stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $y \in [a,b]$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Für $0 < h < \delta$ gilt

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leq \sup_{y\in[x,x+h]} |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Diese Ungleichung gilt ebenfalls für $-\delta < h < 0$. Das heisst

$$F'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

(QED)

Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Eine stetige, differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst *Stammfunktion* von f, wenn $\forall x \in [a,b]$

$$F'(x) = f(x)$$

Bemerkung: Wenn F, G Stammfunktionen von f sind, so ist $G-F$ konstant.

Korollar: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f

$$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beweis: Nach Satz 5 ist die Funktion

$$F_0(x) := \int\limits_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

eine Stammfunktion von f.
$\overset{\text{Bem}}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : \forall x$

$$F(x) = F_0(x) + c$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int\limits_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Notation: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\langle F_0 \rangle = \{F_0 + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
\int f :&= \{\text{Menge der Stammfunktionen von } f\} \\
&= \{F : I \to \mathbb{R} | F \text{ ist differenzierbar und } F' = f\}
\end{aligned}$$

Beispiel 1: $f(x) = x^a,\ a \neq -1$

$$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} \Rightarrow \int x^a = \left\langle \frac{x^{a+1}}{a+1} \right\rangle$$

Beispiel 2:

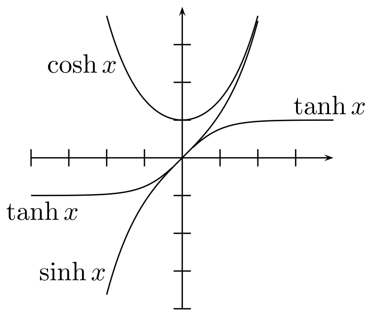
$$\int \frac{1}{x} = \langle \log x \rangle$$

Beispiel 3:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \langle \arctan x \rangle$$

Beispiel 4: $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} (\log(1+x) - \log(1-x)) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= \operatorname{artanh}(x) \\ &= \left\langle \tanh^{-1}(x) \right\rangle \end{aligned}$$



Beispiel 5: $x > 1$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1} = \left\langle \frac{1}{2} \log(x^2-1) \right\rangle$$

Beispiel 6:

$$\int e^{cx} = \left\langle \frac{1}{c} e^{cx} \right\rangle$$

Beispiel 7:

$$\int \sin = \langle -\cos \rangle \qquad \int \cos = \langle \sin \rangle$$

Beispiel 8:

$$\int \sinh = \langle \cos \rangle \qquad \int \cosh = \langle \sinh \rangle$$

Beispiel 9:

$$\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \to (-1, 1) \qquad \arcsin = \sin^{-1} : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin' = \cos = \sqrt{1 - \sin^2}$$

$-1 < x < 1$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \langle \arcsin x \rangle$$

Beispiel 10: $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \langle \mathrm{arsinh} x \rangle$$

$x > 1$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \left\langle \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \right\rangle = \langle \mathrm{arcosh} x \rangle$$

Beispiel 11: $f(x) = e^{-x^2}$

$$F = ???$$

$\nexists$ Formel!!

Satz 6: Partielle Integration
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$\int fg' = fg - \int f'g \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Beweis: $F(x) := f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Leibnitz-Regel}}{\Rightarrow} F' = f'g + fg' \\ \Rightarrow f(b)g(b) - f(a)g(a) &= F(b) - F(a) \\ &\overset{\text{Sa5}}{=} \int\limits_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Sa2}}{=} \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Beispiel 12: $f = x^n$, $g = \frac{1}{c}e^{cx}$

$$f' = nx^{n-1} \qquad g' = e^{cx}$$

$$\Rightarrow \int x^n e^{cx} = \frac{x^n}{c}e^{cx} - \frac{n}{c}\int x^{n-1}e^{cx}$$

Beispiel 13: $f = \sqrt{1-x^2}$, $g = x$

$$f' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad g' = 1$$

$-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &\overset{\text{Bsp8}}{=} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{1}{2}\text{ Fläche des Einheitskreises}\end{aligned}$$

Beispiel 14:

$$\int \sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\operatorname{arsinh} x\right)$$

$x > 1$

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\operatorname{arcosh} x\right)$$

Beispiel 15: $f = \cos^{n-1} x,\ g = \sin x$

$$f' = -(n-1)\cos^{n-2}(x)\sin x \qquad g' = \cos x$$

$$\begin{aligned}\overset{\text{Sa6}}{\Rightarrow} \int \cos^n x\,\mathrm{d}x &= \cos^{n-1}(x)\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \cos^{n-1}(x)\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\ \mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x\ \mathrm{d}x\\ \Rightarrow \int \cos^n x\,\mathrm{d}x &= \frac{\cos^{n-1}(x)\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Definiere:

$$c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$c_0 = \frac{\pi}{2} \qquad c_1 = 1 \qquad c_n = \frac{n-1}{n}c_{n-2}$$

$$\cos^{2n} x \geq \cos^{2n+1} x \geq \cos^{2n+2} x \Rightarrow c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 1 \geq \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geq \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1\\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}c_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ c_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\\ \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} &= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}}\cdot\frac{2}{\pi}\\ &= \underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}}_{W_n\text{ Wallis'sches Produkt}}\cdot\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$$

Satz 7: Substitution
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Beweis: Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int\limits_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow} F$ ist stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)\,\forall x \in I$

$$\Rightarrow (F \circ \varphi)'(\xi) = F'(\varphi(\xi)) \cdot \varphi'(\xi) = f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)$$

$$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) = F(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

$$= \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Korollar:

$$\int\limits_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(\xi + c)\,\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\int\limits_{ac}^{bc} f(x)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_a^b f(c\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \log(\varphi(b)) - \log(\varphi(a)) \tag{3}$$

Beweis:

(1) $\varphi(\xi) = \xi + c$

(2) $\varphi(\xi) = c\xi$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

Beispiel 16:

$$\int \frac{x}{x^2 + ax + b}\,\mathrm{d}x$$

hat für $b > \frac{a^2}{4}$ keine Nullstellen.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int \frac{1}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b) - \frac{a}{2}\int \frac{1}{x^2+ax+b}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$A := \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \qquad y := \frac{x + a/2}{A} = \varphi(x) \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{A} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+ax+b} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a/2)^2+A^2}\\ &= \frac{1}{A^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{A}\right)^2+1}\\ &= \frac{1}{A}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\\ &= \frac{1}{A}\arctan y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+ax+b} = \frac{1}{2}\log(x^2+ax+b) - \frac{a}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)$$

8.2 Uneigentliche Integrale

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig.
Definiere:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

falls der Limes existiert.
Genauso:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int\limits_{a+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int\limits_{-R}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 17: Sei $s > 0$, $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x^s} \Rightarrow \int \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-s}}{1-s}$$

$\to s \neq 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s}$$

für $0 < s < 1$.
Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ ist auf dem Intervall $(0,1]$ nicht integrierbar, falls $s \geq 1$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\frac{R^{1-s}-1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$$

für $s > 1$.

Beispiel 18: $f(t) = e^{-t}$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\left(1-e^{-R}\right) = 1$$

$\Rightarrow f(t) = t^s e^{-t} \leq t^s$ ist integrierbar auf $[0,1]$ für $s > -1$
$\Rightarrow f(t)/t^2 = t^{s-2}e^{-t}$ ist beschränkt auf $[1,\infty]$
$\Rightarrow f(t) = |f(t)| \leq \frac{c}{t^2}$ für $t \geq 1$
$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $[1,\infty)$ für jedes s
$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $[0,\infty)$ für jedes $s > -1$

8.3 Die Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Lemma 1:

i) $\Gamma(1) = 1$

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

iii) $\forall x, y > 0\, \forall \lambda \in [0,1]$

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \cdot \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

Bemerkung: Eine positiv reell-wertige Funktion, die iii) erfüllt heisst *logarithmisch konvex*. Zur Veranschaulichung definiere $f(x) := \log \Gamma(x)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)} \leq e^{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)} = \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

Beweis:

i) $\Gamma(1)$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

ii) $\Gamma(x+1)$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\varepsilon^R \underbrace{t^x}_{f(t)} \underbrace{e^{-t}}_{g'(t)}\,\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\Big|_\varepsilon^R + \int_\varepsilon^R \underbrace{xt^{x-1}}_{f'(t)} \underbrace{e^{-t}}_{-g(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \underbrace{\varepsilon^x e^{-\varepsilon}}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0} - \underbrace{R^x e^{-R}}_{\to 0 \text{ für } R\to\infty} + \underbrace{x\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{\to x\Gamma(x)}$$

iii) Für $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ $\surd$

Sei $0 < \lambda < 1$.
Hölder'sche Ungleichung mit $p = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{1-\lambda}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$

$$\int_\varepsilon^R t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^R \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^\lambda \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \left(\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{\to\Gamma(x)}\right)^{1/p} \cdot \left(\underbrace{\int_\varepsilon^R t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{\to\Gamma(y)}\right)^{1/q}$$
$$\leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

gilt $\forall \varepsilon, R$.

Lemma 2: Sei $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

i) $F(1) = 1$

ii) $F(x+1) = xF(x)\,\forall x > 0$

iii) F ist logarithmisch konvex

$$\Rightarrow F(x) = \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)...(x+n)} \qquad (\star)$$

Gauss'sche Formel für die Γ-Funktion.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F(n) &= (n-1)! \\ F(n+x) &= (x+n-1)F(x+n-1) = x(x+1)...(x+n-1)F(x) \end{aligned}$$

Für $0 < x < 1$ gilt:

a) $F(n+x)$

$$\begin{aligned} &= F(x(n+1) + (1-x)n) \\ &\leq F(n+1)^x \cdot F(n)^{1-x} = n!^x(n-1)!^{1-x} = n!\cdot n^{x-1} \end{aligned}$$

b) $n! = F(n+1)$

$$\begin{aligned} &= F(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \\ &\leq F(n+x)^x \cdot F(n+1+x)^{1-x} \\ &= F(n+x)^x(n+x)^{1-x}F(n+x)^{1-x} \\ &= F(n+x)\cdot(n+x)^{1-x} \end{aligned}$$

Aus a) und b) bekommen wir:

$$n!(n+x)^{x-1} \leq F(n+x) \leq n!\cdot n^{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)...(x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{n!\cdot n^{x-1}}{x(x+1)...(x+n-1)}$$

$$F(x)\cdot \underbrace{\frac{n}{n+x}}_{\to 1} \leq \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)...(x+n)} \leq F(x) \underbrace{\left(\frac{n}{n+x}\right)^x}_{\to 1}$$

$\Rightarrow$ Lemma für $0 < x < 1$

Übung: Beweis von $(\star)$ für $x > 1$

Bemerkung: Euler'sches Sinusprodukt

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) =: \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

Korollar:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^x}{x(x+1)...(x+n)} \cdot \frac{n!\cdot n^{1-x}}{(1-x)(2-x)...(n+1-x)} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{n!^2}{(1-x^2)(2^2-x^2)...(n^2-x^2)} \cdot \frac{n}{n+1-x} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} \\
&\overset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{x}\cdot e^{-x^2} 2x\,\mathrm{d}x \\
= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon^2}^{R^2} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
= \int_{0}^{\infty} t^{1/2-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

9 Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Approximationstheorie

Definition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, dann ist die *Faltung*

$$f \star g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *lokal Riemann-integrierbar*, wenn die Restriktion $f|_I : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Definition: Wir sagen, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat einen *kompakten Träger*, wenn es ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash I$.

Bemerkung: $f, g \in \mathscr{R}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall

$$\Rightarrow fg \in \mathscr{R}(I)$$

Beweis: Übung mit Hinweis:
Für jede Partition $P \in \mathscr{P}(I)$ gilt:

$$\begin{aligned}&\overline{S}(fg, P) - \underline{S}(fg, P)\\ &\quad \leq \|f\| \cdot (\overline{S}(g, P) - \underline{S}(g, P)) + \|g\| \cdot (\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P))\end{aligned}$$

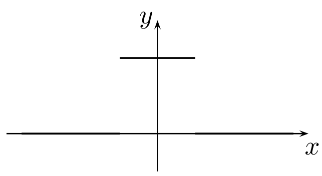
Definition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Riemann-integrierbar mit kompaktem Träger, dann definieren wir die *Faltung* durch

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Substitution: $t \mapsto x - t =: s$

Beispiel:

$$g_k(t) = \begin{cases} k/2 & -1/k \leq t \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f \star g_k(x) = \int_{x-1/k}^{x+1/k} f(t)\frac{k}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\int_{x-1/k}^{x+1/k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\to$ "Mittelwert" von f auf $\left[x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right]$.

$$\frac{k}{2}\int_{x-1/k}^{x+1/k} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

wenn f stetig ist an der Stelle x (folgt später).

Definition: Eine Folge von Funktionen $\delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Dirac-Folge*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist δ_k lokal Riemann-integrierbar und hat einen kompakten Träger.

(ii) $\delta_k(x) \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \, \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(iv) $\forall r > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

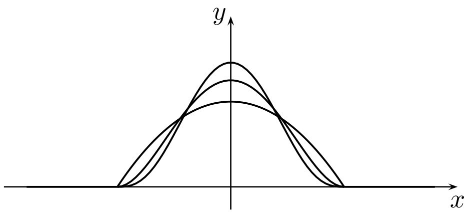
Beispiel 1:

$$\delta_k(x) = g_k(x) = \begin{cases} k/2 & -1/k \leq x \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 2:

$$L_k(x) := \begin{cases} \frac{(1-x^2)^k}{c_k} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$c_k := \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k\,\mathrm{d}x$$



(i) $L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und hat kompakten Träger $\surd$

(ii) $L_k(x) \geq 0 \; \forall k \, \forall x$ $\surd$

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} L_k(x)\,\mathrm{d}x = 1 \;\surd$$

(iv) $1 - x^2 \geq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$

$$c_k = 2\int_0^1 (1-x^2)^k\,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 (1-x)^k\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\,\frac{1}{k+1}(1-x)^{k+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{k+1}$$

$\Rightarrow$ Für $1 \geq |x| \geq r > 0$ gilt:

$$L_k(x) \leq \frac{(1-r^2)^k}{c_k} \leq \underbrace{\frac{k+1}{2}(1-r^2)^k}_{\to 0}$$

$$\int L_k(x) \leq 2 \cdot \frac{k+1}{2}(1-r^2)^k = (k+1)(1-r^2)^k \to 0 \,\forall r > 0$$

Satz 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, $\delta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dirac-Folge. Dann gilt:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{k\to\infty} f \star \delta_k(x) = f(x)$$

(ii) f ist gleichmässig stetig $\Rightarrow$ $f \star \delta_k$ konvergiert gleichmässig gegen f.

Beweis:

(i) $f_k := f \star \delta_k$

$$\begin{aligned}
&|f_k(x) - f(x)| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\delta_k(t)\,\mathrm{d}t - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x-t) - f(x)\right)\delta_k(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\,\delta_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-r}^{r} |f(x-t) - f(x)|\delta_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} |f(x-t) - f(x)|\delta_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \sup_{|t|\le r} |f(x-t) - f(x)| \cdot \int_{-r}^{r} \delta_k(t)\,\mathrm{d}t + 2\|f\| \cdot \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wähle $r > 0$, so dass $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|t| < r \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k \in \mathbb{N}$

$$k \ge k_0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$$

$\Rightarrow$ Für jedes $k \ge k_0$ gilt

$$|f_k(x) - f(x)| \le \underbrace{\sup_{|t|\le r} |f(x-t) - f(x)|}_{\le \varepsilon/2} + \underbrace{2\|f\| \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\,\mathrm{d}t}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

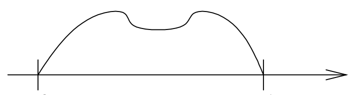
(ii) Falls f gleichmässig stetig ist, können wir r und damit auch k_0 unabhängig von x wählen.

(QED)

Satz 2: Weierstrass
Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.
$\Rightarrow$ $\exists$ Folge von Polynomen P_k (mit reellen Koeffizienten), die gleichmässig gegen f konvergiert.

Beweis:

- 1. Fall: $a = 0,\ b = 1,\ f(0) = f(1) = 0$



Definiere $f(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}\backslash[0,1]$

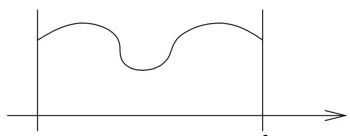
$$L_k(x) := \frac{(1-x^2)^k}{c_k} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} f \star L_k$ konvergiert gleichmässig gegen f.

Polynom auf $[0,1]$?
Für $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f \star L_k(x) &= \int_0^1 f(t) L_k(\underbrace{x-t}_{\in[-1,1]})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t) \cdot \frac{(1-(x-t)^2)^k}{c_k}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t) \sum_{j=0}^{2k} p_j(t) x^j\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{2k} \left(\int_0^1 f(t) p_j(t)\,\mathrm{d}t \right) x^j \end{aligned}$$

- 2. Fall: $a = 0,\ b = 1$



$$g(x) := f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)$$

$0 \leq x \leq 1$ stetig

$$g(0) = 0 = g(1)$$

$\overset{\text{1.Fall}}{\Rightarrow} \exists$ Folge von Polynomen Q_k, die gleichmässig gegen g konvergiert.

$$P_k(x) := Q_k(x) + (1-x)f(0) + xf(1)$$

$\Rightarrow P_k$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmässig gegen f.

- 3. Fall: allgemein

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Definiere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) := f(a + x(b-a))$$

$\overset{\text{2.Fall}}{\Rightarrow} \exists$ Folge von Polynomen Q_k, die gleichmässig gegen g konvergiert.

$$P_k(x) = Q_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \to g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$$

$\Rightarrow P_k$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmässig gegen f.

(QED)

9.2 Gewöhnliche Differential-Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Gegeben: $x_0 \in \Omega$

Gesucht: Eine Abbildung $x : I \to \Omega$ mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einem stetigen und differenzierbaren x, so dass

$$\dot{x}(t) = f(x(t))\,\forall t \in I \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

$\to$ Anfangswertproblem
Jede solche Abbildung $x : I \to \Omega$ heisst Lösung von (1).

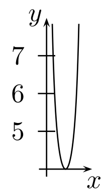
Definition: $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es fur jedes $x_0 \in \Omega$ zwei Konstanten $\varepsilon > 0$ und $L > 0$ gibt, so dass folgendes gilt:

(i) $|x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in \Omega$

(ii) $|x - x_0| \leq \varepsilon$, $|y - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L(|x - y|)$

Beispiele:

- $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
- $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$



Satz 1: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $x_0 \in \Omega$
$\Rightarrow \exists \delta > 0$, so dass Gleichung (1) eine eindeutige Lösung $x : I \to \Omega$ auf dem Intervall $I = [-\delta, \delta]$ besitzt.

Beispiel 1: $n = 1$, $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

$\to t < \frac{1}{x_0}$

Beispiel 2: $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist nicht lokal Lipschitz stetig.
$\dot{x} = \sqrt{x}$, $x(0) = 0$

1. Lösung: $x(t) = 0$

2. Lösung: Ansatz: $x(t) = ct^\alpha$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = c\alpha t^{\alpha-1} = \sqrt{x(t)} = \sqrt{c}t^{\alpha/2} &\Rightarrow c\alpha = \sqrt{c},\ \alpha - 1 = \alpha/2 \\ &\Rightarrow \alpha = 2,\ c = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1: $x : I \to \Omega$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn $\forall t \in I$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

Bemerkung 2: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig

$$y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$$

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3:

$$\left| \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t \right|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b |y(t)|_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}t$$

($|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ Euklidische Norm)

Beweis von Bemerkung 3: Sei $P := \{t_0, t_1, ..., t_N\} \in \mathscr{P}([a,b])$

$$S(y,P) := \sum_{k=1}^{N} y(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$|S(y,P)|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum_{k=1}^{n} |y(t_k)|_{\mathbb{R}^n}(t_k - t_{k-1}) = S(|y|, P)$$

$$\left| \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \lim_{\mu(P)\to 0} S(y,P) \right| = \lim_{\mu(P)\to 0} |S(y,P)| \leq \lim_{\mu(P)\to 0} S(|y|,P)$$

$$= \int_a^b |y(t)|\,\mathrm{d}t$$

Definition: $f : X \to X$ heisst *Kontraktion*, wenn es ein $\alpha < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

Satz 2: Banach'scher Fixpunktsatz
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \varnothing$, $f : X \to X$ eine Kontraktion

$$\Rightarrow \exists! x \in X : f(x) = x$$

Beweis: *Eindeutigkeit:* Seien $x, y \in X$, so dass $x = f(x)$, $y = f(y)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \\ &\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} d(x,y) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x,y) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x,y) = 0 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Existenz: Wähle ein $x_0 \in X$ und definiere

$$x_1 := f(x_0) \qquad x_2 := f(x_1) \qquad ... \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Behauptung: x_n ist eine Cauchy-Folge

$$\begin{aligned} &d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \\ \overset{\text{Ind}}{\Rightarrow}\ &d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\forall n \geq 0$.
$\Rightarrow$ Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{\alpha^{n_0}}{1-\alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ gilt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$
Da X vollständig ist, konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X.
Sei

$$\begin{aligned} x :&= \lim_{n\to\infty} x_n \in X \\ \Rightarrow f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 1: Sei $x_0 \in \Omega$ gegeben. Wähle $\varepsilon > 0$, $L > 0$, so dass $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow x \in \Omega$$

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| \leq \varepsilon \\ |y - x_0| \leq \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Definiere:

$$M := |f(x_0)| + L\varepsilon$$

Wähle $\delta > 0$, so dass $\delta M < \varepsilon$

1. $|x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq M$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq L|x - x_0| + |f(x_0)| \\ &\leq L\varepsilon + |f(x_0)| = M \end{aligned}$$

2. Sei $x : [-\delta, \delta] \to \Omega$ eine Lösung von (1), dann gilt $\forall t \in [-\delta, \delta]$

$$\Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon$$

Annahme: $\exists t \in [0, \delta]$, so dass $|x(t) - x_0| \geq \varepsilon$
Sei τ das kleinste solche t, also $\tau := \inf\{t \in [0, \delta] \mid |x(t) - x_0| \geq \varepsilon\}$

$$\Rightarrow \tau > 0 \qquad |x(\tau) - x_0| = \varepsilon \qquad |x(t) - x_0| < \varepsilon\ \forall t \in [0, \tau)$$

$$\left|\int_0^\tau f(x(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\tau \underbrace{|f(x(t))|}_{\leq M} \mathrm{d}t \leq \tau M \leq \delta M < \varepsilon$$

$\to$ Widerspruch!

3. Sei $\mathscr{X} := \{x : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^n | x \text{ stetig}, |x(t) - x_0| \leq \varepsilon\}$ ein vollständiger, metrischer Raum und seien $x, y \in \mathscr{X}$

$$d(x, y) = \sup_{t\in[-\delta,\delta]} |x(t) - y(t)| =: \|x - y\|$$

4. Sei $F : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ mit
$$F(x)(t) := x_0 + \int\limits_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s$$
$\Rightarrow F$ ist eine Kontraktion
$\overset{\text{Sa2}}{\Rightarrow} F$ hat genau einen Fixpunkt $x \in \mathscr{X}$
$\Rightarrow$ Nach 2. und Bemerkung 1 ist x die eindeutige Lösung von (1) auf $[-\delta, \delta]$

Beweis: $\forall t \in [0, \delta]$
$$\begin{aligned}|F(x)(t) - x_0| &= \left|\int\limits_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \int\limits_0^t |f(x(s))|\,\mathrm{d}s\\ &\leq tM \text{ (da } |x(s) - x_0| \leq \varepsilon)\\ &\leq \delta M \text{ (da } 0 \leq t \leq \delta)\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \int\limits_0^t |f(x(s)) - f(y(s))|\,\mathrm{d}s\\ &\leq \int\limits_0^t L|x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s\\ &\leq tL\|x - y\|s \leq \delta L\|x - y\|\end{aligned}$$
Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $\delta L < 1$.
$$\Rightarrow \|F(x) - F(y)\| < \underbrace{\delta L}_{=:\alpha<1} \|x - y\|$$
(QED)

Satz 3: Eindeutigkeit
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, seien $I, J \in \mathbb{R}^n$ offene Intervalle mit $0 \in I$, $0 \in J$ und $x : I \to \Omega$, $y : J \to \Omega$ zwei Lösungen von (1).
$$\Rightarrow x(t) = y(t)\,\forall t \in I \cap J$$

Definition 1: Ein metrischer Raum (X, d) heisst zusammenhängend, wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen schreiben lässt, das heisst wenn $U, V \subset X$ offene Teilmengen sind, dann gilt:
$$\left.\begin{array}{l}U \cup V = X\\ U \cap V = \varnothing\end{array}\right\} \Rightarrow U = \varnothing \text{ oder } V = \varnothing$$

Äquivalente Bedingung: $A \subset X$
$$\left.\begin{array}{l}A \text{ abgeschlossen}\\ A \text{ offen}\\ A \neq \varnothing\end{array}\right\} \Rightarrow A = X$$

Definition 2: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $Z \subset X$ heisst *zusammenhängend*, wenn der metrische Raum (Z, d_Z) zusammenhängend ist, wobei
$$d_Z := d|_{Z\times Z} : Z \times Z \to \mathbb{R}$$
die *induzierte Metrik* auf Z ist.

Sprechweise: $V \subset Z$ heisst "Z-offen", wenn V offen ist bezüglich der Metrik d_Z. Ebenso mit "Z-abgeschlossen".

Lemma 1: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $V \subset Z \subset X$.
Dann gilt

$$V \text{ ist } Z\text{-offen } \Leftrightarrow \exists \text{ offene Teilmenge } U \subset X : V = U \cap Z$$

Beweis:

- "$\Rightarrow$": Sei V Z-offen und $x \in V$.
  $\Rightarrow \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0$:
  $$B_\varepsilon(x; Z) := \{y \in Z | d(x, y) < \varepsilon\} \subset V$$
  $$B_\varepsilon(x; Z) = U_x \cap Z$$
  wobei
  $$U_x := B_\varepsilon(x; X) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$$
  Sei $U := \bigcup_{x \in V} U_x$:
  $$\Rightarrow U \text{ offen, } V \subset U \cap Z \subset V$$
- "$\Leftarrow$": Sei $x \in V = Z \cap U$ und U offen
  $$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x; X) \subset U$$
  $$\Rightarrow B_\varepsilon(x; Z) = B_\varepsilon(x; X) \cap Z \subset U \cap Z = V$$

Lemma 2: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $B \subset Z \subset X$.
Äquivalent sind:

(i) B ist Z-abgeschlossen

(ii) $\exists$ abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$, so dass $B = A \cap Z$

(iii) Für eine Folge $x_n \in B$ gilt
$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \in Z \Rightarrow x \in B$$

Beweis:

- (i) $\Leftrightarrow$ (iii): Definition von "Z-abgeschlossen".
- (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Sei $A := X \backslash U$
  $$\begin{aligned} &B \text{ ist } Z\text{-abgeschlossen} \\ &\quad \Leftrightarrow V := Z \backslash B \text{ ist } Z\text{-offen} \\ &\quad \overset{\text{Lem1}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ offene Teilmenge } U \subset X : Z \backslash B = U \cap Z \\ &\quad \Leftrightarrow \exists \text{ abgeschlossene Teilmenge } A \subset X : B = A \cap Z \end{aligned}$$
  da $B = A \cap Z = \{x \in Z | x \notin U\}$

Beispiel: $X \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

i) Sei $Z = [a, b]$, $U := (c, \infty)$ und $a < c < b$
$$\Rightarrow (c, b] = V = U \cap Z \text{ ist } Z\text{-offen}$$

ii) Sei $Z = (a, b)$, $A := [c, \infty)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und $a < c < b$.
Setze $B := A \cap Z = [c, b)$ Z-abgeschlossen.
$x_n \in [c, b)$
$$x_n \to b \notin Z$$
x_n konvergiert nicht in Z.

Satz 4: Sei $Z \subset \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$$Z \text{ ist zusammenhängend } \Leftrightarrow Z \text{ ist ein Intervall}$$

Beweis:

- "$\Rightarrow$": Sei Z zusammenhängend

  Annahme: Z ist kein Intervall
  $\Rightarrow$ Für $a, b \in Z$ $\exists c \in \mathbb{R} \setminus Z$: $a < c < b$
  Sei

  $$A := \{x \in Z | x < c\} = Z \cap (-\infty, c)$$
  $$B := \{x \in Z | x > c\} = Z \cap (c, \infty)$$

  $\Rightarrow A, B$ sind Z-offen, das heisst $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = Z$, $a \in A$, $b \in B$
  $\rightarrow$ Widerspruch, da Z zusammenhängend ist!

- "$\Leftarrow$": Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $A \subset I$ sei I-offen und I-abgeschlossen.

  Annahme: $A \neq \varnothing$, $A \neq I$
  Sei $B := I \setminus A \neq \varnothing$. Wähle $a \in A$, $b \in B$ und o.B.d.A. sei $a < b$. Sei

  $$c := \sup\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b,\ x \in A\} \in [a, b] \subset I$$

  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A : c - \varepsilon \leq x \leq c$
  $\Rightarrow \exists x_k \in A : x_k \leq c$ und

  $$\lim_{k\to\infty} x_k = c \in I$$

  $\overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} c \in A$
  $\Rightarrow c < b$, da $b \notin A$ und $c \leq b$.
  $\Rightarrow x \in B\, \forall x \in (c, b]$ (nach Definition von c).

  $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(c + \frac{1}{n}\right) \in I,\ c + \frac{1}{n} \in B$$

  $\Rightarrow c \in B$, da B I-abgeschlossen ist
  $\Rightarrow c \in A \cap B$
  $\rightarrow$ Widerspruch!

(QED)

Satz 5: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $Z \subset X$ zusammenhängend

$$\Rightarrow f(Z) \text{ ist zusammenhängend}$$

Beweis: Sei $B \subset f(Z)$ offen und abgeschlossen bezüglich $f(Z)$, $B \neq \varnothing$

Zu zeigen: $B = f(Z)$

Da B $f(Z)$-offen ist, $\exists$ offene Teilmenge $U \subset Y$:

$$B = U \cap f(Z)$$

Da B $f(Z)$-abgeschlossen ist, $\exists$ abgeschlossene Teilmenge $V \subset Y$:

$$B = f(Z) \cap V$$

Sei $A := f^{-1}(B) \cap Z = \{x \in Z | f(x) \in B\}$

1. $B = f(A)$!
2. $A = f^{-1}(U) \cap Z$
3. $A = f^{-1}(V) \cap Z$

$\Rightarrow A$ ist Z-offen und Z-abgeschlossen und $A \neq \varnothing$
$\Rightarrow A = Z$
$\Rightarrow B = f(Z)$ (QED)

Korollar: Neue Version des Zwischenwertsatzes
Sei (X,d) ein zusammenhängender metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, $x, y \in X$, $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) \leq c \leq f(y)$$

$\Rightarrow \exists z \in X$:

$$f(z) = c$$

Beweis: $f(X)$ zusammenhängend ist zusammenhängend
$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} f(X)$ ist ein Intervall
$\Rightarrow c \in f(X)$

Beweis von Satz 3: $I \cap J$ ist ein Intervall. Setze

$$A := \{t \in I \cap J | x(t) = y(t)\} \subset I \cap J$$

1. $A \neq \varnothing$, $0 \in A$
2. A ist $(I \cap J)$-abgeschlossen.
   Sei $t_k \in A$ eine Folge, die gegen ein Element $t \in I \cap J$ konvergiert.
   $$\Rightarrow x(t) = \lim_{k\to\infty} x(t_k) = \lim_{k\to\infty} y(t_k) = y(t)$$
   $\Rightarrow t \in A$.
3. A ist $(I \cap J)$-offen nach Satz 1:
   Sei $t \in A \subset I \cap J$
   $$\Rightarrow x(t) = y(t) =: x_1$$
   $\Rightarrow \exists \delta > 0$, so dass die Gelichung
   $$\dot{z} = f(z) \qquad z(0) = x_1 \tag{2}$$
   auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ eine eindeutige Lösung hat.
   $\forall s \in (-\delta, \delta)$ sind die Funktionen $s \mapsto x(t+s)$ und $s \mapsto y(t+s)$ Lösungen von (2).
   $$\Rightarrow x(t+s) = y(t+s) \Rightarrow t+s \in I \cap J$$
   $\Rightarrow I \cap J \cap (t-\delta, t+\delta) \cap A$

$\Rightarrow$ Da $I \cap J$ zusammenhängend ist folgt $A = I \cap J$

$$\Rightarrow x(t) = y(t)\, \forall t \in I \cap J$$

(QED)

9.3 Fourier-Reihen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst *2π-periodisch*, wenn $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Beispiele:

- $f(x) = e^{ikx} =: e_k(x)$
- Trigonometrisches Polynom
  $$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k(x),\ a_k \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Lemma 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion der Form (1) mit $a_k \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t,\ -n \leq k \leq n \tag{2}$$

Beweis:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{falls } k=\ell \\ 0 & \text{falls } k\neq\ell \end{array}\right\} = \delta_{k\ell} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \sum_{\ell=-n}^{n} a_\ell \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t}_{\delta_{k\ell}} = a_k$$

Definition: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ lokal Riemann-integrierbar und 2π-periodisch, dann nennen wir die Zahlen

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

die *Fourier-Koeffizienten* von f und die Reihe

$$S_\infty f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{5}$$

die *Fourier-Reihe* von f. Die Partialsumme

$$S_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \tag{6}$$

heisst das *n-te Fourier-Polynom* von f.

Frage 1: Konvergiert die Fourier-Reihe (5)?

Frage 2: Was ist der Limes der Fourier-Reihe (5) (falls er existiert)?

Definition: Seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodisch und lokal Riemann-integrierbar. Die Faltung von f und g ist die Funktion

$$f\star g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiel: $g(t)=e_k(t)=e^{ikt}$

$$\begin{aligned}
f\star e_k(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(k)e^{ikx} \\
\Rightarrow S_n f(x) &= f\star\left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right)(x) = f\star D_n(x) \\
D_n(x) &:= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} e_k(x) \\
F_n(x) &:= \frac{1}{n}\left(D_0(x)+\ldots+D_{n-1}(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f\star F_n = \frac{1}{n}\left(f\star D_0+\ldots+f\star D_{n-1}\right) = \frac{1}{n}\left(S_0f+\ldots+S_{n-1}f\right)$$

Lemma 2:

(i) $x \neq 0$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \geq 0$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in [-\pi, \pi]$

$$\left.\begin{matrix} n \geq n_0 \\ \delta \leq |x| \leq \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow F_n(x) < \varepsilon$$

Beweis:

(i) $D_n(x)$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \\ &= e^{-inx}\frac{-1+e^{i(2n+1)x}}{-1+e^{ix}} \\ &= e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1/2)x}-e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \Rightarrow n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\cos(kx)-\cos(kx+x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(0)-\cos(nx)\right) = \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right) \end{aligned}$$

(ii) Fundamentalsatz der Differential und Integral-Rechnung:

$$f(x) = e^{ikx} \qquad F(x) = \frac{1}{ik}e^{ikx}$$

$\Rightarrow \forall k \neq 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik} = 0$$

$\Rightarrow \forall x$

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(iii) (i) $\Rightarrow$ (iii): Wähle $\rho > 0$, so dass

$$\delta \leq |x| \leq \pi \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq \rho$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n_0\rho} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Für $n \geq n_0$ und $\delta \leq |x| \leq \pi$ gilt

$$F_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{n\rho} \leq \frac{1}{n_0\rho} < \varepsilon$$

(QED)

Satz 1: Fejér
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch
$\Rightarrow$ Die Folge

$$f \star F_n = \frac{1}{n}\left(S_0 f + ... + S_{n-1} f\right)$$

konvergiert gleichmässig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und

$$M := \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$$

1. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\left.\begin{matrix} |x| \leq \pi \\ |t| \leq \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x-t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in Lemma 2 (i)

$$\left.\begin{matrix} n \geq n_0 \\ \delta \leq |t| \leq \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow F_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

$\Rightarrow$ Für $x \in [-\pi, \pi]$ und $n \geq n_0$ gilt

$$|f(x) - f \star F_n(x)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f \star F_n(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))F_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|\,F_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-t)|}_{\leq \varepsilon/2} F(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| F_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x) - f(x-t)| F_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} F_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}(\pi - \delta)2M \sup_{\delta \leq t \leq \pi} F_n(t) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}(\pi - \delta)2M \sup_{-\pi \leq t \leq -\delta} F_n(t) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi}2(\pi - \delta)2M \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi - \delta}{\pi}2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 2: Darstellungssatz
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch und $x \in \mathbb{R}$.
Wenn die Folge $S_n(x)$ konvergiert, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$$

Beweis: Sei $a_n := S_n f(x)$, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$

$$b_n := \frac{a_0 + ... + a_{n-1}}{n} = f \star F_n(x)$$

Wir wissen:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = f(x)$$

(Satz 1)

Behauptung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und $n_1 \geq n_0$:

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot n_1 > |a_0 - a| + |a_1 - a| + ... + |a_{n_0-1} - a|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |b_n - a| &= \left| \frac{a_0 + ... + a_{n-1}}{n} - \frac{a + ... + a}{n} \right| \\
&\leq \frac{|a_0 - a| + ... + |a_{n_0-1} - a|}{n} + \frac{|a_{n_0} - a| + ... + |a_{n-1} - a|}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n_1}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$S_n f \to f^2$

$$\left.\begin{matrix}\text{punktweise} \\ \text{gleichmässig}\end{matrix}\right\} \text{nicht immer}$$

L^2 konvergiert im quadratischen Mittel immer

$$\|f\|_2 : = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$\langle f, g \rangle : = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \, \mathrm{d}t$$

$f, g \in \mathbb{C}$

Satz 3: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokal Riemann-integrierbar und 2π-periodisch, dann gilt

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0 \tag{2}$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \tag{3}$$

Beweis:

(1) $e_k(t) := e^{ikt}$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-ikt}}_{\overline{e_k(t)}} f(t)\,\mathrm{d}t = \langle e_k, f\rangle$$

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e_k$$

$$\Rightarrow \|S_n f\|_2^2 = \langle S_n f, S_n f\rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e_k, \sum_{\ell=-n}^{n} \widehat{f}(\ell)e_\ell \right\rangle$$

$$= \sum_{k,\ell=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)}\widehat{f}(\ell)\underbrace{\langle e_k, e_\ell\rangle}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \overline{\widehat{f}(k)}\,\langle e_k, f\rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e_k, f \right\rangle$$

$$= \langle S_n f, f\rangle \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \|S_n f\|_2^2 = \langle S_n f, f\rangle = \langle f, S_n f\rangle$$

$$\Rightarrow \|f - S_n f\|_2^2 = \langle f - S_n f, f - S_n f\rangle$$

$$= \langle f, f\rangle - \langle S_n f, f\rangle - \langle f, S_n f\rangle + \langle S_n f, S_n f\rangle$$

$$= \|f\|_2^2 - \|S_n f\|_2^2$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

1. Es gibt eine stetige und 2π-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$$

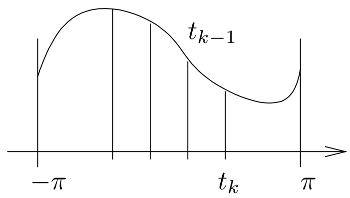
o.B.d.A.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$M := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$$

$$\exists P = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \in \mathscr{P}([-\pi, \pi]) \qquad t_i = -\pi + \frac{2\pi i}{N}$$

so dass

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \frac{\varepsilon^2\pi}{16M}$$



Definiere für $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$g(t) := f(k_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

$$\Rightarrow \inf_{[t_{k-1},t_k]} f \leq g(t) \leq \sup_{[t_{k-1},t_k]} f$$

$$\Rightarrow |g(t)| \leq M \,\forall t$$

$\Rightarrow \forall t \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$|f(t) - g(t)| \leq \sup_{[t_{k-1},t_k]} f - \inf_{[t_{k-1},t_k]} f$$

$$\Rightarrow \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \left(\sup_{[t_{k-1},t_k]} f - \inf_{[t_{k-1},t_k]} f \right) (t_k - t_{k-1})$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)$$

$$\Rightarrow \|f - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq \frac{2M}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{M}{\pi} (\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)) < \frac{\varepsilon^2}{16}$$

2. $\exists$ trigonometrisches Polynom $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - h(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Satz 1:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - F_n \star g(t)| \right) = 0$$

$$\Rightarrow |g(t) - h(t)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon^2}{16}$$

$$\Rightarrow \|g - h\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{16}$$

$$\Rightarrow \|g - h\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

1. & 2.

$$\Rightarrow \|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$

$$S_n h = h$$

$$\Rightarrow \|f - S_n f\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \underbrace{\|h - S_n h\|_2}_{=0,\, n\geq n_0} + \underbrace{\|S_n(h - f)\|_2}_{\leq \|h-f\|_2}$$

$$\leq 2\|f - h\| < \varepsilon$$

(3) Nach (1):

$$\|f\|_2^2 - \|f - S_n f\|_2^2 = \|S_n f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2$$

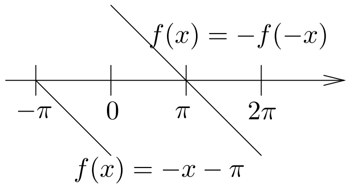
Nach (2):

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2$$

(QED)

Beispiel 1: $f(x) = \pi - x$, $0 \le x \le 2\pi$



$$\Rightarrow \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{(\pi - x)}_{f}\underbrace{\sin(kx)}_{g'}\,\mathrm{d}x$$

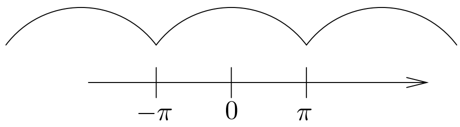
$$= \left|\frac{i(\pi - x)(\cos(kx))}{\pi k}\right|_0^{\pi} + \underbrace{\frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=0} = -\frac{i}{k},\ k \neq 0$$

$$\widehat{f}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2 \overset{\text{Sa3}}{=} \frac{1}{2}\|f\|_2^2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\pi - x|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$

Beispiel 2: $f(x) = \cos(ax)$, $-\pi \le x \le \pi$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$



$f(x) = -f(x)$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos((a+k)x) + \cos((a-k)x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin((a+k)x)}{a+k} + \frac{\sin((a-k)x)}{a-k}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin((a+k)\pi)}{a+k} + \frac{\sin((a-k)\pi)}{a-k}\right)$$

$$= \frac{\sin(a\pi)}{2\pi}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}(-1)^k\frac{a}{a^2-k^2}$$

$$\Rightarrow |\widehat{f}(k)| \le \frac{c}{k^2}$$

für ein $c > 0$ (das von a abhängt).

Die Folge

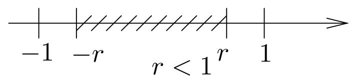
$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

konvergiert gleichmässig gegen $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos(ax) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(a\pi)}{\pi}(-1)^k \frac{a}{a^2-k^2}\, e^{ikx} \\
&= \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \frac{2a}{a^2-k^2} \cos(kx) \\
\overset{x=\pi}{\Longrightarrow} \cos(a\pi) &= \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \frac{2a}{a^2-k^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)} - \frac{1}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-k^2} \tag{4}$$

$(a \notin \mathbb{Z})$, konvergiert gliechmässig für $|a| \leq r$



Insbesondere ist die Funktion $\pi\cot(a\pi) - 1/a$ stetig an der Stelle $a = 0$.

$$g(t) := \frac{\pi\cos(t\pi)}{\sin(t\pi)} - \frac{1}{t},\ 0 < |t| < 1 \qquad g(0) := 0$$

$$g_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \frac{2t}{t^2-k^2}$$

$g_n \overset{\text{glm.}}{\longrightarrow} g$ für $|t| \leq r < 1$

$$\Rightarrow G_n(x) := \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \to G(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \int_0^x |g_n(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sup_{|t|\leq r} |g_n(t) - g(t)| \to 0$$

$|x| \leq r$.

$$\begin{aligned}
G(x) &= \log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) \\
G_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \log\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) \\
G(x) &= \lim_{n\to\infty} G_n(x)\, \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \\
\Rightarrow \exp G(x) &= \lim_{n\to\infty} \exp G_n(x),\ |x| < 1 \\
\Rightarrow \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} &= \lim_{n\to\infty} \prod k = 1^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\ |x| \leq 1
\end{aligned} \tag{2}$$

Behauptung: (2) gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P_n(x) :&= x \prod k = 1^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!^2} x \prod k = 1^n (x^2 - k^2) \\
\Rightarrow P_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!^2} \prod k = -n^n (x+k) \\
\frac{P_{n+2}(x)}{P_n(x)} &\to 1
\end{aligned}$$

10 Lineare Operatoren/Abbildungen

10.1 Normen

Definition: Sei V ein Vektorraum.
Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$V \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|$$

so dass $\forall v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

i) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiel: $x = (x_1, ..., x_n) \in V = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

$\to$ *Euklidische Norm*

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p}$$

$1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

Beispiel: $(a_{ij}) = A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j > 0$$

Setze

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i > 0$$

(das heisst, A heisst *positiv definit*), dann definiert die Formel

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y$$

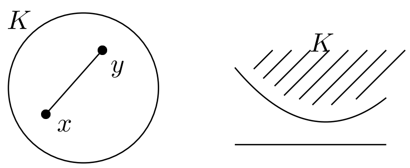
ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$. Daher ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^T A x} = \|x\|_A \end{aligned}$$

eine Norm.

Definition: Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst konvex, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$(1 - t)x + ty \in K$$



Übung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Teilmenge, so dass

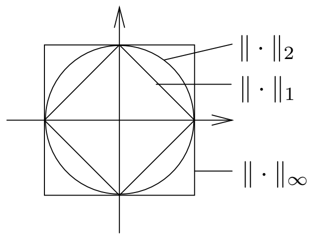
$$x \in U \Rightarrow -x \in U \qquad U \neq \varnothing \qquad U \text{ ist beschränkt}$$

Insbesondere gilt $0 \in U$.
Die Formel

$$\|x\| := \begin{cases} \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in U\}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Es gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} = U$$



Definition: Sei V ein reeller Vektorraum und seien $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|'$ zwei Normen auf V.
Diese Normen heissen *äquivalent*, wenn es eine Konstante $c \geq 1$ gibt, so dass $\forall x \in V$

$$\frac{1}{c}\|x\| \leq \|x\|' \leq c\|x\|$$

Lemma 1: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Beweis: Sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Zu zeigen: $\| \cdot \|$ ist äquivalent zu $\| \cdot \|_2$

(i) $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| \leq c\|x\|_2$$

Sei $e_1, ..., e_n$ die Standard Basis von $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \|x\| = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

$\Rightarrow$ Nach Cauchy-Schwartz gilt

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}}_{\|x\|_2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2}}_{=:c}$$

(ii) $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|$$

Die *Einheitssphäre*

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt
$\Rightarrow S^{n-1}$ ist kompakt
Die Funktion $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \|x\|$$

definiert ist, ist stetig

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \overset{\text{(i)}}{\leq} c\|x - y\|_2$$

$\Rightarrow \exists x_0 \in S^{n-1}$ mit

$$\|x_0\| = f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in S^{n-1}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) = \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \geq \|x_0\| =: \frac{1}{c}$$

(QED)

Bemerkung: Seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ äquivalente Normen auf V.
$\Rightarrow$ Diese Normen erzeugen die selben offenen Mengen, das heisst, wenn U offen ist bezüglich $\|\cdot\|$, dann auch bezüglich $\|\cdot\|'$.

Beweis: Wähle $c > 0$, so dass $\forall x \in V$

$$\|x\| \leq c\|x\|'$$

Sei U offen bezüglich $\|\cdot\|$ und sei $x \in U$.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in V \mid \|x - y\| < \varepsilon\} \subset U$$

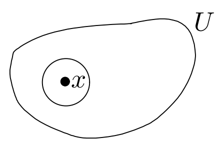
Sei $\delta := \varepsilon/c$.
Dann gilt $\forall y \in V$

$$\begin{aligned} \|x - y\|' < \delta \quad &\Rightarrow \quad \|x - y\| \leq c\|x - y\|' < c\delta = \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad y \in U \end{aligned}$$

das heisst

$$B_\delta(x; \|\cdot\|') \subset U$$

$\Rightarrow U$ ist offen bezüglich $\|\cdot\|'$



(QED)

Definition: Seien X, Y normierte reelle Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heisst *beschränkt*, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass gilt

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

Beispiel: $X = Y = V$, $\|x\|_X = \|x\|$, $\|x\|_Y = \|x\|'$
Dann sind die Operatoren

$$id : (V, \|\cdot\|) \to (V, \|\cdot\|') \qquad id : (V, \|\cdot\|') \to (V, \|\cdot\|)$$

genau dann beschränkt, wenn die beiden Normen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ auf V äquivalent sind.

Lemma 2: Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung.
$\Rightarrow$ Äquivalent sind:

(i) T ist beschränkt

(ii) T ist stetig

(iii) T ist stetig an der Stelle 0

Beweis:

- (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y \le c\|x\|_X \,\forall x \in X \quad &\Rightarrow \quad \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \le c\|x_1 - x_2\| \,\forall x_1, x_2 \in X \\ &\Rightarrow \quad T \text{ ist Lipschitz-stetig} \\ &\Rightarrow \quad T \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

- (ii) $\Rightarrow$ (iii): trivial

- (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon = 1$.
  $\exists \delta > 0 : \forall x \in X$ gilt

$$\|x\|_X \le \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y < 1$$

$\forall x \in X \setminus \{0\}$ gilt $\left\| \frac{\delta x}{\|x\|_X} \right\|_X = \delta$
$\Rightarrow \forall x \in X \setminus \{0\}$

$$\left\| T \cdot \frac{\delta x}{\|x\|_X} \right\|_Y = \left\| \frac{\delta}{\|x\|_X} \cdot Tx \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X} \cdot \|Tx\|_Y \le 1$$

$\Rightarrow \forall x \in X$

$$\|Tx\|_Y \le \frac{\|x\|_X}{\delta}$$

$\Rightarrow T$ ist beschränkt. (QED)

Definition: Sei $T : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator.
Dann heisst

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

die *Norm* von T.

Bezeichnung:

$$\mathscr{L}(X, Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ ist ein beschränkter linearer Operator}\}$$

Lemma 3:

- $\mathscr{L}(X, Y)$ ist ein Vektorraum
- Die Abbildung $T \mapsto \|T\|$ ist eine Norm auf $\mathscr{L}(X, Y)$

Beweis:

1) Seien $S, T \in \mathscr{L}(X, Y)$.
   $\forall x \in X$

$$\|Tx\|_Y \le \|T\| \cdot \|x\|_X \qquad \|Sx\|_Y \le \|S\| \cdot \|x\|_X$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|(S+T)x\|_Y &= \|Sx+Tx\|_Y \\
&\le \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \\
&\le \|S\|\cdot\|x\|_X + \|T\|\cdot\|x\|_X \\
&= (\|S\|+\|T\|)\cdot\|x\|_X \\
\Rightarrow \frac{\|(S+T)x\|_Y}{\|x\|_X} &\le \|S\|+\|T\| \quad \forall x \in X\setminus\{0\} \\
\Rightarrow \|S+T\| &\le \|S\|+\|T\|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow S+T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und

$$\|S+T\| \le \|S\|+\|T\|$$

2) Sei $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda T \in \mathscr{L}(X,Y) \qquad \|\lambda T\| = |\lambda|\cdot\|T\|$$

3) $\|T\| = 0 \Rightarrow T = 0$ (QED)

Lemma 4: Sei Y ein Banach-Raum (also ein vollständiger Raum) und X ein normierter Vektorraum
$\Rightarrow \mathscr{L}(X,Y)$ ist ein Banach-Raum

Spezialfall: Sei $X = Y$ ein Banach-Raum
$\Rightarrow \mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X)$ ist ein Banach-Raum.

Beweis von Lemma 4: Sei $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ eine Cauchy-Folge.
Für $x \in X$ gilt

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \le \|T_n - T_m\|\cdot\|x\|_X$$

$\Rightarrow T_n x$ ist eine Cauchy-Folge
$\Rightarrow$ Da Y vollständig ist, konvergiert $T_n x \,\forall x \in X$.

Wir definieren eine Abbildung $T : X \to Y$ durch

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

- T ist linear: Seien $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) \\
&= \lim_{n\to\infty} (T_n x + T_n y) \\
&= \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y \\
&= Tx + Ty \\
T(\lambda x) &= \lambda T x
\end{aligned}$$

- T ist beschränkt: $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \le \|T_n - T_m\|$$

$\Rightarrow$ Die Folge $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge
$\Rightarrow$ Der Limes

$$c := \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$$

existiert.

Behauptung: $\|Tx\|_Y \le c\|x\|_X \,\forall x \in X$

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_Y &= \left\| \lim_{n\to\infty} T_n x \right\|_Y \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \\
&\le \left(\lim_{n\to\infty} \|T_n\| \right) \|x\|_X \\
&= c\|x\|_X
\end{aligned}$$

- T_n konvergiert gegen T: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m \in \mathbb{N}$
$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|T_n - T_m\| < \varepsilon$$
$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\|_Y &= \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_Y \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{<\varepsilon} \cdot \|x\|_X \\ &\leq \varepsilon \|x\|_X \end{aligned}$$
$\Rightarrow \forall x \in X \setminus \{0\}\ \forall n \geq n_0$
$$\frac{\|(T_n - T)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0$
$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon$$
Also konvergiert T_n gegen T (QED)

Beispiel: Sei $Y = \mathbb{R}$.
$\mathscr{L}(X, \mathbb{R})$ ist ein Banachraum, genannt *Dualraum*.

Übung: Sei $\dim X < \infty$.
$\Rightarrow$ Jede lineare Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt
Sei $\dim X^\star = \dim X < \infty$ und $X = \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow X^\star \cong \mathbb{R}^n$ (suche Basis)
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$\exists\, \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^n)^\star : y \to \varphi_y$
$$\|y\|_q = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi_y(x)|}{\|x\|_p}$$

Beispiel: Sei $X = Y$ ein Banachraum
$$\Rightarrow \mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$$
$$\begin{aligned} \mathscr{L}(X) \times \mathscr{L}(X) &\to \mathscr{L}(X) \\ (T, S) &\mapsto T \cdot S \end{aligned}$$

Übung:
$$\|T \cdot S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

10.2 Banachalgebren

Definition: Eine *Banachalgebra* (mit Eins) besteht aus einem Banachraum $\mathscr{A}$, einer Abbildung
$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A} : (x, y) \mapsto xy$$
(genannt *Produkt-Abbildung*) und einem Element $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ (genannt *Eins-Element*), so dass folgendes gilt:

- $\forall x, y, z \in \mathscr{A}$
$$(xy)z = x(yz)$$
- $\forall x, y, z \in \mathscr{A}$
$$x(y+z) = xy + xz \qquad (x+y)z = xz + yz$$
- $\forall x \in \mathscr{A}$
$$\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x$$
- $\forall x, y \in \mathscr{A}$
$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Beispiel 1: Sei $\mathscr{A} = \mathbb{R}^{n\times n}$

$$(A,B) \mapsto A\cdot B$$

$$\|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (\star)$$

$$\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$$

Hier wählen wir eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen sie mit

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Dann gibt uns die Formel $(\star)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \|A\| \end{cases}$$

Beispiel $\frac{3}{2}$: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

$$\|A\cdot B\|_2 \leq \|A\|_2\cdot\|B\|_2$$

Beispiel 2: Sei $\mathscr{A} = \mathscr{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$

$$\|f\| := \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \qquad \|fg\| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$

Beispiel 3: Sei X ein Banach-Raum

$$\mathscr{A} := \mathscr{L}(X) \qquad \|T\| = \text{Operatornorm von } T$$

Beispiel 4: Sei X ein metrischer Raum.

$$\mathscr{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

Definition: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum und sei $x_1, x_2, x_3, ... \in X$ eine Folge in X.
$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *konvergiert*, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \in X$$

in X konvergiert. Den Limes bezeichnen wir mit

$$\sum_{k=1}^\infty x_k := \lim_{n\to\infty} s_n$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ heisst *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$$

konvergiert.

Lemma 5: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und konvergiere $\sum_{k=1}^\infty x_k$ absolut.
$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert.

Beweis: Wir zeigen, dass die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

eine Cauchy-Folge bilden.
Sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergiert, ist die Folge

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

konvergent, also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Also $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$m > n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_m - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = \sigma_m - \sigma_n < \varepsilon$$

Also gilt $\forall m > n \geq n_0$

$$\|s_m - s_n\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow (s_n)$ ist eine Cauchy-Folge
$\Rightarrow (s_n)$ konvergiert (QED)

Anwendung auf Potenzreihen: Sei $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ eine Banach-Algebra über $\mathbb{R}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

sei die *Potenzreihe* mit $a_k \in \mathbb{R}$ und der *Konvergenzradius*

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 0$$

Annahme: $\rho > 0$
$\Rightarrow$ Die Potenzreihe P konvergiert für $|z| < \rho$
Sei $x \in \mathscr{A}$ mit $\|x\| < \rho$, dann gilt

$$P_{\mathscr{A}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

konvergiert, da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k x^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|x^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|x\|^k$$

konvergiert
$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert absolut, da $\|x\| < \rho$.

Definition (Nachtrag): Eine *reelle Banachalgebra* (mit $\mathbf{1}$) besteht aus einem Banachraum $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$, einem Element $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ und einer Abbildung

$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A} \qquad x, y \mapsto x \cdot y$$

die die folgenden Axiome erfüllt:

- Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathscr{A}$:

$$(xy)z = x(yz)$$

- Distributivität: $\forall x, y, z \in \mathscr{A}$

$$(x+y)\cdot z = xz + yz \qquad x\cdot(y+z) = xy + xz$$

$\forall x, y \in \mathscr{A}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda x)\cdot y = \lambda(x\cdot y) = x\cdot(\lambda y)$$

- Eins-Element: $\forall x \in \mathscr{A}$

$$\mathbf{1}\cdot x = x\cdot \mathbf{1} = x$$

- Norm: $\forall x, y \in \mathscr{A}$

$$\|x\cdot y\| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Bemerkung: Für alle fixen $x \in \mathscr{A}$ sind die Abbildungen

$$\mathscr{A} \to \mathscr{A} : y \mapsto x\cdot y \qquad \mathscr{A} \to \mathscr{A} : y \mapsto y\cdot x$$

linear.

Erinnerung: Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad a_k \in \mathbb{R}$$

eine *Potenzreihe* mit *Konvergenzradius* ρ und $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra.
Die Reihe

$$P_{\mathscr{A}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

konvergiert in $\mathscr{A}$ für alle $\|x\| < \rho$ und definiert eine Abbildung

$$P_{\mathscr{A}} : B_\rho := \{x \in \mathscr{A} \mid \|x\| < \rho\} \to \mathscr{A} : x \mapsto P_{\mathscr{A}}(x)$$

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
Eine Funktion $f : I \to X$ heisst *differenzierbar an der Stelle* $t \in I$ *mit Ableitung* $a := f'(t) \in X$, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}$

$$|h| < \delta,\ t+h \in I \quad \Rightarrow \quad \frac{\|f(t+h) - f(t) - ha\|}{|h|} < \varepsilon$$

äquivalent heisst dies

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = a$$

3 6: Sei $\mathscr{A}$ eine Reelle Banachalgebra und P eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.
Dann gilt:

i) $\forall 0 < r < \rho$ ist die Abbildung

$$P_{\mathscr{A}} : B_r \to \mathscr{A} : x \mapsto P_{\mathscr{A}}(x)$$

Lipschitz-stetig, genauer gilt $\forall \|x\| < r,\ \|y\| < r$

$$\|P_{\mathscr{A}}(x) - P_{\mathscr{A}}(y)\| \leq c_r \|x - y\| \qquad c_r := \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \infty$$

ii) $\forall x \in \mathscr{A}$ ist die Funktion

$$\left(\frac{-\rho}{\|x\|}, \frac{\rho}{\|x\|}\right) \to \mathscr{A} : t \mapsto P_{\mathscr{A}}(tx)$$

differenzierbar in t mit der Ableitung $x\cdot Q_{\mathscr{A}}(tx) \in \mathscr{A}$, wobei

$$Q(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

Beweis:

i) Seien $x, y \in \mathscr{A}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$x^k - y^k = \sum_{j=0}^{j-1} x^{k-1-j}(x-y)y^j$$

das heisst

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| < r \\ \|y\| < r \end{array}\right\} \Rightarrow \|x^k - y^k\| \begin{array}{ll} \leq & \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \|x^{k-1-j}\| \cdot \|x-y\| \cdot \|y^j\| \\ \leq & k \cdot r^{k-1} \cdot \|x-y\| \end{array} \tag{1}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \|P_{\mathscr{A}}(x) - P_{\mathscr{A}}(y)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - y^k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|x^k - y^k\| \\ &\overset{(1)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} \right)}_{=:c_r} \cdot \|x-y\| \end{aligned}$$

Aus Analysis I: $c_r < \infty$, da $r < \rho$ und $c_r = \dot{P}(r)$.

ii) Es gilt $Q(z) = \dot{P}(z)$ mit Konvergenzradius $> r > 0$. Das heisst

$$Q_{\mathscr{A}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

ist definiert. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\|P_{\mathscr{A}}((t+h)x) - P_{\mathscr{A}}(tx) - h \cdot x \cdot Q_{\mathscr{A}}(tx)\| \\ &\quad = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t+h)^k x^k - a_k t^k x^k - h \cdot x \cdot k a_k t^{k-1} x^{k-1} \right\| \\ &\quad = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left((t+h)^k - t^k - k h t^{k-1} \right) a_k x^k \right\| \\ &\quad \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \underbrace{(t+h)^k - t^k - k h t^{k-1}}_{\sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} h^j t^{k-j}} \right| \cdot |a_k| \cdot \|x\|^k \\ &\quad \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |h|^j |t|^{k-j} \right) \cdot |a_k| \cdot \|x\|^k \\ &\quad \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[(|t| + |h|)^k - |t|^k - k \cdot |h| \cdot |t|^{k-1} \right] \cdot |a_k| \cdot \|x\|^k \\ &\quad = \left| R(|t| + |h|) - R(|t|) - |h| \cdot \dot{R}(|t|) \right| \end{aligned}$$

wobei R die Potenzreihe

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(|a_k| \cdot \|x\|^k \right) \lambda^k$$

mit Konvergenzradius $\frac{\rho}{\|x\|}$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Aus Analysis I wissen wir, dass $\exists \delta > 0 : \forall |h| < \delta$

$$\left| R(|t|+h) - R(|t|) - h \cdot \dot{R}(|t|) \right| < \varepsilon |h|$$

Damit gilt für $|h| < \delta$

$$\frac{\|P_{\mathscr{A}}((t+h)x) - P_{\mathscr{A}}(tx) - h \cdot x \cdot Q_{\mathscr{A}}(tx)\|}{|h|} \leq \frac{|R(|t|+|h|) - R(|t|) - |h| \cdot \dot{R}(|t|)|}{h} \leq \varepsilon$$

das heisst, $P_{\mathscr{A}}(tx)$ ist differenzierbar in t mit Ableitung $x \cdot Q_{\mathscr{A}}(tx)$. (QED)

In $\mathbb{R}$ gilt für $|z| < 1$

$$(1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Was heisst das in $\mathscr{A}$?

Definition: Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra.
Ein Element $x \in \mathscr{A}$ heisst *invertierbar*, wenn ein $y \in \mathscr{A}$ existiert, so dass

$$x \cdot y = y \cdot x = \mathbf{1} \tag{1}$$

Ist x invertierbar, so ist dieses y durch (1) eindeutig bestimmt. Es heisst *Inverse* von x und wird mit x^{-1} bezeichnet.
Die Teilmenge

$$\mathscr{A}^\star := \{x \in \mathscr{A} \mid x \text{ ist invertierbar}\}$$

ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation in $\mathscr{A}$.

Übung: Seien $x, y \in \mathscr{A}^\star$, dann ist $x \cdot y \in \mathscr{A}^\star$ und

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

Lösung: $x \cdot y$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \exists$ Inverse $(x \cdot y)^{-1}$.
Setze $(x \cdot y)^{-1} := y^{-1} \cdot x^{-1}$

$$\Rightarrow (x \cdot y) \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot (y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} = x \cdot \mathbf{1} \cdot x^{-1} = \mathbf{1}$$

$\Rightarrow x \cdot y$ ist invertierbar und die Inverse $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$
$\Rightarrow x \cdot y \in \mathscr{A}^\star$.

Bespiel: Für $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ wissen wir aus der Linearen Algebra, dass gilt

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ist invertierbar} \quad &\Leftrightarrow \quad A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ ist bijektiv} \\ &\Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^{n\times n})^\star = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$

Geometrische Reihe: Wir betrachten

$$G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

mit Konvergenzradius $\rho = 1$. Für $x \in \mathscr{A}$ mit $\|x\| < 1$ gilt nun $(\mathbf{1} - x) \in \mathscr{A}^\star$ mit

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = G_{\mathscr{A}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - x) G_{\mathscr{A}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \mathbf{1} \\ G_{\mathscr{A}}(x)(\mathbf{1} - x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Lemma 7: Sei $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra. Dann ist die Menge $\mathscr{A}^\star \subset \mathscr{A}$ offen und die Abbildung

$$\mathscr{A}^\star \to \mathscr{A}^\star : x \mapsto x^{-1}$$

ist stetig.

Beweis: Sei $a \in \mathscr{A}^\star$ und $x \in B_\varepsilon(a)$, wobei $\varepsilon \leq \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, das heisst $\|x - a\| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \|\mathbf{1} - a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\| < 1$$

Damit gilt: $a^{-1}x \in \mathscr{A}^\star$ ($\rightarrow$ Geometrische Reihe)
Also gilt auch (Übung):

$$a \cdot (a^{-1}x) = x \in \mathscr{A}^\star \qquad x^{-1} = (a^{-1}x)^{-1}a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1} - a^{-1}x)^k a^{-1}$$

Zusätzlich erhalten wir $\forall x \in B_\varepsilon(a)$

$$\begin{aligned}
\|x^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{1} - a^{-1}x)^k a^{-1} \right\| \\
&\leq \|a^{-1}\| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{1} - a^{-1}x\|^k \\
&= \|a^{-1}\| \cdot \frac{\|\mathbf{1} - a^{-1}x\|}{1 - \|\mathbf{1} - a^{-1}x\|} \\
&\leq \frac{\|a^{-1}\| \cdot \|a - x\|}{1 - \|a^{-1}\| \cdot \|a - x\|}
\end{aligned}$$

Damit ist $(\cdot)^{-1}$ stetig in a, also stetig, da a beliebig gewählt wurde. (QED)

Das Produkt von Reihen: Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathscr{A}$, so dass die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ absolut konvergieren.
Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$z_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot y_{n-k}$$

Übung: Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} y_j \right)$$

Hinweis: Die Analoge Aussage für komplexe Zahlen wurde in Analysis I bewiesen.

Die Exponential-Funktion: Sei $\mathscr{A}$ eine Banach-Algebra. Die Potenzreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat Konvergezradius $\rho = \infty$. Damit ist

$$\exp := \exp_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{A} : x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert und Lipschitz-stetig (nach Lemma 6). Mit Hilfe des Produktes von Reihen kann (analog zu $\mathscr{A} = \mathbb{C}$) für $x, y \in \mathscr{A}$ die Formel

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

gezeigt werden.
Es gilt $\forall x \in \mathscr{A}$ $\exp(x) \in \mathscr{A}^\star$ mit $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$ (da $\exp(0) = \mathbf{1}$). Es folgt weiter, dass für jedes $x \in \mathscr{A}$ die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathscr{A} : t \mapsto \exp(tx)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, der nach Lemma 6 differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tx) = x \cdot \exp(tx)$$

10.3 Kompakte Mengen

Definition: Sei X eine Menge.
Eine Familie von Teilmengen $\{U_i\}_{i \in I}$ (das heisst $\forall i \in I$ $U_i \subset X$) heisst *Überdeckung von* X, falls

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X heisst *endlich*, falls die Indexmenge endlich ist.
Eine *Teilüberdeckung* (einer Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X) ist eine Teilfamilie $\{U_i\}_{i \in J}$ mit $J \subset I$, die selbst eine Überdeckung von X ist

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Sei (X, d) ein Metrischer Raum.
Eine *offene Überdeckung* ist eine Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$, die aus offenen Mengen besteht. Das heisst $\forall i \in I$ ist $U_i \subset X$ offen in (X, d).

Definition: Ein metrischer Raum (X, d) heisst *totalbeschränkt*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, ..., x_m \in X$ existieren, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x_i) = X$$

gilt, wobei $B_\varepsilon(x_i) = \{x \in X \mid d(x, x_i) < \varepsilon\}$ der offene Ball um x_i mit Radius ε ist.

Satz 8: Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann sind folgende Aussagen Äquivalent:

i) (X, d) ist folgen-kompakt (das heisst, jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge)

ii) Jede offene Überdeckung von (X, d) hat eine endliche Teilüberdeckung (*überdeckungs-kompakt*)

iii) (X, d) ist vollständig (das heisst, jede Cauchy-Folge konvergiert) und ist totalbeschränkt

Beweis: Siehe weiter unten.

Übung: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum mit kompaktem *Einheitsball*

$$B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

dann ist X endlich-dimensional.

Das heisst, dass in unendlich-dimensionalen Räumen das Heine-Borel Kompaktheitskriterium nicht gilt. Das wiederum heisst, dass es dann abgeschlossene und beschränkte Teilmengen gibt, die nicht kompakt sind.

Hinweis:

1) Zeige, dass jeder endlich-dimensionale Unterraum $W \subset X$ abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$ ist

2) Sei $W \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $x \in X \setminus W$. Zeige, dass
$$d(x, W) := \inf_{w \in W} \|x - w\| > 0$$

3) Sei $W \subsetneq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeige, dass ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $d(x, W) \geq \frac{1}{2}$ existiert
Dazu wähle $x_0 \in X \setminus W$ und wähle $w_0 \in W$ mit $\|x_0 - w_0\| \leq 2d(x_0, W)$.
Definiere
$$x := \frac{x_0 - w_0}{\|x_0 - w_0\|}$$

4) Annahme: Die Dimension von X ist nicht endlich. Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ existiert. So eine Folge kann keine konvergente Teilfolge haben

Der Satz von Arzela-Ascoli ist nun ein wichtiges kompaktheits-Kriterium für Teilmengen des Raumes der stetigen Funktionen.
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $\mathscr{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ der Raum der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Aus Analysis I wissen wir, dass
$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$
eine Norm (*Supremums-Norm*) auf $\mathscr{C}(X)$ definiert, so dass $(\mathscr{C}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum wird (also ein vollständiger, normierter Vektorraum). Zudem ist jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig (da (X, d) kompakt ist).

Definition: Eine Teilmenge $K \subset \mathscr{C}(X)$ heisst *gleichgradig stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\forall f \in K\, \forall x, y \in X$
$$d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Übung:

1) Jede endliche Teilmenge von $\mathscr{C}(X)$ ist gleichgradig stetig

2) Für jedes $c > 0$ ist die Teilmenge
$$K_c := \left\{ f \in \mathscr{C}(X) \;\middle|\; \|f\| \leq c,\, \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \leq c \right\}$$
abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig

3) Finde eine Folge in $\mathscr{C}(X)$, die beschränkt und nicht gleichgradig stetig ist

Satz 9 (Arzela-Ascoli): Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum.
Eine Teilmenge $K \subset \mathscr{C}(X)$ ist genau dann kompakt bezüglich der Supremums-Norm $\|\cdot\|$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

i) K ist abgeschlossen

ii) K ist beschränkt

iii) K ist gleichgradig stetig

Beweis:

- "$\Rightarrow$": Da die Menge K kompakt ist, ist sie auch beschränkt und abgeschlossen (Analysis I, Kapitel 5, Lemma 6).

  Zu zeigen: Gleichgradigkeit
  Sei $\varepsilon > 0$. Da K nach Satz 8 totalbeschränkt ist, existieren $f_1, ..., f_n \in K$ mit

  $$\bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(f_1) = K \tag{1}$$

  Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ existiert ein $\delta_i > 0$:

  $$d(x,y) < \delta_i \;\Rightarrow\; |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

  (gleichmässig stetig).
  Setze

  $$\delta := \min_{i \in \{1,...,n\}} d_i$$

  Wähle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ und $f \in K$.
  $\Rightarrow$ Wegen (1) existiert ein $i \in \{1, ..., n\}$ mit

  $$\|f - f_i\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

  das heisst $\forall x, y \in X$

  $$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_i(x)|}_{(3)} + \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{(2)} + \underbrace{|f_i(y) - f(y)|}_{(3)} < \varepsilon$$

- "$\Leftarrow$": Sei $K \subset \mathscr{C}(X)$ abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig. Wir zeigen die Kompaktheit von K in 4 Schritten:

  1) *Behauptung:* $\exists$ Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X : \forall \delta > 0 \, \exists m(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

  $$\bigcup_{k=1}^{m(\delta)} B_\delta(x_k) = X$$

  Beweis: Induktive Konstruktion
  Wegen Satz 8 ist (X, d) totalbeschränkt, da X kompakt ist.

  * $k = 1$: Für $\delta = 1$ existieren endlich viele Punkte $x_1, ..., x_{m(1)} \in X$, so dass

  $$X = \bigcup_{k=1}^{m(1)} B_1(x_k)$$

  * $k = 2$: Für $\delta = \frac{1}{2}$ existieren $x_{m(1)+1}, ..., x_{m(2)} \in X$, so dass

  $$X = \bigcup_{k=m(1)+1}^{m(2)} B_{1/2}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m(2)} B_{1/2}(x_k)$$

  * $k + 1$: Für $\delta = \frac{1}{n+1}$ existieren $x_{m(n)+1}, ..., x_{m(n+1)} \in X$, so dass

  $$X = \bigcup_{k=m(n)+1}^{m(n+1)} B_{1/(n+1)}(x_k) = \bigcup_{k=1}^{m(n+1)} B_{1/(n+1)}(x_k)$$

  Das heisst, die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist konstruiert für $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n} < \delta$ und setzt $m(\delta) := m(n)$, dann gilt

  $$X \supset \bigcup_{k=1}^{m(\delta)} B_\delta(x_k) \supset \bigcup_{k=1}^{m(n)} B_{1/n}(x_k) = X$$

2) *Behauptung:* $\exists$ Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$: $\forall$ fixen $k \in \mathbb{N}$ der Limes
$$\lim_{i\to\infty}(f_{n_i}(x_k)) \in \mathbb{R}$$
existiert.

Beweis: (Diagonalfolgen-Argument)

∗ $k = 1$: Die Folge reeller Zahlen $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da K beschränkt ist, somit existiert nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge, das heisst, eine strikt monoton steigende Funktion $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass
$$\lim_{i\to\infty} f_{g_1(i)}(x_1)$$
existiert.

∗ $k = 2$: Nun ist die Folge $(f_{g_1(i)}(x_2))_{i\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt und analog existiert eine Funktion $g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die strikt monoton steigend ist, so dass
$$\lim_{i\to\infty}(f_{g_1\circ g_2(i)}(x_2))$$
existiert.

∗ $k + 1$: Die Folge $(f_{g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_k(i)}(x_{k+1}))_{i\in\mathbb{R}}$ ist beschränkt, und damit existiert die Funktion $g_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die strikt monoton wachsend ist, so dass
$$\lim_{i\to\infty}(f_{g_1\circ\ldots\circ g_{k+1}(i)}(x_{k+1}))$$
existiert.

Definiere nun $n_i := g_1 \circ \ldots \circ g_i(i)$ für $i \in \mathbb{N}$, dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_{n_i}(x_k))_{i\geq k}$ eine Teilfolge von
$$(f_{g_1\circ\ldots\circ g_k(i)}(x_k))_{i\in\mathbb{N}}$$
und damit konvergent.

3) *Behauptung:* $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit $\exists\delta > 0 : \forall f \in K\, \forall x, y \in X$
$$d(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$
Nach Schritt 1 existiert $m(\delta) =: m \in \mathbb{N}$ mit
$$\bigcup_{k=1}^{m} B_\delta(x_k) = X \tag{2}$$
Wegen Schritt 2 und dem Cauchy-Kriterium existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k \in \{1, ..., m\}\, \forall i, j \geq N$
$$|f_i(x_k) - f_j(x_k)| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$
Behauptung: $\forall i, j > N$
$$\|f_i - f_j\| = \sup_{x\in X} |f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon$$
Beweis: Seien $i, j \geq N$, sei $x \in X$. Wegen (2) $\exists k \in \{1, ..., m\}$:
$$d(x, x_k) \leq \delta \tag{4}$$

damit folgt $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_j(x)| \quad &\leq \quad \underbrace{|f_i(x) - f_i(x_k)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|f_i(x_k) - f_j(x_k)|}_{<\varepsilon/3} \\ &\quad + \underbrace{|f_j(x_k) - f_j(x)|}_{<\varepsilon/3} \quad < \quad \varepsilon \end{aligned}$$

4) *Behauptung:* $\exists f \in K$ mit $f_{n_i} \underset{i\to\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} f$.

Beweis: Da $(\mathscr{C}(X), \|\cdot\|)$ vollständig ist $\exists f \in \mathscr{C}(X)$ mit

$$f_{n_i} \underset{i\to\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} f$$

Da K abgeschlossen und $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ ist, gilt

$$f \in K$$

Insgesammt haben wir gezeigt, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt. (QED)

Beweis von Satz 8:

- i) $\Rightarrow$ ii): Sei $O = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X, das heisst $O \subset J_{(X,d)} := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$

Zu zeigen: O hat eine endliche Teilüberdeckung.

1) *Behauptung:* $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in X\, \exists U \in O$ mit

$$B_\varepsilon(x) \subset U \tag{1}$$

Beweis: Annahme: $\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in X : \forall U \in O$

$$B_\varepsilon(x) \not\subset U$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in X$ $(\varepsilon_n = \frac{1}{n})$, so dass $\forall U \in O$

$$B_{1/n}(x_n) \not\subset U \tag{2}$$

Da (X, d) folgenkompakt ist $\exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $x_0 \in X$ mit

$$x_{n_j} \underset{j\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} x_0 \tag{3}$$

Wähle ein $U_0 \in O$ mit $x_0 \in U_0$. Da U_0 offen ist $\exists \varepsilon_0 > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset U_0 \tag{4}$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : \forall i \geq N$

$$d(x_{n_i}, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{5}$$

Wähle nun ein $i \geq N$, so dass $\frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon_0}{2}$, dann gilt

$$B_{1/n_i}(x_{n_i}) \subset B_{\varepsilon_0/2}(x_{n_i}) \overset{(5)}{\subset} B_{\varepsilon_0}(x_0) \overset{(4)}{\subset} U_0$$

$\rightarrow$ Widerspruch zu (2), also muss (1) gelten

2) *Behauptung:* O hat eine endliche Teilüberdeckung

Beweis: Annahme: O hat keine endliche Teilüberdeckung.
Sei $\varepsilon > 0$ aus Schritt 1 gewählt.
Konstruiere induktiv die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O$:

* $n = 1$: Wähle $x_1 \in X$ beliebig. Nach Schritt 1 $\exists U_1 \in O$ mit
$$B_\varepsilon(x_1) \subset U_1$$
* $n + 1$: Da keine endliche Teilüberdeckung existieren kann, gilt
$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k \neq \varnothing$$
Wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Nach Schritt 1 $\exists U_{n+1} \subset O$ mit
$$B_\varepsilon(x_{n+1}) \subset U_{n+1}$$

Nach Konstruktion gilt $\forall n > m$, $x_n \notin B_\varepsilon(x_m)$, also gilt $\forall n \neq m$
$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$
Also kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen.
$\rightarrow$ Widerspruch zur Folgenkompaktheit!

- ii) $\Rightarrow$ iii):

  1) *Zu zeigen:* (X, d) ist totalbeschränkt.
  Sei $\varepsilon > 0$. Wähle
  $$O_\varepsilon := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X\}$$
  dann existiert eine endliche Teilüberdeckung, also
  $$\bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(x_i) = X$$

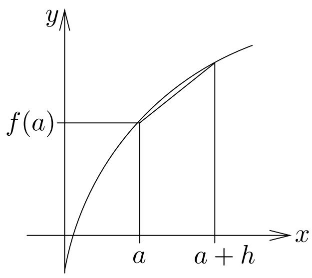
  2) *Zu zeigen:* (X, d) ist vollständig.
  Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d).
  Annahme: (x_n) konvergiert nicht.
  Nach Analysis 1 hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte, das heisst $\forall x \in X\ \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält.
  Die offene Überdeckung
  $$O := \{B_{\varepsilon_x}(x) \mid x \in X\}$$
  kann keine endliche Teilüberdeckung haben.
  $\rightarrow$ Widerspruch zur Überdeckungskompaktheit.

- iii) $\Rightarrow$ i): ? (QED)

11 Differenzierbare Abbildungen

Erinnerung: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f ist *differenzierbar an der Stelle* $a \in I$ und $f'(a) = A$, genau dann wenn

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 < |h| < \delta \quad &\Rightarrow \quad \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A \right| < \varepsilon \\ 0 < |h| < \delta \quad &\Rightarrow \quad \left| \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} \right| < \varepsilon \\ 0 < |h| < \delta \quad &\Rightarrow \quad \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} < \varepsilon \end{aligned}$$

genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}$

$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad a + h \in I \text{ und } \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} < \varepsilon$$

Problemstellung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $a \in U$, dann soll die Ableitung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung bzw. eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sein.
Wir bezeichnen die Euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ mit

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} =: \|x\|_{\mathbb{R}^n}$$

für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

11.1 Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $a \in U$.
f heisst *differenzierbar an der Stelle* a, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^n$

$$0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \Rightarrow \quad a + h \in U \text{ und } \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} < \varepsilon \qquad (1)$$

Bemerkung 1: Die Matrix A ist durch (1) eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine weitere Matrix, die (1) erfüllt.
Dann gilt für $0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$, wobei $\delta > 0$ so gewählt ist, dass A und B (1) erfüllen:

$$\begin{aligned} \|(A - B)h\|_{\mathbb{R}^m} &= \|Ah + f(a) - f(a+h) + f(a+h) - f(a) - Bh\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \|Ah + f(a) - f(a+h)\|_{\mathbb{R}^m} + \|f(a+h) - f(a) - Bh\|_{\mathbb{R}^m} \\ &< 2\varepsilon \cdot \|h\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^n$

$$0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\|(A-B)h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} < 2\varepsilon \tag{2}$$

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ und $t > 0$, dann ist $\|tv\| = t$

$$\Rightarrow \|(A-B)v\| = \lim_{t \to 0} \frac{\|(A-B)tv\|}{\|tv\|} = 0$$

was (2) entspricht.
$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$

$$(A-B)v = 0$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$Av = Bv \Rightarrow A = B$$

(QED)

Definition: Die Matrix (bzw. lineare Abbildung) A in (1) heisst *Ableitung von f an der Stelle a.*

Bemerkung 2: Sei $h := e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ der i-te Standard-Basisvektor im $\mathbb{R}^n$.
Es gilt:

$$\mathrm{d}f(a)e_i = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(a + te_i)$$

Wähle $r > 0$, so dass $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\} \subset U$, dann gilt $\forall t \in (-r, r)$

$$a + te_i \in U$$

Wir definieren $\varphi_i : (-r, r) \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\varphi_i(t) := f(a + te_i)$$

Behauptung: φ_i ist differenzierbar an der Stelle $t = 0$ und

$$\varphi_i'(0) = \mathrm{d}f(a)e_i$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(0)}{t} - \mathrm{d}f(a)e_i \right\| &= \frac{\|\varphi_i(t) - \varphi_i(0) - \mathrm{d}f(a)te_i\|}{\|te_i\|} \\
&= \frac{\|f(a + te_i) - f(a) - \mathrm{d}f(a)te_i\|}{\|te_i\|} \\
&\overset{t \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Bemerkung 3: Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar an der Stelle $a \in U$.
$\Rightarrow f$ ist stetig an der Stelle a.

Beweis: Sei $A := \mathrm{d}f(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\varepsilon > 0$.
Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall h \in \mathbb{R}$

$$0 < \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(a+h) - f(a) - Ah\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|$$

O.B.d.A. sei

- $\delta \leq 1$
- $\delta \|A\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|A\| := \sup_{h \neq 0} \frac{\|Ah\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \qquad \|Ah\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\| \cdot \|h\|_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow$ Für jedes $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\|f(a+h)-f(a)\| &\leq \|f(a+h)-f(a)-Ah\| + \|Ah\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\|h\|}_{\leq 1} + \underbrace{\|A\|\cdot\|h\|}_{<\varepsilon/2} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$f(x) = Ax + b$$

wobei $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, das heisst

$$f(a+h) - f(a) = A(a+h) + b - (Aa+b) = Ah$$

$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}f(a) = A$$

Beispiel 2: Sei $Q = Q^T = (q_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $(q_{ij} = q_{ji})$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_i x_j$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x) &= \frac{1}{2}(x+h)^T Q(x+h) - \frac{1}{2}x^T Qx \\ &= \frac{1}{2}(x^T Qx + x^T Qh + h^T Qx + h^T Qh) - \frac{1}{2}x^T Qx \\ &= x^T Qh + \frac{1}{2}h^T Qh \\ A := x^T Q &= \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \ldots & q_{nn}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i q_{i1} & \ldots & \sum_{i=1}^n x_i q_{in}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}\end{aligned}$$

$\to$ Zeilen-Vektor

$$\begin{aligned}\frac{|f(x+h)-f(x)-Ah|}{\|h\|} &= \frac{|h^T Qh|}{2\,\|h\|} \\ &= \frac{|\langle h, Qh\rangle|}{2\,\|h\|} \\ &\leq \frac{\|h\|\cdot\|Qh\|}{2\,\|h\|} \\ &= \frac{\|Qh\|}{2} \\ &\leq \frac{\|Q\|\cdot\|h\|}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar und $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}f(x) = x^T Q$$

Behauptung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $a \in U$. Wähle $r > 0$, so dass $B_r(a) \subset U$. Sei $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\rho := \frac{r}{\|h\|}$
$\Rightarrow \forall t \in (-\rho, \rho)$

$$a + th \in U$$

Wir definieren $\varphi : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\varphi(t) := f(a + th)$$

Wenn f an der Stelle a differenzierbar ist, so ist φ an der Stelle $t = 0$ differenzierbar und

$$\varphi'(0) = \mathrm{d}f(a)h \in \mathbb{R}^m$$

Definition: Wir nennen den Limes

$$\partial_h f(a) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(a + th) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

die *Richtungsableitung von f an der Stelle a in Richtung h* (falls dieser Limes existiert).

Lemma 1: Wenn f an der Stelle $a \in U$ differenzierbar ist, so existieren alle Richtungsableitungen von f an der Stelle a und es gilt $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_h f(a) = \mathrm{d}f(a)h$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f(a + th) - f(a)}{t} - \mathrm{d}f(a)h \right\| &= \frac{\|f(a + th) - f(a) - t\,\mathrm{d}f(a)h\|}{\|th\|} \cdot \|h\| \\
&\xrightarrow{t \to 0} 0 \\
\Rightarrow \mathrm{d}f(a)h &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(a + th) \\
&= \partial_h f(a)
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } x = 0 = y \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(tx, ty) &= \frac{t^3 x^2 y}{t^2 x^2 + t^2 y^2} \\
&= t\,\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\
&= t\,f(x, y) \\
\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(tx, ty) - f(0, 0)}{t} &= f(x, y) \\
\Rightarrow \partial_{(x,y)} f(0, 0) &= f(x, y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \partial_{(x,y)} f(0, 0)$$

ist nicht linear!
$\Rightarrow$ Die Funktion f ist nicht differenzierbar an der Stelle $(0, 0)$ (obwohl alle Richtunsableitungen an dieser Stelle existieren).

Definition: Seien e_i, $i = 1, ..., n$ die Standard-Basisvektoren im $\mathbb{R}^n$.
Die Richtungsableitung $\partial_{e_i} f(a)$ heisst *i-te partielle Ableitung von f an der Stelle a.*

Bezeichnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) := \partial_{e_i} f(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(a + te_i)$$

Bemerkung: Sei f differenzierbar an der Stelle a.
$\overset{\text{Lem1}}{\Rightarrow}$ Alle partiellen Ableitungen $\partial_i f(a)$ existieren an der Stelle a und

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a) e_i$$

ist die i-te Spalte der Matrix $\mathrm{d}f(a)$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), ..., \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Sei

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$$

$$\partial_h f(a) = \mathrm{d}f(a) h = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \mathrm{d}f(a) e_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \partial_i f(a)$$

Wir betrachten $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$

$$f(a + te_i) = f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n)$$

das heisst, die i-te Partielle Ableitung von f an der Stelle a erhalten wir, indem wir die Koordinaten $x_j = a_j$ für $j \neq i$ festhalten und damit f nur noch als Funktion von x_i betrachten und an der Stelle a_i differenzieren.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \sin xe^y + x^2 y^3$$

Die Partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos xe^y + 2xy^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin xe^y + 3x^2 y^2 \\ \mathrm{d}f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad f_i : U \to \mathbb{R}^m$$

Übung: f ist an der Stelle a differenzierbar, genau dann wenn $f_j : U \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle a differenzierbar ist für $j = 1, ..., m$.

$$\mathrm{d}f(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

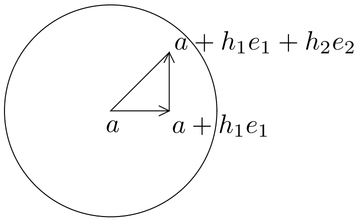
Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Sei $r > 0$, so dass $B_r(a) \subset U$.
Wir nehmen an, dass die partiellen Ableitungen $\partial_i f(x)$, $i = 1, ..., n$ an jeder Stelle $x \in B_r(a)$ existieren und dass die Funktionen $\partial_i f : B_r(a) \to \mathbb{R}^m$ stetig sind an der Stelle a für $i = 1, ..., n$.
$\Rightarrow$ Die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar an der Stelle a und es gilt

$$\mathrm{d}f(a) = (\partial_1 f(a), ..., \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Beweis:

- 1. Fall: $m = 1$
  Betrachte $\partial_i f : B_r(a) \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.
  Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < r$, so dass $\forall h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$0 < \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\partial_i f(a+h) - \partial_i f(a)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad i = 1, ..., n$$



Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ a_1 &:= a + h_1 e_1 \\ a_2 &:= a + h_1 e_1 + h_2 e_2 \\ &\vdots \\ a_k &:= a + \sum_{i=1}^{k} h_i e_i = a_{k-1} + h_k e_k \\ a_n &:= a + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i = a + h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(a+h) - f(a) &= f(a_n) - f(a_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(a_k) - f(a_{k-1}) \end{aligned}$$

Sei

$$\varphi_k(t) := f(a_{k-1} + te_k)$$

dann gilt

$$f(a_k) - f(a_{k-1}) = \varphi_k(h_k) - \varphi_k(0)$$

Nehmen wir an, dass $h_k > 0$, dann gilt $a_{k-1} + te_k \in B_\delta(a)$ $\forall t \in [0, h_k]$.
$\Rightarrow$ Nach Voraussetzung von Satz 1 ist die Funktion

$$\varphi_k : [0, h_k] \to \mathbb{R}$$

differenzierbar (ähnlich für $h_k < 0$).
$\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow}$ $\exists \tau_k \in [0, h_k]$, so dass

$$\varphi_k'(\tau_k) = \frac{\varphi(h_k) - \varphi(0)}{h_k}$$

(geht nur mit $m = 1$).
Wir wissen
$$\varphi_k'(t) = \partial_k f(a_{k-1} + te_k)$$
$\Rightarrow$ Wir können schreiben
$$\begin{aligned} f(a_k) - f(a_{k-1}) &= \varphi_k(h_k) - \varphi_k(0) \\ &= \varphi_k'(\tau_k)h_k \\ &= \partial_k f(a_{k-1} + \tau_k e_k)h_k \end{aligned}$$
Oben eingesetzt folgt
$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{k=1}^{n} (f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f(a_{k-1} + \tau e_k) \end{aligned}$$
Sei $A := (\partial_1 f(a), ..., \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, dann gilt
$$\begin{aligned} |f(a+h) - f(a) - Ah| &= \left| \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f(a_{k-1} + \tau_k e_k) - \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f(a) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n} h_k \left(\partial_k f(a_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(a) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|h_k|}_{\leq \|h\|} \cdot |\partial_k f(a_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(a)| \\ &\leq \|h\| \cdot \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|\partial_k f(a_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(a)|}_{<\varepsilon/n} \\ &< \|h\|\varepsilon \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a_{k-1} + \tau_k e_k - a\| &= \left\| a + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + \tau_k e_k - a \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + \tau_k e_k \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{k-1} \\ \tau_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} h_i^2 + \tau_k^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} h_i^2} \\ &\leq \|h\| < \delta \end{aligned}$$
Wir haben also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden, so dass $\forall h \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$0 < \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad a + h \in U \text{ und } \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{\|h\|} < \varepsilon$$

- Fall 2: $m > 1$
  Alle partiellen Ableitungen von $f = (f_1, \dots, f_m)$ existieren in $B_r(a)$ und sind stetig an der Stelle a.
  $\Rightarrow$ Gleiches gilt für f_j, $j = 1, ..., m$
  $\Rightarrow$ Nach Fall 1 ist f_j differenzierbar an der Stelle a für $j = 1, ..., m$
  Sei $A_j := \mathrm{d}f_j(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$
  $$\Rightarrow \lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f_j(a+h) - f_j(a) - A_j h|}{\|h\|} = 0$$

$$Ah := \begin{pmatrix} A_1 h \\ \vdots \\ A_m h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a)-Ah &= \begin{pmatrix} f_1(a+h)-f_1(a)-A_1 h \\ \vdots \\ f_m(a+h)-f_m(a)-A_m h \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \|f(a+h)-f(a)-Ah\|_{\mathbb{R}^m} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |f_j(a+h)-f_j(a)-A_j h|^2} \\
\Rightarrow \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{|f_j(a+h)-f_j(a)-A_j h|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}\right)^2} \\
(\|h\| \to 0) &\to 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}f(a) = A = \begin{pmatrix} \mathrm{d}f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(a) \end{pmatrix}$$

(QED)

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst *stetig differenzierbar*, wenn f an jeder Stelle $a \in U$ differenzierbar ist und die Abbildung

$$\mathrm{d}f : U \to \mathbb{R}^{m\times n} : a \mapsto \mathrm{d}f(a)$$

stetig ist (bezüglich jeder beliebigen Norm).

Korollar: $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist stetig differenzierbar, genau dann wenn alle partiellen Ableitungen

$$\partial_i f_j : U \to \mathbb{R} \quad i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m$$

in ganz U existieren und stetig sind.

11.2 Komplexe Ableitungen

Sei $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) =: (u(x, y), v(x, y))$$

$$u, v : U \to \mathbb{R} \qquad \mathrm{d}f(x, y) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$

$$(x, y) \rightsquigarrow x + iy = z$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.
$f : U \to \mathbb{C}$ heisst *komplex differenzierbar an der Stelle* $z_0 \in U$, wenn der Limes

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existiert. Dieser limes (wenn er existiert) heisst *komplexe Ableitung von f an der Stelle z_0* und wird mit $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

Beispiel:

- $f(z) = z^k$
$$f'(z) = kz^{k-1} \quad k \in \mathbb{Z}$$
- $f(z) = e^z$
$$f'(z) = e^z$$
- $f(z) = \log z$
$$f'(z) = \frac{1}{z}$$
- $f(z) = \overline{z}$
$$f'(z) \quad \to \quad \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = \frac{\overline{h}^2}{|h|^2}$$
konvergiert nicht, für $h \to 0$, ist also nicht komplex differenzierbar.

Satz 2: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ und
$$u, v : U \to \mathbb{R} \qquad f = u + iv : U \to \mathbb{C}$$
$\Rightarrow$ Äquivalent sind:

(i) f ist komplex differenzierbar an der Stelle z_0

(ii) u und v sind differenzierbar an der Stelle z_0 und
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \tag{1}$$
$\to$ Cauchy-Riemann Gelichungen.

Beweis: Sei $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.
f ist differenzierbar an der Stelle z_0 und die Ableitung ist $f'(z_0) = A + iB$, genau dann wenn
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - (A+iB) \right|^2 \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - (A+iB)h|^2}{|h|^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|u(z_0+h) - u(z_0) - \operatorname{Re}((A+iB)h)|^2}{|h|^2} \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{|v(z_0+h) - v(z_0) - \operatorname{Im}((A+iB)h)|^2}{|h|^2} \end{aligned}$$
genau dann, wenn u und v an der Stelle z_0 differenzierbar sind und $\forall h \in \mathbb{C}$
$$\mathrm{d}u(z_0)h = \operatorname{Re}((A+iB)h) \qquad \mathrm{d}v(z_0)h = \operatorname{Im}((A+iB)h) \tag{2}$$
genau dann, wenn $\forall h = \xi + i\eta$ (und damit $\forall \xi, \eta$)
$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(z_0)h = \operatorname{Re}((A+iB)h) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(y_0)\eta = A\xi - B\eta \\ \mathrm{d}v(z_0)h = \operatorname{Im}((A+iB)h) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\eta = B\xi + A\eta \end{aligned}$$
genau dann wenn
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = A \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = B \tag{3}$$
(QED)

Bemerkung: $f'(z_0) = A + iB$ ist die komplexe Ableitung.

$$\mathrm{d}f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\xi + i\eta \mapsto (A + iB)(\xi + i\eta) \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, dann heisst $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph* (oder (komplex) analytisch), wenn f an jeder Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist und $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig ist.

11.3 Rechenregeln

Satz 3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$.
Seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ beide differenzierbar an der Stelle a und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ Die Abbildungen $f + g$ und λf sind differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}(f+g)(a) = \mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}g(a) \qquad \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a)$$

Beweis: Definiere $A := \mathrm{d}f(a)$, $B := \mathrm{d}g(a)$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{aligned} &\frac{\|(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - (A+B)h\|}{\|h\|} \\ \leq \quad & \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} + \frac{\|g(a+h) - g(a) - Bh\|}{\|h\|} \\ \xrightarrow{h\to 0} \quad & 0 \end{aligned}$$

(QED)

Satz 4 (Kettenregel): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g : V \to \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion und $f(U) \subset V$. Sei weiter f differenzierbar an der Stelle $a \in U$ und g differenzierbar an der Stelle $b = f(a) \in V$.
$\Rightarrow$ Die Abbildung $g \circ f : U \to \mathbb{R}^\ell$ ist differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \cdot \mathrm{d}f(a) \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Es gilt

$$\mathrm{d}f(a) \in \mathbb{R}^{m\times n} =: A \qquad \mathrm{d}g(b) \in \mathbb{R}^{\ell\times m} =: B$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^\ell}_{AB \overset{!}{=} \mathrm{d}(g\circ f)(a)}$$

Beweis: Setze $x = a + h$, $y = f(x)$
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $\rho > 0$, so dass $\forall y \in \mathbb{R}^m$

$$\|y - b\| < \rho \quad \Rightarrow \quad y \in V \text{ und } \|g(y) - g(b) - B(y-b)\| < \frac{\varepsilon \|y - b\|}{2(1 + \|A\|)}$$

Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in U \text{ und } \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| &\leq \frac{\varepsilon \|x - a\|}{2(\varepsilon + \|B\|)} \\ &\leq \|x - a\| \end{aligned}$$

O.B.d.A.:

$$\delta < \frac{\rho}{1 + \|A\|}$$

Sei also $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|x-a\| < \delta$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|f(x)-f(a)\| &= \|f(x)-f(a)-A(x-a)+A(x-a)\| \\
&\leq \|f(x)-f(a)-A(x-a)\| + \|A(x-a)\| \\
&\leq (1+\|A\|)\|x-a\| \\
&< (1+\|A\|)\delta \\
&< \rho
\end{aligned}$$

Also gilt $\|f(x)-b\| < \rho$ und damit

$$\begin{aligned}
\|g(f(x))-g(b)-B(f(x)-b)\| &< \frac{\varepsilon\|f(x)-f(a)\|}{2(1+\|A\|)} \\
&< \frac{\varepsilon\|x-a\|}{2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt schliesslich

$$\begin{aligned}
&\|g\circ f(x) - g\circ f(a) - BA(x-a)\| \\
&= \|g(\underbrace{f(x)}_{y}) - g(\underbrace{f(a)}_{b}) - B(y-b) + B(f(x)-f(a)-A(x-a))\| \\
&\leq \|g(y)-g(b)-B(y-b)\| + \|B\|\cdot\|f(x)-f(a)-A(x-a)\| \\
&< \frac{\varepsilon\|x-a\|}{2} + \|B\|\,\frac{\varepsilon\|x-a\|}{2(\varepsilon+\|B\|)} \\
&\leq \varepsilon\|x-a\|
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in U$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (f_1(x), ..., f_m(x)) \in V \\
&= (y_1, ..., y_m) = y \\
g(y) &= (g_1(y), ..., g_\ell(y)) \\
&= (z_1, ..., z_\ell)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g(b)\cdot\mathrm{d}f(a) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_\ell}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_\ell}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_\ell}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(a) & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_\ell}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{d}(g\circ f)(a)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(g_k\circ f)(a)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) =: \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b) =: \frac{\partial z_k}{\partial y_j}$$

$$\frac{\partial(g_k\circ f)}{\partial x_i}(a) =: \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Bemerkung:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Jakobi-Matrix

Beispiel 1: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(y) = y_2 \qquad \frac{\partial g}{\partial y_2}(y) = y_1$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2 \qquad g \circ f(x) = f_1(x) f_2(x)$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = f_2(a) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) + f_1(a) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a)$$

$$\mathrm{d}(f_1 \cdot f_2)(a) = \mathrm{d}(g \circ f)(a) = f_1(a) \mathrm{d} f_2(a) + f_2(a) \mathrm{d} f_1(a)$$

Wenn f_1, f_2 differenzierbar sind an der Stelle a, dann folgt auch, dass $f_1 \cdot f_2$ differenzierbar ist an der Stelle a (da $f_1 \cdot f_2 = g \circ f$)

Beispiel 2: $g : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{1}{y}$, $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$
Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle a und $f(x) \neq 0 \ \forall x \in U$
$\Rightarrow \frac{1}{f} = g \circ f$ ist differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = g'(f(a)) \mathrm{d} f(a) = \frac{1}{f(a)^2} \mathrm{d} f(a)$$

Satz 5: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in U$. Dann gilt:

(i) $f \cdot g$ ist differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}(f \cdot g)(a) = f(a) \mathrm{d} g(a) + g(a) \mathrm{d} f(a) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

(ii) Wenn $g(a) \neq 0$ ist, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) \mathrm{d} f(a) - f(a) \mathrm{d} g(a)}{g(a)^2}$$

Beweis:

(i) Folge aus Beispiel 1

(ii) Nach Beispiel 2 ist $\frac{1}{g}$ differenzierbar an der Stelle a
Nach Beispiel 1 ist $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(a)} \mathrm{d} f(a) + f(a) \mathrm{d}\left(\frac{1}{g}\right)(a)$$

(QED)

Beispiel 3: Sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) := t^t$. Was ist $h'(t)$?
Definiere $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) := x^y = e^{y \log x}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \log x \cdot e^{y \log x} = \log x \cdot x^y$$

$\Rightarrow g$ ist stetig differenzierbar.
Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) := (t, t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(t) &= t^t = g(t, t) = g \circ f(t) \\ \Rightarrow h'(t) &= \frac{\partial y}{\partial x}(f(t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t) \\ &= t \cdot t^{t-1} + \log t \cdot t^t \\ &= (1 + \log t) \cdot t^t \end{aligned}$$

Satz 6: Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $s \in I$, $t \in J$. Sei $\Omega := I \times J \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Wir nehmen an, dass die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \partial_2 f$$

auf ganz Ω existiert und stetig ist.
Seien weiter $a, b : J \to I$ differenzierbar.
$\Rightarrow$ Die Funktion $F : J \to \mathbb{R}^m$ mit

$$F(t) := \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(s,t)\,\mathrm{d}s$$

ist differenzierbar und

$$F'(t) = f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) + \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \partial_2 f(s,t)\,\mathrm{d}s$$

Beweis: Definiere $\Phi : I \times I \times J \to \mathbb{R}^m$ durch

$$\Phi(a,b,c) := \int\limits_a^b f(s,c)\,\mathrm{d}s$$

Behauptung: Φ ist stetig differenzierbar und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}(a,b,c) = -f(a,c) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b}(a,b,c) = f(b,c) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c}(a,b,c) = \int\limits_a^b \partial_2 f(s,c)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

Dann gilt

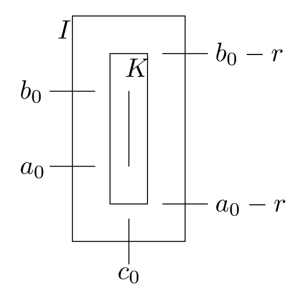
$$F(t) = \Phi(a(t), b(t), t)$$

ist differenzierbar und

$$F'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial a}(a(t),b(t),t)a'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial b}(a(t),b(t),t)b'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a(t),b(t),t)$$

Beweis der Behauptung:

- (1) und (2) gelten nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integral-Rechnung und $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$ sind stetig, da f stetig ist.
- (3): $\varphi := \partial_2 f : I \times J \to \mathbb{R}^m$ ist stetig
$\Rightarrow$ Die Restriktion von φ auf jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega = I \times J$ ist gleichmässig stetig. Wir fixieren $a_0, b_0 \in I$, $c_0 \in J$ und o.B.d.A sei $a_0 < b_0$



$$K := [a_0 - r, b_0 + r] \times [c_0 - r, c_0 + r]$$

wähle dabei r so klein, dass $K \subset \Omega$.
Gegeben sei $\varepsilon > 0$.
Dann existiet ein $\delta > 0$, so dass $\forall (s,t), (s',t') \in K$

$$\left.\begin{array}{l} |s - s'| < \delta \\ |t - t'| < \delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(s,t) - \varphi(s',t')\| < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}$$

o.B.d.A. sei $\delta < r$.
$\Rightarrow \forall h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h < \delta$ und $\forall s \in [a_0, b_0]$ gilt

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{f(s, c_0 + h) - f(s, c_0)}{h} - \varphi(s, c_0) \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\quad = \left\| \frac{1}{h} \int\limits_{c_0}^{c_0+h} \varphi(s,t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h} \int\limits_{c_0}^{c_0+h} \varphi(s,c_0)\,\mathrm{d}t \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\quad \leq \frac{1}{h} \int\limits_{c_0}^{c_0+h} \underbrace{\|\varphi(s,t) - \varphi(s,c_0)\|_{\mathbb{R}^m}}_{< \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0},\ \text{da } |t - c_0| < \delta} \mathrm{d}t \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\left\| \frac{\Phi(a_0, b_0, c_0 + h) - \Phi(a_0, b_0, c_0)}{h} - \int\limits_{a_0}^{b_0} \varphi(s, c_0)\,\mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\quad = \left\| \int\limits_{a_0}^{b_0} \left(\frac{f(s, c_0 + h) - f(s, c_0)}{h} - \varphi(s, c_0) \right) \mathrm{d}s \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\quad \leq \int\limits_{a_0}^{b_0} \underbrace{\left\| \frac{f(s, c_0 + h) - f(s, c_0)}{h} - \varphi(s, c_0) \right\|_{\mathbb{R}^m}}_{< \frac{\varepsilon}{b_0 - a_0}} \mathrm{d}s \\ &\quad < \varepsilon \end{aligned}$$

Genauso für $-\delta < h < 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0, b_0, c_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(a_0, b_0, c_0 + h) - \Phi(a_0, b_0, c_0)}{h} \\ &= \int\limits_{a_0}^{b_0} \varphi(s, c_0)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Stetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ wie vorher. Sei

$$M := \sup_{(s,t) \in K} \|\varphi(s,t)\|_{\mathbb{R}^m}$$

und sei o.B.d.A. $\delta M < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \forall (a,b,c) \in I \times I \times J \text{ mit } |a-a_0| < \delta,\ |b-b_0| < \delta \text{ und } |c-c_0| < \delta \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a,b,c) - \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b_0,c_0) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a,b,c) - \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b,c) \right\| + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b,c) - \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b_0,c) \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b_0,c) - \frac{\partial \Phi}{\partial c}(a_0,b_0,c_0) \right\| \\
&= \left\| \int_{a_0}^{a} \varphi(s,c)\,\mathrm{d}s \right\| + \left\| \int_{b_0}^{b} \varphi(s,c)\,\mathrm{d}s \right\| + \left\| \int_{a_0}^{b_0} (\varphi(s,c) - \varphi(s,c_0))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq M|a-a_0| + M|b-b_0| + \int_{a_0}^{b_0} \underbrace{\|\varphi(s,c) - \varphi(s,c_0)\|}_{<\frac{\varepsilon}{b_0-a_0}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq 2M\delta + \int_{a_0}^{b_0} \frac{\varepsilon}{b_0-a_0}\,\mathrm{d}s \\
&= \underbrace{2M\delta}_{<\varepsilon} + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Sei $f(s,t) := e^{A(t-s)}u(s)$ mit einer stetigen Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \partial_2 f(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} e^{A(t-s)}u(s) = Ae^{A(t-s)}u(s)$$

ist stetig

$$x(t) := \int_0^t e^{A(t-s)}u(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t f(s,t)\,\mathrm{d}s$$

$\Rightarrow x$ ist differenzierbar und

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t,t) + \int_0^t \partial_2 f(s,t)\,\mathrm{d}s = u(t) + A \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)}u(s)\,\mathrm{d}s}_{x(t)}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}u(s)\mathrm{d}s$ ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t) \\
x(0) &= 0
\end{aligned}$$

$\to$ Variation der Konstanten Formel.

Bemerkung:

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Beweis:

i) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, Analysis 1, Kapitel 8, Satz 2

ii) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, Analysis 1, Kapitel 9.2

Lemma 2: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar.
$\Rightarrow \varphi$ erfüllt die Ungleichung (1) mit der euklidischen Norm.

Beweis: Sei

$$x := \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|x\|^2 &= \langle x, x\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m x_i \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^m x_i \cdot \int_a^b \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m x_i \varphi_i(t) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \langle x, \varphi(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{CS}}{\leq} \int_a^b \|x\| \cdot \|\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \|x\| \cdot \int_a^b \|\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t \\
\overset{x \neq 0}{\Rightarrow} \|x\| &\leq \int_a^b \|\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 7: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\varphi : X \times [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig.

$$\Phi(x) := \int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t \qquad x \in X$$

$\Rightarrow \Phi : X \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.

1) $\exists \delta > 0 : \forall x \in X\, \forall t \in [a,b]$

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t)\| < \varepsilon$$

Beweis: Wir nehmen an, dass es kein solches δ gibt
$\Rightarrow \forall \delta > 0\, \exists x \in X\, \exists t \in [a,b]$:

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t)\| \geq \varepsilon$$

$\overset{\delta=\frac{1}{n}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in X\, \exists t_n \in [a,b]$:

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \qquad \|\varphi(x_n, t_n) - \varphi(x_0, t_n)\| \geq \varepsilon$$

o.B.d.A. existiere der Limes

$$\lim_{n\to\infty} t_n =: t_0$$

(Übergang zu einer Teilfolge).

$$\begin{aligned} &\overset{\varphi \text{ stetig}}{\Rightarrow} && \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n, t_n) = \varphi(x_0, t_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_0, t_n) \\ &\Rightarrow && \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|\varphi(x_n, t_n) - \varphi(x_0, t_n)\|}_{\geq \varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Widerspruch!

2) $\forall x \in X$

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| < \varepsilon(b-a)$$

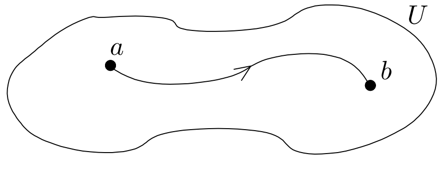
Beweis:

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(x_0) &= \int_a^b (\varphi(x,t) - \varphi(x_0, t))\, \mathrm{d}t \\ \overset{\text{Lem2}}{\Rightarrow} \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| &\leq \int_a^b \underbrace{\|\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t)\|}_{<\varepsilon}\, \mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b \varepsilon\, \mathrm{d}t \\ &= \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

(QED)

Zitat: "So, wir haben ja heute noch gar nichts differenziert! Das geht ja nicht, schliesslich sind wir im Kapitel übers Differenzieren! Na, was differenzieren wir denn da..."

Lemma 3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ($\Leftrightarrow f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$).
Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to U$ eine C^1-Funktion und sei $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.



Wir betrachten nun $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$

$$f(b) - f(a) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f\circ\gamma(\beta)-f\circ\gamma(\alpha) \\ &= \int\limits_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\circ\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(QED)

Lemma 2 und Lemma 3:

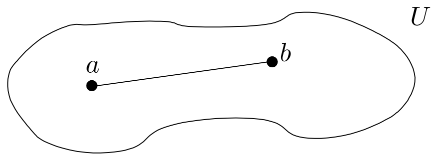
$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f(b)-f(a)\| &\leq \int\limits_\alpha^\beta \|\mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int\limits_\alpha^\beta \|\mathrm{d}f(\gamma(t))\|\cdot\|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2}$$

Für $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ sei hier mit

$$\|A\| := \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

die Matrixnorm bezüglich der Euklidischen Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ bezeichnet.

Beispiel: $\gamma:[0,1]\to U$, $\gamma(t)=a+t(b-a)$



$\Rightarrow \dot\gamma(t)=b-a$

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\Rightarrow} \|f(b)-f(a)\| &\leq \int\limits_0^1 \|\mathrm{d}f(a+t(b-a))\|\cdot\|b-a\|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1}\|\mathrm{d}f(a+t(b-a))\|\cdot\|b-a\| \end{aligned}$$

Sei $f:U\to\mathbb{R}^m\in C^1$ und seien $a,b\in\mathbb{R}^n$, so dass $a+t(b-a)\in U\ \forall t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \|f(b)-f(a)\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}\|\mathrm{d}f(a+t(b-a))\|\cdot\|b-a\| \tag{3}$$

Satz 8 (Schrankesatz, 1. Version): Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $K\subset U$ kompakt und konvex. Sei $f:U\to\mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion. Definiere

$$c_K := \sup_{x\in K}\|\mathrm{d}f(x)\| < \infty$$

$\Rightarrow \forall a,b\in K$

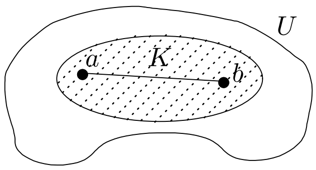
$$\|f(b)-f(a)\| \leq c_K\|b-a\| \tag{4}$$

Beweis: K ist konvex
$\Rightarrow a + t(b-a) \in K \ \forall t \in [0,1]$
$\Rightarrow \|\mathrm{d}f(a+t(b-a))\| \le c_K \ \forall t \in [0,1]$

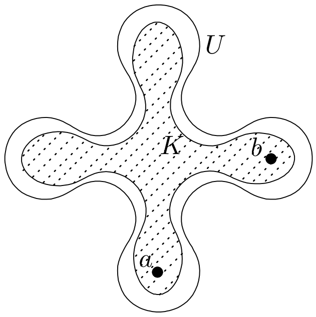
$$\begin{aligned} \overset{(3)}{\Rightarrow} \|f(b)-f(a)\| &\le \int_0^1 \|\mathrm{d}f(a+t(b-a))\|\,\mathrm{d}t \cdot \|b-a\| \\ &\le c_K\|b-a\| \end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Satz 8 gilt bisher aber nur für konvexe Mengen!



Gilt der Satz auch für beliebige kompakte Mengen?



Satz 9 (Schrankensatz, 2. Version): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion.
$\Rightarrow \exists c > 0 : \forall a, b \in K$

$$\|f(b)-f(a)\| \le c\|b-a\|$$

Beweis: Angenommen, es gibt kein solches c
$\Rightarrow \forall c > 0 \,\exists a, b \in K$:

$$\|f(b)-f(a)\| > c\|b-a\|$$

$\overset{c=k\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} \exists$ Folgen $a_k, b_k \in K$, so dass

$$\|f(b_k)-f(a_k)\| > k\|b_k-a_k\| \tag{1}$$

insbesondere gilt $a_k \neq b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\overset{K \text{ kpkt}}{\Rightarrow}$ Durch übergang zu einer Teilfolge können wir Annehmen, dass die Grenzwerte

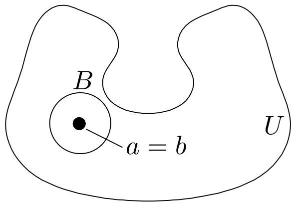
$$\lim_{k\to\infty} a_k =: a \qquad \lim_{k\to\infty} b_k =: b$$

existieren.

Behauptung: $a = b$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|a_k - b_k\| &< \frac{1}{k}\|f(a_k)-f(b_k)\| \\ &\le \frac{1}{k}(\|f(a_k)\| + \|f(b_k)\|) \\ &\le \frac{2}{k}\sup_{x\in K}\|f(x)\| \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$



Wähle $\varepsilon > 0$, so dass

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \varepsilon\} \subset U$$

$\Rightarrow B$ ist kompakt und konvex
$\overset{\text{Sa8}}{\Rightarrow}$ Mit $C := \sup_{x \in B} \|\mathrm{d}f(x)\|$ gilt $\forall x, y \in B$

$$\|f(x) - f(y)\| \quad \leq \quad C\|x - y\|$$

Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall k \geq k_0$, $a_k, b_k \in B$

$$\Rightarrow \|f(a_k) - f(b_k)\| \quad \leq \quad C\|a_k - b_k\| \tag{2}$$

$\rightarrow$ Widerspruch zu (1)! (QED)

Satz 10: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion, $a \in U$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \subset U$
$\Rightarrow \exists$ stetige Funktionen

$$q_i : B_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad i = 1, ..., n$$

so dass $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in B_\varepsilon(a)$

$$f(x) - f(a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} q_i(x) \cdot (x_i - a_i) \tag{3}$$

Beweis: Nach Lemma 3 gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) \quad &= \quad \int_0^1 \mathrm{d}f(a + t(x - a))(x - a)\, \mathrm{d}t \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \cdot \underbrace{\int_0^1 \partial_i f(a + t(x - a))\, \mathrm{d}t}_{q_i(x)} \end{aligned}$$

$q_i(x)$ ist stetig nach Satz 7 mit $\varphi(x, t) := \partial_i f(a + t(x - a))$ und $X = B_\varepsilon(a)$ als Menge. (QED)

Bemerkung (Partielle Umkehrung von Satz 10): Sei $f : B_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., n$, q_i stetig an der Stelle a und es gelte Gleichung (3).
$\Rightarrow f$ ist differenzierbar an der Stelle a und

$$\mathrm{d}f(a)h = \sum_{i=1}^{n} h_i q_i(a)$$

für $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^n h_i q_i(a)\|}{\|h\|} &\overset{(3)}{=} \frac{\|\sum_{i=1}^n h_i q_i(a+h) - h_i q_i(a)\|}{\|h\|} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|\cdot\|q_i(a+h)-q_i(a)\|}{\|h\|} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|q_i(a+h)-q_i(a)\| \\
&\overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

11.4 Mehrfache differenzierbarkeit

Sei $f(x,y) := \cos xe^y + x^3y^4$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\sin xe^y + 3x^2y^4 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos xe^y + 4x^3y^3
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -\sin xe^y + 12x^2y^3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst *2mal stetig differenzierbar*, wenn f stetig differenzierbar ist und die Partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} : U \to \mathbb{R}^m$ alle ebenfalls stetig differenzierbar sind.

Notation:

$$C^2(U,\mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m | f \text{ ist 2mal stetig differenzierbar}\}$$

"f ist C^2" heisst $f \in C^2(U,\mathbb{R}^m)$.

Satz 11: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^2-Funktion.
$\Rightarrow \forall x \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Beweis: o.B.d.A. nehmen wir an, dass $n = 2$ ist, das heisst $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Zu zeigen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\
&= \lim_{\eta\to 0}\frac{f(x,y+\eta)-f(x,y)}{\eta} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\left(\lim_{\eta\to 0}\frac{f(x+\xi,y+\eta)-f(x+\xi,y)}{\eta} - \lim_{\eta\to 0}\frac{f(x,y+\eta)-f(x,y)}{\eta}\right) \\
&= \lim_{\xi\to 0}\lim_{\eta\to 0}\underbrace{\frac{f(x+\xi,y+\eta)-f(x+\xi,y)-f(x,y+\eta)+f(x,y)}{\xi\eta}}_{=:\varphi(\xi,\eta)}
\end{aligned}$$

Genauso erhält man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{\eta\to 0}\lim_{\xi\to 0}\varphi(\xi,\eta)$$

Zu zeigen:

$$\lim_{\xi\to 0}\lim_{\eta\to 0}\varphi(\xi,\eta) = \lim_{\eta\to 0}\lim_{\xi\to 0}\varphi(\xi,\eta)$$

Beweis: Setze

$$a := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{\xi\to 0}\lim_{\eta\to 0}\varphi(\xi,\eta)$$

Behauptung: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{array}{l} 0 < |\xi| < \delta \\ 0 < |\eta| < \delta \end{array} \quad \Rightarrow \quad \|a - \varphi(\xi,\eta)\| < \varepsilon$$

Dann folgt

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Beweis der Folgerung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ wie in der Behauptung gewählt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\eta} - a \right\| &= \left\| a - \lim_{\xi\to 0}\varphi(\xi,\eta) \right\| \\ &= \lim_{\xi\to 0}\|a - \varphi(\xi,\eta)\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\eta| < \delta$

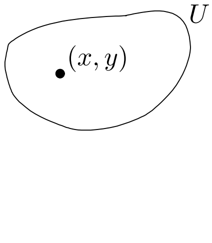
$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - a \right\| &= \lim_{\eta\to 0}\left\| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+\eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\eta} - a \right\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - a \right\| &< \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - a \right\| &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= a \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$, so dass $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} |\xi| < \delta \\ |\eta| < \delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\xi, y+\eta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right\| < \varepsilon$$

und $[x-\delta, x+\delta] \times [y-\delta, y+\delta] \subset U$.
So ein δ existiert, da $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ stetig ist.



$\Rightarrow$ Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < \delta$, $|\eta| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
&f(x+\xi, y+\eta) - f(x+\xi, y) - f(x, y+\eta) + f(x,y) \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+\xi, y+t\eta)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, y+t\eta)\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x+\xi, y+t\eta)\cdot\eta\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+t\eta)\cdot\eta\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+\xi, y+t\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+t\eta)\right)\mathrm{d}t\cdot\eta \\
&\quad = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial y}(x+s\xi, y+t\eta)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\cdot\eta \\
&\quad = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+s\xi, y+t\eta)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\cdot\xi\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi(\xi,\eta) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+s\xi, y+t\eta)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \varphi(\xi,\eta) - a &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+s\xi, y+t\eta) - a\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Setze für $0 \le t \le 1$

$$\Phi(t) := \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+s\xi, y+t\eta) - a\right)\mathrm{d}s$$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ stetig ist, folgt aus Satz 7, dass auch $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ stetig ist.
Nach Lemma 2 gilt $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < \delta$, $|\eta| < \delta$ und $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t)\| &\le \int_0^1 \underbrace{\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+s\xi, y+t\eta) - a\right\|}_{<\varepsilon}\mathrm{d}s \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|\xi| < \delta$ und $|\eta| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\xi,\eta) - a\| &= \left\|\int_0^1 \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right\| \\
&\overset{\text{Lem2}}{\le} \int_0^1 \|\Phi(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $x = (x_1, ..., x_n) \in U$.
f heisst 3*mal stetig differenzierbar*, wenn f stetig differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}^m$ 2mal stetig differenzierbar ist für $i = 1, ..., n$.

Wir definieren die dritten partiellen Ableitungen von f durch

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad := \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

f ist 3mal stetig differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\forall i,j,k \in \{1,...,n\}$ existiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} : U \to \mathbb{R}^m$$

und ist stetig.

Bemerkung 2: Nach Satz 2 können wir die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen, solange f 3mal stetig differenzierbar ist. Das heisst $\forall i,j,k \in \{1,...,n\}$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j}$$

Definition 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $\ell \in \mathbb{N}$.
Wir nennen f *ℓmal stetig differenzierbar*, wenn f stetig differenzierbar ist und

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}^m$$

$(\ell - 1)$mal stetig differenzierbar ist für $i = 1,...,n$.

Definition 2: Für $i_1,...,i_\ell \in \{1,...n\}$ definieren wir die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_\ell}}(x) \quad := \quad \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{\ell-1} f}{\partial x_{i_2} ... \partial x_{i_\ell}}(x) = \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{\ell-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_\ell}}(x)$$

Bemerkung 3: f ist ℓmal differenzierbar $\Leftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung ℓ existieren und sind stetig.

Bemerkung 4: Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen können wir vertauschen, wenn f ℓmal stetig differenzierbar ist (Satz 11).

Notation:

$$C^\ell(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m | f \text{ ist } \ell\text{mal stetig differenzierbar}\}$$

Wir sagen "f ist C^ℓ" anstatt "f ist ℓmal stetig differenzierbar" oder "f ist eine C^ℓ-Funktion"

Seien $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1,...,n$ und

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f \quad &:= \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \\ &:= \quad \frac{\partial^{|\alpha| f}}{\underbrace{\partial x_1 ... \partial x_1}_{\alpha_1} \underbrace{\partial x_2 ... \partial x_2}_{\alpha_2} ... \underbrace{\partial x_n ... \partial x_n}_{\alpha_n}} \end{aligned}$$

Definition: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst *unendlich oft stetig differenzierbar*, oder C^∞-Funktion, wenn f für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ eine C^ℓ-Funktion ist. Es gilt $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$C^0(U, \mathbb{R}^m) \supset C^1(U, \mathbb{R}^m) \supset C^2(U, R^m) \supset ... \qquad C^\ell(U, \mathbb{R}^m) \supset C^{\ell+1}(U, \mathbb{R}^m)$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} C^\ell(U, \mathbb{R}^m)$$

Beispiel:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^k y^\ell$ ist eine C^∞-Funktion

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= kx^{k-1}y^\ell \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= k(k-1)x^{k-2}y^\ell \\
&\vdots \\
\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,y) &= k!y^\ell \\
\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) &= k!\ell!
\end{aligned}$$

$\forall (i,j) \neq (k,\ell)$ gilt

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0) = 0$$

2) $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $f(x) := x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$
$\Rightarrow \partial^\alpha f(x) = \alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!...\alpha_n!$ (Beweis durch Induktion)

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha f(0) &= \alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!...\alpha_n! \\
\partial^\beta f(0) &= 0 \quad \forall \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \neq \alpha
\end{aligned}$$

3) $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} c_\alpha x^\alpha$

$$\partial^\beta f(0) = c_\beta \beta! \qquad c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(0)$$

11.5 Das Taylorpolynom

Definition 4: Sei $f \in C^\ell(U, \mathbb{R}^m)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\ell \in \mathbb{N}$.
Definiere

$$T_\ell f(x;\xi) := \sum_{|\alpha| \leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(x) \xi^\alpha$$

für $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1!...\alpha_n!$ und $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$.
Die Funktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \xi \mapsto T_\ell f(x;\xi)$$

heisst *Taylorpolynom der Ordnung ℓ von f an der Stelle x.*

Beispiel: $f(x) = \sum_{\alpha \leq \ell} c_\alpha x^\alpha$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(0) \\
&\Rightarrow T_\ell f(0;\xi) = f(\xi)
\end{aligned}$$

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} c_\alpha (x+\xi)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq \ell} b_\alpha \xi^\alpha$$

$\Rightarrow g(\xi) := f(x+\xi)$ erfüllt $\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha g(0) = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) = b_\alpha$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x+\xi) &= \sum_{|\alpha| \leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) \xi^\alpha \\
&= T_\ell f(x;\xi)
\end{aligned}$$

Frage: Wie gut approximiert im Allgemeinen das Taylor-Polynom eine Funktion f?

Ziel: $f \in C^{\ell+1} \Rightarrow \exists c$:

$$\|f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi)\| \quad \leq \quad c\|\xi\|^{\ell+1} \tag{1}$$

für $\|\xi\|$ hinreichend klein.

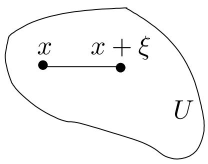
$f \in C^\ell \Rightarrow \forall x \in U$

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi)\|}{\|\xi\|^\ell} \quad = \quad 0 \tag{2}$$

Verdeutlichung: $\ell = 1$

$$\begin{aligned} T_1 f(x;\xi) &= f(x) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x)\xi_i \\ &= f(x) + \mathrm{d}f(x)\xi \\ (2) &\Leftrightarrow \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|f(x+\xi) - f(x) - \mathrm{d}f(x)\xi\|}{\|\xi\|} = 0 \end{aligned}$$

Satz 12: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{\ell+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x+t\xi \in U$ $\forall t \in [0,1]$, dann gilt



$$f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi) = \int_0^1 (\ell+1)(1-t)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Korollar:

i) $f \in C^{\ell+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $x \in U$, $r > 0$, $\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid \|x-y\| \leq r\} \subset U$
$\Rightarrow \exists c > 0 :$ (1) gilt $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| \leq r$

ii) $f \in C^\ell(U, \mathbb{R}^m)$
$\Rightarrow$ (2) gilt $\forall x \in U$

Beweis:

i) Definiere

$$c := \sup_{y \in \overline{B}_r(x)} \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!}\, \|\partial^\alpha f(y)\| \qquad \int_0^1 (\ell+1)(1-t)^\ell \,\mathrm{d}t = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \|f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi)\| \\ &\overset{\text{Sa12}}{\leq} \int_0^1 (\ell+1)(1-t)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha f(x+t\xi)\| \cdot |\xi^\alpha| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1} \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha f(x+t\xi)\| \cdot \underbrace{|\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}|}_{\leq |\xi_1|^{\alpha_1} \ldots |\xi_n|^{\alpha_n}} \\ &\leq \|\xi\|^{\ell+1} \underbrace{\sup_{0\leq t\leq 1} \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!} \|\partial^\alpha f(x+t\xi)\|}_{\leq c} \\ &\leq c\|\xi\|^{\ell+1} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
&f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi)\\
&\quad = \quad f(x;\xi) - T_{\ell-1} f(x;\xi) - \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha\\
&\quad \overset{\text{Sa12}}{=} \int_0^1 \ell(1-t)^{\ell-1} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\left(\partial^\alpha(x+t\xi) - \partial^\alpha f(x)\right)\xi^\alpha \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\left.\begin{array}{l} \|\xi\| < \delta \\ |\alpha| = \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \|\partial^\alpha f(x+\xi) - \partial^\alpha f(x)\| < \varepsilon$$

für $x + \xi \in U$.
$\Rightarrow$ Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ gilt $x + \xi \in U$ und

$$\begin{aligned}
&\|f(x+\xi) - T_\ell f(x;\xi)\|\\
&\quad \leq \int_0^1 \ell(1-t)^{\ell-1} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!}\,\|\partial^\alpha f(x+t\xi) - \partial^\alpha f(x)\| \cdot |\xi^\alpha| \,\mathrm{d}t\\
&\quad \leq \int_0^1 \ell(1-t)^{\ell-1} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \varepsilon \|\xi\|^\ell \,\mathrm{d}t\\
&\quad \leq \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\varepsilon}{\alpha!} \cdot \|\xi\|^\ell
\end{aligned}$$

(QED)

Lemma 3:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(x+t\xi) \quad = \quad \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(x)\xi^\alpha \tag{4}$$

Beweis: Induktion

- $k = 1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+t\xi) \quad = \quad \sum_{i=1}^n \partial_i f(x+t\xi)\xi_i \quad = \quad \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha$$

wobei $\alpha = (0, 0, ..., 0, \underbrace{1}_{i-\text{te Stelle}}, 0, ..., 0)$ und $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n} = \xi_i$

- $k \geq 2$: (4) gilt für $k - 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(x+t\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}} f(x+t\xi)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha!}\,\partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha\\
&= \sum_{|\alpha|=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \xi_i\\
&= \sum_{|\alpha|=k-1} \sum_{i=1}^n \frac{(k-1)!}{\alpha!}\,\partial^{\alpha+e_i} f(x+t\xi)\xi^{\alpha+e_i}\\
&= \sum_{|\beta|=k} \sum_{\substack{i=1\\ \beta_i>0}}^n \frac{(k-1)!}{(\beta-e_i)!}\,\partial^\beta f(x+t\xi)\xi^\beta
\end{aligned}$$

Behauptung: $\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = k$ mit $\beta_i > 0$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(k-1)!}{(\beta - e_i)!} = \frac{k!}{\beta!}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\beta - e_1)!} + \frac{1}{(\beta - e_2)!} + ... + \frac{1}{(\beta - e_n)!} \\
&= \frac{1}{(\beta_1 - 1)!\beta_2!...\beta_n!} + \frac{1}{\beta_1!(\beta_2 - 1)!\beta_3!...\beta_n!} + ... \\
&\quad + \frac{1}{\beta_1!...\beta_{n-1}!(\beta_n - 1)!} \\
&= \frac{1}{\beta_1!...\beta_n!}(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n) \\
&= \frac{|\beta|}{\beta!} = \frac{k}{\beta!}
\end{aligned}$$

(QED)

Lemma 4: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \in C^{\ell+1}(I, \mathbb{R}^m)$, $x \in I$

$$u(x) - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} u^{(k)}(0)x^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!} u^{(\ell+1)}(tx)x^{\ell+1} \, \mathrm{d}t \tag{5}$$

Beweis: Induktion

- $\ell = 0$:

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(tx) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 u'(tx)x \, \mathrm{d}t$$

- $\ell \geq 1$: Die Behauptung gilt für $\ell - 1$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u(x) - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(0)x^k \\
&= u(x) - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(0)x^k - \frac{1}{\ell!}\, u^{(\ell)}(0)x^\ell \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\, u^{(\ell)}(tx)x^\ell \,\mathrm{d}t - \frac{1}{\ell!}\, u^{(\ell)}(0)x^\ell \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \Big(u^{(\ell)}(tx) - u^{(\ell)}(0)\Big)\, x^\ell \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{(1-t)^\ell}{\ell!}\right) \Big(u^{(\ell)}(tx) - u^{(\ell)}(0)\Big)\, x^\ell \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(u^{(\ell)}(tx) - u^{(\ell)}(0)\Big)\, x^\ell \,\mathrm{d}t \\
&\quad - \left[\frac{(1-t)^\ell}{\ell!} \Big(u^{(\ell)}(tx) - u^{(\ell)}(0)\Big)\, x^\ell\right]_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!}\, u^{(\ell+1)}(tx)xx^\ell \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!}\, u^{(\ell+1)}(tx)x^{\ell+1} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

(QED)

Beweis von Satz 12: Sei $u(t) := f(x + t\xi)$, $u : I \to \mathbb{R}^m$, $[0,1] \subset I$

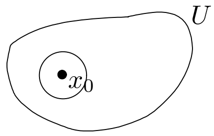
$$
u^{(k)}(t) \overset{(4)}{=} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(x+\xi) - \sum_{|\alpha|\leq\ell} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha \\
&= u(1) - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x)\xi^\alpha}_{u^{(k)}(0)} \\
&= u(1) - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(0) \\
&\overset{(5)}{=} \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!}\, u^{(\ell+1)}(t) \,\mathrm{d}t \\
&\overset{(4)}{=} \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!} \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{(\ell+1)!}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (\ell+1)(1-t)^\ell \sum_{|\alpha|=\ell+1} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

(QED)

11.6 Kurvendiskussion

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig.



Ein Punkt $x_0 \in U$ heisst *lokales Minimum von* f, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in U,\ f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 heisst *lokales Maximum von* f, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in U,\ f(x) \leq f(x_0)$$

x_0 heisst *lokales Extremum*, wenn x_0 entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum ist.

Satz 13: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und sei f differenzierbar an der Stelle x_0.

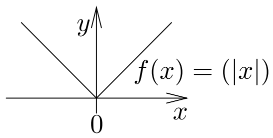
$$\Rightarrow \mathrm{d}f(x_0) \quad = \quad 0$$

das heisst

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad = \quad 0 \quad i = 1, ..., n$$

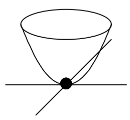
Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $I := \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + t\xi \in U\} \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in I$.
Definiere $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := f(x_0 + t\xi)$, wobei x_0 ein Extremum von f ist.
$\Rightarrow \varphi(0) \leq \varphi(t)$ für ein hinreichend kleines t.
$\Rightarrow 0$ ist ein lokales Extremum von φ
$\Rightarrow 0 = \varphi'(0) = \mathrm{d}f(x_0)\xi$ (QED)

Beispiel 1: $f(x) = \|x\|$



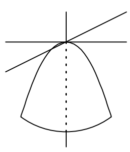
$\Rightarrow f$ ist nicht differenzierbar an der Stelle 0, trotzdem ist 0 ein lokales Minimum!

Beispiel 2: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$



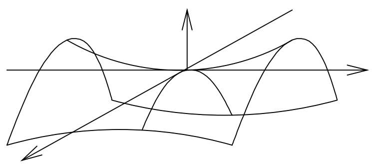
$\Rightarrow 0$ ist ein lokales Minimum.

Beispiel 3: $f(x, y) = -x^2 - y^2$



$\Rightarrow 0$ ist ein lokales Maximum.

Beispiel 4: $f(x,y) := x^2 - y^2$



$\mathrm{d}f(0,0) = 0$
$\rightarrow$ 0 ist kein lokales Extremum, sondern ein *Sattelpunkt*.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion.
Ein $x_0 \in U$ heisst *kritischer Punkt von f*, wenn $\mathrm{d}f(x_0) = 0$ ist.

Definition: Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion.

$$\mathrm{d}^2 f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist die *Hesse'sche Matrix von f* an der Stelle x.
$\rightarrow \mathrm{d}^2 f(x)$ ist symmetrisch (Satz 11).

Satz 14: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion.

i) $x_0 \in U$ ist ein lokales Minimum von $f \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i \xi_j \geq 0$$

ii) $x_0 \in U$ ist ein lokales Maximum von $f \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i \xi_j \leq 0$$

Beweis: Sei $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, x_0 ein lokales Minimum von f.
Definiere $\varphi(t) := f(x_0 + t\xi)$
$\Rightarrow$ 0 ist ein lokales Minimum von φ
$\Rightarrow \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$ (Analysis I)

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0 + t\xi)\xi_i \\ \Rightarrow \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_i f(x_0 + t\xi) \right) \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(x_0 + t\xi)\xi_j \xi_i \\ &= \xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0 + t\xi)\xi \\ \Rightarrow \xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi &= \varphi''(0) \geq 0 \end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 5: $f(x,y) = x^2 + y^4$.
$\rightarrow$ 0 ist ein lokales Minimum

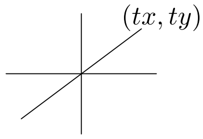
$$\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}^2 g(0,0)$$

für $g(x,y) = x^2 - y^4$.

Beispiel 6: $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

$f(tx,ty) = 2x^4t^4 - 3x^2yt^3 + t^2y^2$



Die Funktion $t \mapsto f(tx,ty)$ hat an der Stelle $t=0$ ein striktes lokales Minimum $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
$f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) < 0$ falls $x^2 < y < 2x^2$, das heisst $(0,0)$ ist kein lokales Minimum von f.

Definition: Eine symmetrische Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst *positiv definit*, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T A x > 0$$

sie heisst *positiv semidefinit*, wenn $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T A x \geq 0$$

negativ (semi)definit ist analog definiert.

Bemerkung 1: Nach Satz 13 und Satz 14 gilt

$$x_0 \text{ ist ein lokales Minimum} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f(x_0) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(x_0) \text{ ist positiv definit}$$

Bemerkung: Für $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$A \text{ ist positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad \det(a_{ij})_{i,j=1}^k > 0 \quad k = 1, ..., n$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0 \quad \forall (x,y) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0,\ ac - b^2 > 0$$

Notation:

$$\begin{aligned} A > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist positiv definit} \\ A \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist positiv semidefinit} \end{aligned}$$

Bemerkung 3:

$$A \text{ ist positiv definit} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\ \exists \varepsilon > 0 : x^T A x \geq \varepsilon \|x\|^2$$

Beweis:

- "$\Leftarrow$": trivial
- "$\Rightarrow$": $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.
  Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) := x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

ist stetig. Die Restriktion $f|_{S^{n-1}}$ nimmt ihr Minimum an.
$\Rightarrow \exists x_0 \in S^{n-1} : \forall x \in S^{n-1}$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Nach Voraussetzung ($A > 0$) gilt $\varepsilon := f(x_0) = x_0^T A x_0 > 0$
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ und daher

$$\begin{aligned}
\frac{x^T A x}{\|x\|^2} &= \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T A \frac{x}{\|x\|} \\
&= f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\
&\geq f(x_0) = \varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Satz 15: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, $x_0 \in U$, $\mathrm{d}f(x_0) = 0$ und $\mathrm{d}^2 f(x_0) > 0$
$\Rightarrow x_0$ ist ein lokales Minimum.

Beweis: Das Taylor-Polynom von f:

$$\begin{aligned}
T_2 f(x_0;\xi) &= \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha \\
&= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0)\xi_i + \sum_{i<j} \partial_i \partial_j f(x_0) \xi^i \xi^j + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \partial_i^2 f(x_0) \xi_i^2 \\
&= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0)\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x_0) \xi_i \xi_j \\
&= f(x_0) + \frac{1}{2} \xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0) \xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x_0+\xi) - f(x_0) &= f(x_0+\xi) - f(x_0) - \frac{1}{2}\xi^T \mathrm{d}f(x_0)\xi + \frac{1}{2}\xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi \\
&= \frac{1}{2}\xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi + f(x_0+\xi) - T_2 f(x_0;\xi)
\end{aligned}$$

da $\mathrm{d}f(x_0) = 0$.

Nach Bemerkung 3 $\exists \varepsilon > 0$, so dass $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T \mathrm{d}f(x_0)\xi \quad \geq \quad \varepsilon \|\xi\|^2$$

Nach Satz 12 (bzw. einem seiner Korollare) $\exists \delta > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$0 < \|\xi\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x_0 + \xi \in U \text{ und } \frac{|f(x_0+\xi) - T_2 f(x_0;\xi)|}{\|\xi\|^2} < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\Rightarrow$ Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x_0+\xi) - f(x_0) &= \frac{1}{2} \underbrace{\xi^T \mathrm{d}^2 f(x_0)\xi}_{\geq \varepsilon \|\xi\|^2} + f(x_0+\xi) - T_2 f(x_0;\xi) \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\|\xi\|^2 - \underbrace{|f(x_0+\xi) - T_2 f(x_0;\xi)|}_{< \frac{\varepsilon}{4}\|\xi\|^2} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\|\xi\|^2 - \frac{\varepsilon}{4}\|\xi\|^2 \\
&\geq \frac{\varepsilon}{4}\|\xi\|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Es gilt sogar

$$f(x_0 + \xi) \quad \geq \quad f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}\, \|\xi\|^2$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$, also ist x_0 ein "striktes" lokales Minimum von f. (QED)

12 Variations-Rechnung

Sei

$$S(x) \quad = \quad \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Frage: Welche Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit vorgegebenen Randwerten $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$ minimieren das Integral $S(x)$?

Beispiel: Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $x = (x_1, ..., x_n)$ und $p = (p_1, ..., p_n)$ in $L(x, p)$. Seien $x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$\mathscr{X} \quad := \quad \{x : [a, b] \to \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist eine } C^2\text{-Funktion, } x(a) = x_a,\ x(b) = x_b\}$$

Das Integral (1) definiert eine Abbildung

$$S : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$$

12.1 Die Euler-Gleichung

Satz 1: Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ ein "lokales Minimum" von $S : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, das heisst $\exists r > 0 : \forall \xi \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit

$$\xi(a) = 0 \qquad \xi(b) = 0$$

und mit

$$\|\xi\|_{C^1} \quad = \quad \sup_{a \le t \le b} \|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{a \le t \le b} \|\dot{\xi}(t)\|_{\mathbb{R}^n} < r$$

gilt

$$S(x) \quad \le \quad S(x + \xi)$$

Dann folgt $\forall t \in [a, b]\, \forall \nu \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial p_\nu} (x(t), \dot{x}(t)) \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial x_\nu} (x(t), \dot{x}(t)) \tag{2}$$

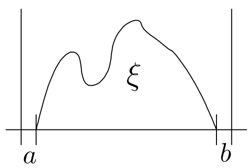
$\to$ Euler-Gleichung

Lemma 1: Sei $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass für jedes $\xi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ mit $\xi(t) = 0$ für $a \le t \le a + \varepsilon$ und $b - \varepsilon \le t \le b$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$\int_a^b \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu(t) \xi_\nu(t)\, \mathrm{d}t \quad = \quad 0$$

Dann folgt $\forall t \in [a, b]$

$$\eta(t) \quad = \quad 0$$



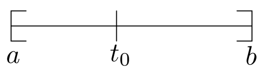
Beweis: Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Das innere Produkt von x und y ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu$$

Es gilt also $\forall \xi \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\xi(t) = 0$ für $t \sim a$, $t \sim b$

$$\int_a^b \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \, \mathrm{d}t = 0$$

Annahme: $\exists t_0 \in [a,b] : \eta(t_0) \neq 0$

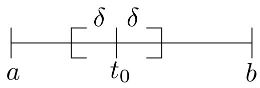


o.B.d.A. ist $t_0 \neq a$ und $t_0 \neq b$
Sei für $a \leq t \leq b$

$$f(t) := \langle \eta(t_0), \eta(t) \rangle$$

$\Rightarrow f(t_0) = \|\eta(t_0)\|^2 > 0$ und f ist stetig. Setze

$$\varepsilon := \frac{\|\eta(t_0)\|^2}{2}$$

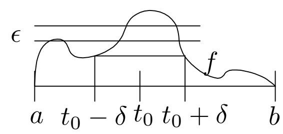


$\Rightarrow \exists \delta > 0 : a < t_0 - \delta < t_0 + \delta < b$ und $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$$

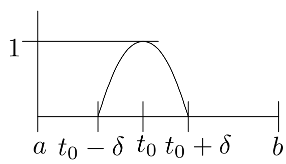
$\Rightarrow \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$f(t) \geq f(t_0) - |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon$$



Wähle $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- φ ist C^∞
- $\varphi(t_0) = 1$
- $\varphi(t) = 0$ für $|t - t_0| \geq \delta$



Sei $\xi(t) := \varphi(t)\eta(t_0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_a^b \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \, \mathrm{d}t &= \int_a^b \varphi(t) \underbrace{\langle \eta(t_0), \eta(t) \rangle}_{f(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) \underbrace{f(t)}_{\geq \varepsilon} \, \mathrm{d}t \\
&\geq \varepsilon \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \\
&> 0
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Widerspruch (QED)

Beweis von Satz 1: Für eine vorgegebene Funktionen $x \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a) = 0 = \xi(b)$ betrachten wir die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(s) \quad = \quad S(x - s\xi)$$

gegeben ist. Aus der Voraussetzung des Satzes folgt, dass $s = 0$ ein lokales Minimum von der Funktion φ ist.

Frage: Warum ist φ differenzierbar?

$$\varphi(s) \quad = \quad \int_a^b L(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t))\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}t$$

wobei

$$\begin{aligned} f(s,t) = L(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t)) \quad &: \quad f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) + s\xi(t) \\ \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{L} f(s,t) \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

das heisst, f ist eine C^1-Funktion

$\Rightarrow$ Nach Kapitel 11, Satz 6 ist φ stetig differenzierbar und

$$\varphi'(s) \quad = \quad \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,\mathrm{d}t \qquad \varphi'(0) \quad = \quad 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t)) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t)) \cdot \xi_\nu(t) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t) + s\xi(t), \dot{x}(t) + s\dot{\xi}(t)) \cdot \dot{\xi}_\nu(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &= \quad \int_a^b \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x + s\xi, \dot{x} + s\dot{\xi}) \cdot \xi_\nu \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_a^b \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x + s\xi, \dot{x} + s\dot{\xi}) \cdot \dot{\xi}_\nu \,\mathrm{d}t \Bigg|_{s=0} \\ &\overset{\xi(a)=0=\xi(b)}{=} \int_a^b \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \cdot \xi_\nu(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\forall \xi \in C^2([a,b])$ mit $\xi(a) = 0 = \xi(b)$

Definiere

$$\eta_\nu(t) \quad := \quad \frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t), \dot{x}(t))$$

Wir wissen, dass $\forall \xi \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$

$$\int_a^b \sum_{\nu=1}^n \eta_\nu(t)\xi_\nu(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 0$$

Nach Lemma 1 ist dann auch $\eta_\nu(t) = 0 \ \forall \nu, \forall t$ (QED)

Beispiel: $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_a^b \frac{1}{2}\,|\dot{x}(t)|^2 - V(x(t))\,\mathrm{d}t \\
L(x,p) &= \frac{1}{2}\|p\|^2 - V(x) \\
&= \frac{1}{2}\,(p_1^2 + ... + p_n^2) - V(x_1, ..., x_n) \\
\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x,p) &= p_\nu \\
\frac{\partial L}{\partial x_\nu}\,(x,p) &= -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\,(x) \\
\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t)) &= \dot{x}_\nu(t) \\
\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t)) &= -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\,(x(t))
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_\nu(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\,(x)$$

$\to$ Newton-Gleichung ($F = ma$)

12.2 Energieerhaltung

Satz 2: Sei $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (2) und

$$E(t) \;:=\; \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu(t)\,\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t)) - L(x(t),\dot{x}(t)) \tag{3}$$

dann ist $E(t) \equiv \text{const}$.

Beweis: Wir zeigen $\dot{E}(t) \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,L(x(t),\dot{x}(t)) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t))\,\dot{x}_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t))\,\ddot{x}_\nu(t) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,E(t) &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\ddot{x}_\nu(t)\,\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t)) + \dot{x}_\nu(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x(t),\dot{x}(t)) \right) \\
&\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,L(x(t),\dot{x}(t)) \\
&\overset{(2)}{=} 0
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel:

$$L(x,p) = \frac{1}{2}\,\|p\|^2 - V(x)$$

Euler-Gleichung:

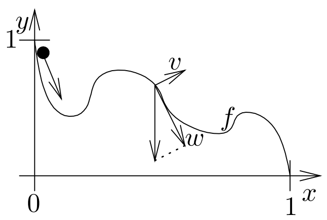
$$\frac{\partial L}{\partial p_\nu}\,(x,p) = p_\nu \qquad \ddot{x}_\nu(t) = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}\,(x(t)) \qquad \nu = 1, ..., n$$

Es folgt

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu(t) \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu(t)^2 - \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + V(x(t)) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{V(x(t))}_{\text{pot. Energie}} \end{aligned}$$

12.3 Anwendungen

Ideales Gefälle: $f : [0,1] \to [0,1],\ f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(x) < 1\ \forall x \in (0,1]$



Die Position der Kugel zum Zeitpunkt t wird beschreiben durch

$$(x(t), y(t)) \qquad y(t) = f(x(t)) \qquad \dot{y}(t) = f'(x(t))\dot{x}(t)$$

Die Kinetische Energie ist

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + f'(x(t))^2\right)\dot{x}(t)^2$$

Die potentielle Energie ist

$$y(t) = f(x(t))$$

Damit bekommen wir das Variations-Problem

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(x) &= \int_0^T \left(\frac{1}{2}\left(1 + f'(x(t))^2\right)\dot{x}(t)^2 - f(x(t))\right) \mathrm{d}t \\ \Rightarrow L(x,p) &= \frac{1}{2}(1 + f'(x)^2)p^2 - f(x) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= f'(x)f''(x)p^2 - f'(x) \\ \frac{\partial L}{\partial p} &= (1 + f'(x)^2)p \end{aligned}$$

Die Euler-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1 + f'(x)^2)\dot{x}\right) &= f'(x)f''(x)\dot{x}^2 - f'(x) \\ \Rightarrow (1 + f'(x)^2)\ddot{x} + 2f'(x)f''(x)\dot{x}^2 &= f'(x)f''(x)\dot{x}^2 - f'(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-f'(x)f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} - \frac{f'(x)}{1 + f'(x)^2} \tag{4}$$

Für $y(t) = f(x(t))$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f'(x)\dot{x} \\ \ddot{y} &= f'(x)\ddot{x} + f''(x)\dot{x}^2 \\ &= f''(x)\dot{x}^2 - \frac{f'(x)^2 f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} - \frac{f'(x)^2}{1 + f'(x)^2} \\ &= \frac{f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} - \frac{f'(x)^2}{1 + f'(x)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{f''(x)\dot{x}^2}{1+f'(x)^2}\begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v} - \underbrace{\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}}_{=:w}$$

Wir wissen: Kinetische E. + Potentielle E. = const

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial p}\,(x,\dot{x}) - L(x,\dot{x}) \\ &= (1+f'(x)^2)\dot{x}^2 - L(x,\dot{x}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(1+f'(x))\dot{x}^2}_{\text{kin. E.}} + \underbrace{f(x)}_{\text{pot. E.}} \\ &\equiv \text{const} \end{aligned}$$

$x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, const $= f(0) = 1$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2(1-f(x))}{1+f'(x)^2}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2(1-f(x))}{1+f'(x)^2}} \tag{6}$$

$\dot{x}(t) > 0$ für $t > 0$, das heisst, x ist strikt monoton!
Für die Umkehrabbildung $x \mapsto t(x)$, wobei $t(x)$ die Zeit ist, an der die Kugel an der Stelle x eintrifft, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2(1-f(x))}} \\ \Rightarrow T &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2(1-f(x))}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2(1-f(x))}}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7}$$

Dieser Limes ist $< \infty$, sobald $f'(0) < 0$ (sonst bleibt die Kugel oben liegen).

Frage: Für welche f nimmt $T(f)$ den kleinsten Wert an?

Umbenennung: Wir schreiben $y(x)$ statt $f(x)$, das heisst

$$y:[0,1]\to[0,1] \qquad y(0)=1 \qquad y(x)<1\,\forall x>0 \qquad \dot{y}(0)<0$$

$$\begin{aligned} T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 L(y(x),\dot{y}(x))\,\mathrm{d}x \\ L(y,p) &= \sqrt{\frac{1+p^2}{1-y}} \\ \frac{\partial L}{\partial p} &= \sqrt{\frac{1-y}{1+p^2}}\cdot\frac{p}{1-y} \\ &= \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)(1-y)}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-y}{1+p^2}}\cdot\frac{1+p^2}{(1-y)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1+p^2}{1-y}\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)(1-y)}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit der Eulergleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+y'^{\,2}}{1-y}\frac{1}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}} \tag{8}$$

$y = y(x)$, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$

Übung 1:

$$y'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+y'^{\,2}}{1-y} \tag{9}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}} &= \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}}\\ &\quad -\frac{y'\left(2y'y''(1-y)-(1+y'^{\,2})y'\right)}{2\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}^{\,3}}\end{aligned}$$

Setze in (8) ein und multipliziere mit $\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y''\left(1-\frac{y'^{\,2}}{1+y'^{\,2}}\right)+\frac{y'^{\,2}}{2(1-y)} &= \frac{1}{2}\,\frac{1+y'^{\,2}}{1-y}\\ \Rightarrow y''\left(\frac{1+y'^{\,2}-y'^{\,2}}{1+y'^{\,2}}\right) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y}\\ \Rightarrow y'' &= \frac{1}{2}\,\frac{1+y'^{\,2}}{1-y}\end{aligned}$$

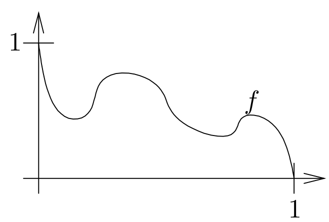
Energie-Erhaltung:

$$\begin{aligned}\text{const} &= y'\,\frac{\partial L}{\partial p}(y,y') - L(y,y')\\ &= \frac{y'^{\,2}}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}} - \sqrt{\frac{1+y'^{\,2}}{1-y}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{(1+y'^{\,2})(1-y)}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-y)(1+y'^{\,2})}_{=:c+1} \equiv \text{const} \tag{10}$$

Übung 2: (9) $\Rightarrow$ (10)

$$\begin{aligned}c+1 &= (1+y'^{\,2})(1-y)\\ &= 1+y'^{\,2}-y-yy'^{\,2}\\ c+y &= (1-y)y'^{\,2}\end{aligned}$$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\sqrt{\frac{c+y}{1-y}} \tag{11}$$

$y(0) = 1$, $y(1) = 0$

Umkehrabbildung: $y \mapsto x(y)$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}$$

$$\Rightarrow x(y) = 1 - \int_0^y \sqrt{\frac{1-s}{c+s}}\,\mathrm{d}s$$

wobei c, $x(1) = 0$ erfüllen muss.

Substitution zur Lösung des Integrals:

$$\begin{aligned} t &:= \sqrt{\frac{1-s}{c+s}} \\ &\Rightarrow \quad t^2 = \frac{1-s}{c+s} \\ &\Rightarrow \quad t^2(c+s) = 1-s \\ &\Rightarrow \quad s = \frac{1-ct^2}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{-2ct(t^2+1) - (1-ct^2)2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-2ct - 2t}{(t^2+1)^2} = -\frac{2(c+1)t}{(t^2+1)^2}$$

$$s = 0 \to t = \sqrt{\frac{1}{c}} \qquad s = y \to t = \sqrt{\frac{1-y}{c+y}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(y) &= 1 - \int_{\sqrt{1/c}}^{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}} t \cdot \frac{-2(c+1)t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + (c+1) \int_{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}^{\sqrt{1/c}} \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + (c+1) \int_{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}^{\sqrt{1/c}} f'(t) g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

wobei

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad f'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \qquad g(t) = t \qquad g'(t) = 1$$

damit weiter

$$\begin{aligned} x(y) &= 1 + (c+1)\frac{t}{1+t^2}\Big|_{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}^{\sqrt{1/c}} - (c+1)\int_{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}^{\sqrt{1/c}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + (c+1)\,\frac{1/\sqrt{c}}{1+1/c} - (c+1)\frac{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}{1+\frac{1-y}{c+y}} \\ &\quad -(c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{1/c}\right) + (c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x(y)-1 &= -\sqrt{(1-y)(c+y)}+\sqrt{c}+(c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}\right)\\ &\quad -(c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{1/c}\right)\end{aligned}$$

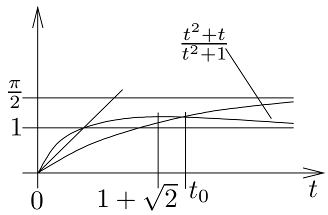
Kontrolliere:

- $x(0)=1\,\forall c\ \checkmark$
- $x(1)=0$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\sqrt{c}=(c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right) \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad x(y)=-\sqrt{(1-y)(c+y)}+(c+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}\right) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right) &= \frac{1+\sqrt{c}}{1+c}\\ &= \frac{1/c+1/\sqrt{c}}{1/c+1}\\ &= \frac{t^2+t}{t^2+1} \qquad t:=\sqrt{1/c}\end{aligned}$$



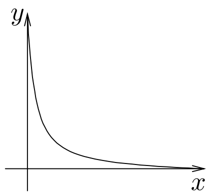
Werte:

$$t_0=2.61860802 \qquad \tan^{-1}t_0=1.206005572 \qquad c_0=\frac{1}{t_0^2}=0.145837078$$

Gleichung: $c=c_0\cong 0.1458...$

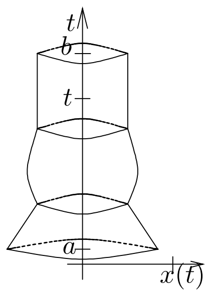
$$\begin{aligned}x(y) &= -\sqrt{(1-y)(c_0+y)}+(c_0+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{c_0+y}}\right)\\ \dot{y} &= -\sqrt{\frac{c_0+y}{1-y}}\\ \Rightarrow T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1+y'^{\,2}}{1-y}}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{c_0+1}{2}}\int\limits_0^1\frac{1}{1-y(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\frac{c_0+1}{2}}\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-y)(c_0+y)}}\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2(c_0+1)}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c_0}}\right)\\ &= \sqrt{2.2916}\cdot 1.20600\\ &= 1.825682192<2\end{aligned}$$

Dreidimensionale Flächen $x : [a, b] \to \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$



$$A(x) = \int_a^b 2\pi x(t)\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$\to$ Momentan ohne Beweis.



Problem: Wir wollen den Flächeninhalt $A(x)$ bei vorgegebenen Randwerten $x(a) = \alpha$ und $y(b) = \beta$ minimieren.

Eulergleichung:

$$\begin{aligned}
L(x,p) &:= x\sqrt{1+p^2} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \sqrt{1+p^2} \\
\frac{\partial L}{\partial p} &= \frac{xp}{\sqrt{1+p^2}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),p(t)) &= \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),p(t))
\end{aligned}$$

Die Eulergleichung des Variationsproblems (1) hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \sqrt{1+\dot{x}^2} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial p}(x,\dot{x}) - L(x,\dot{x}) &= \frac{x\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} - x\sqrt{1+\dot{x}^2} \\
&= \frac{x\dot{x}^2 - x(1+\dot{x}^2)}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \\
&= \text{const}
\end{aligned}$$

Also ist

$$c := \frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \tag{3}$$

entlang jeder Lösung von (2) konstant. Damit vereinfacht sich (2) zu

$$c\ddot{x} = \frac{x}{c} \tag{4}$$

$$\ddot{x} = \frac{x}{c^2} \tag{5}$$

⇒ Jede Lösung von (2) hat die Form

$$x(t) = ue^{t/c} + ve^{-t/c}$$

Beziehung zwischen u und v:

$$x(0) = u + v \qquad \dot{x}(0) = \frac{u}{c} - \frac{v}{c} \qquad \frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c$$

$$\Rightarrow uv = \frac{c^2}{4}$$

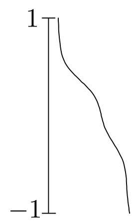
⇒ Jede Lösung von (2) und (3) hat die Form

$$x(t) = \frac{cw}{2}\, e^{t/c} + \frac{c}{2w}\, e^{-t/c} \tag{6}$$

Spezialfall: $\alpha = \beta = r$, $a = -1$, $b = +1$

$$\Rightarrow x(-1) = x(1) = r$$

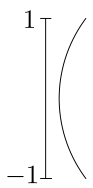
$$\Rightarrow \frac{cw}{2}\, e^{-1/c} + \frac{c}{2w}\, e^{1/c} = \frac{cw}{2}\, e^{1/c} + \frac{c}{2w}\, e^{-1/c}$$



$$x(t) = \frac{c}{2}\left(e^{t/c} + e^{-t/c}\right) = c\cosh\frac{t}{c}$$

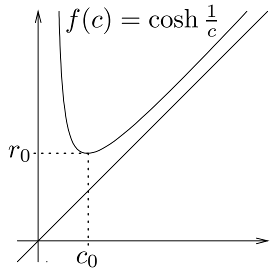
⇒ Jede Lösung $x : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ von (2), (3) mit $x(-1) = x(1) = r$ hat die Form

$$x(t) = c\cosh\frac{t}{c} \qquad c\cosh\frac{1}{c} = r \tag{7}$$



Frage: Gibt es ein $c > 0$, so dass

$$c\cosh\frac{1}{c} = r$$



Wir wissen: $ce^{1/c} \overset{c\to 0}{\longrightarrow} \infty$

$$f'(c) = \cosh\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\sinh\frac{1}{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh\frac{1}{c} = c\cosh\frac{1}{c}$$

$\exists! c_0 > 0$ mit

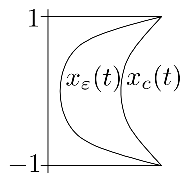
$$\sinh\frac{1}{c_0} \quad = \quad c_0\cosh\frac{1}{c_0}$$

das heisst $f'(c_0) = 0$ und c_0 ist ein globales Minimum von f.

- $r < r_0$: $\nexists$ Lösung
- $r = r_0$: $\exists!$ Lösung
- $r > r_0$: $\exists$ 2 Lösungen

Sei $\varepsilon < c_0 : \varepsilon\cosh\frac{1}{\varepsilon} = r$, $c > c_0 : c\cosh\frac{1}{c} = r$ und $c_0 < c < r$

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= \varepsilon\cosh\frac{t}{\varepsilon} \\ x_c(t) &= c\cosh\frac{t}{c} \end{aligned}$$



Wir wollen nun die Flächen $A(x_\varepsilon)$, $A(x_c)$ berechnen:

$$\begin{aligned} A(x_c) &= 2\pi\int_{-1}^{1} x_c(t)\sqrt{1+\dot{x}_c(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{1} x_c(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &:= 2\pi c\int_{-1}^{1}\cosh^2\frac{t}{c}\,\mathrm{d}t \\ &= 4\pi c\int_{0}^{1}\cosh^2\frac{t}{c}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi c\int_{0}^{1}\left(e^{2t/c}+e^{-2t/c}+2\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi c + \frac{\pi c^2}{2}e^{2/c} - \frac{\pi c^2}{2}e^{-2/c} \\ &= 2\pi c + \frac{\pi c^2}{2}\left(e^{1/c}+e^{-1/c}\right)\left(e^{1/c}-e^{-1/c}\right) \\ &= 2\pi c + 2\pi c^2\cosh\frac{1}{c}\sinh\frac{1}{c} \\ &= 2\pi c + 2\pi r c\sinh\frac{1}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\cosh\frac{1}{c} = r \quad &\Rightarrow \quad c^2\cosh^2\frac{1}{c} = r^2 \\
&\Rightarrow \quad c^2\sinh^2\frac{1}{c} = c^2\left(\cosh^2\frac{1}{c} - 1\right) \\
&\Rightarrow \quad c\sinh\frac{1}{c} = \sqrt{r^2 - c^2} \\
&\Rightarrow \quad A(x_c) = 2\pi\left(c + rc\sinh\frac{1}{c}\right) \\
&\Rightarrow \quad A(x_c) = 2\pi\left(c + r\sqrt{r^2 - c^2}\right) \\
&\Rightarrow \quad A(x_\varepsilon) = 2\pi\left(\varepsilon + r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}\right)
\end{aligned}$$

- Fall 1: $\varepsilon < c_0$

$$\begin{aligned}
A(x_\varepsilon) &= 2\pi\varepsilon + 2\pi r\varepsilon\underbrace{\left(\cosh\frac{1}{\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}\right)}_{\sinh(1/\varepsilon)} \\
&= 2\pi r^2 + 2\pi\varepsilon - 2\pi\underbrace{r\varepsilon e^{-1/\varepsilon}}_{<\varepsilon} \\
&> 2\pi r^2 \\
r &= \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{1/\varepsilon} + e^{-1/\varepsilon}\right) \\
re^{-1/\varepsilon} &= \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\left(1 + e^{-2/\varepsilon}\right)}_{<2} \quad < \quad \varepsilon \quad < \quad c_0 \quad < \quad 1 \\
\Rightarrow 2\pi r^2 &< A(x_\varepsilon) < 2\pi r^2 + 2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

- Fall 2: $c > c_0$

$$\begin{aligned}
A(x_c) &= 2\pi c + 2\pi rc\sinh\frac{1}{c} \\
&= 2\pi r\left(\frac{1}{\cosh\frac{1}{c}} + c\sinh\frac{1}{c}\right) \\
&= 2\pi r\underbrace{\left(\frac{1}{\cosh\delta} + \frac{\sinh\delta}{\delta}\right)}_{<2}
\end{aligned}$$

$\delta := \frac{1}{c}$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\cosh\delta} + \frac{\sinh\delta}{\delta}\right) = 2$$

Übung 1: Zeige

$$\frac{1}{\cosh\delta} + \frac{\sinh\delta}{\delta} < 2$$

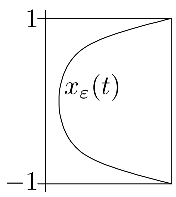
Hinweis:

$$f(\delta) = \frac{\sinh\delta}{\delta} < g(\delta) = 2 - \frac{1}{\cosh\delta}$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \qquad g(0) = g'(0) = 0 \qquad f''(0) = 1/3 \qquad g''(0) = 1$$

Es folgt

$$A(x_c) < 4\pi r \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{A(x_{c(r)})}{4\pi r} = 1$$



$$2\pi r^2 < A(x_\varepsilon) > A(x_c) < 4\pi r$$

Übung 2: $A(x_c) < A(x_\varepsilon)\ \forall r$

$$\varepsilon = \varepsilon(r) \qquad c = c(r)$$

$$A(x_{\varepsilon(r)}) = 2\pi(\varepsilon + r\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = A(x_{\varepsilon(r)})$$

$$\varepsilon \cosh \frac{1}{\varepsilon} = r$$

Ist x_c ein globales Minimum?
Betrachte $r = r_0$ und damit $\varepsilon = c = c_0$

$$2\pi r_0^2 < A(x_{c_0}) < 4\pi r_0$$

$\exists! r_1 : \forall r \geq r_1$

$$2\pi r^2 \quad \geq \quad A(x_{c(r)})$$

Behauptung (ohne Beweis): Für $r \geq r_1$ gilt:

$$\begin{aligned} A(x_c) &= \inf_{\substack{x:[-1,1]\to\mathbb{R}^+ \\ x(-1)=x(1)=r}} 2\pi \int_{-1}^{1} x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi(c + r\sqrt{r^2 - c^2}) \end{aligned}$$

wobei $c_0 < c < r$ und

$$c \cosh \frac{1}{c} = r$$

Allgemeines Variationsproblem:

$$S(x) \quad = \quad \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

Euler-Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) \tag{8}$$

Legendre-Transformation: Die Idee ist, eine neue Variable einzuführen

$$y_\nu(t) \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x(t), \dot{x}(t)) \tag{9}$$

Frage: Erfüllen x, y eine gewisse Differentialgleichung erster Ordnung?

$$y_\nu \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x, p) \tag{10}$$

Können wir die Gleichung (9) nach p auflösen?
Das heisst $\exists G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$G(x,y) = p \quad \Leftrightarrow \quad y_\nu = \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x, p)$$

$$\begin{aligned} \overset{\exists G}{\underset{(7),(8)}{\Rightarrow}} \dot{x} &= G(x,y) \overset{\text{Übg.}}{=} \frac{\partial H}{\partial y_\nu}(x,y) \\ \dot{y}_\nu &= \frac{\partial L}{\partial x_\nu}(x, G(x,y)) = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu}(x,y) \overset{\text{Übg.}}{=} \frac{\partial H}{\partial x_\nu}(x,y) \end{aligned}$$

$$H(x,y) \quad = \quad \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(x,y) \frac{\partial L}{\partial p_\nu}(x, G(x,y)) - L(x, G(x,y)) \tag{11}$$

$\to$ Hamilton-Funktion

13 Der implizite Funktionen-Satz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Nun wollen wir die Gleichung

$$f(x) = y$$

lösen (für vorgegebenes y), das heisst die Gleichungen

$$f_i(x_1, ..., x_n) = y_i$$

für $i = 1, ..., m$.

13.1 Diffeomorphismen

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heisst C^k-*Diffeomorphismus*, wenn gilt

i) $f : U \to V$ ist bijektiv

ii) $f \in C^k(U, V)$

iii) $f^{-1} \in C^k(V, U)$

Lemma 1: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und sei $f : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, dann folgt

i) $n = m$

ii) $\det(\mathrm{d}f(x)) \neq 0 \ \forall x \in U$

iii) $\mathrm{d}f^{-1}(f(x)) = \mathrm{d}f(x)^{-1} \ \forall x \in U$

Bemerkung: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ zwei Matrizen mit $BA = \mathbf{1}_{n \times n}$ und $AB = \mathbf{1}_{m \times m}$

$$\Rightarrow n = m$$

Beweis: Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow Ae_1, ..., Ae_n$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^m$
$\Rightarrow n = m$ (QED)

Beweis von Lemma 1: Setze $g := f^{-1}$. Sei $x \in U$, $y := f(x) \in V$ und $A := \mathrm{d}f(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B := \mathrm{d}g(y) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow BA &= \mathrm{d}g(f(x))\mathrm{d}f(x) \\ &\overset{\text{KR}}{=} \mathrm{d}(\underbrace{g \circ f}_{id})(x) \\ &= \mathbf{1}_{n \times n} \end{aligned}$$

genauso: $AB = \mathbf{1}_{m \times m}$
$\Rightarrow$ Mit der Bemerkung gilt dann

- $n = m$
- $\mathrm{d}f^{-1}(f(x)) = B = A^{-1} = \mathrm{d}f(x)^{-1}$
- $\det(A)\det(B) = \det(AB) = 1$ (QED)

Beispiel 1: $U = \mathbb{R} \xrightarrow{f} V = (0, \infty)$

$$f(x) := e^x \qquad f^{-1}(y) = \log y$$

Beispiel 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$ ist bijektiv und C^∞
f^{-1} ist stetig, aber nicht C^1

Beispiel 3: Sei $U = I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, dann gilt

a) $J := f(I)$ ist ein offenes Intervall (folgt, da f auf I kein lokales Extremum hat und aus dem Zwischenwertsatz)

b) $f : I \to J$ ist bijektiv (surjektiv, nach Definition und injektiv, da f strikt monoton wachsend ist)

c) f^{-1} ist stetig differenzierbar (nach Kapitel 6, Satz 3)

Beispiel 4: Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, $V = \mathbb{R}^n$ und

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

- f ist eine C^1-Funktion
- Sei $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
  Können wir die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} = y \tag{1}$$

eindeutig lösen?

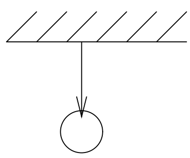
$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{\|x\|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} = \|y\| \\
&\Rightarrow \quad \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} = \|y\|^2 \\
&\Rightarrow \quad \|x\|^2 = (1 - \|x\|^2)\|y\|^2 \\
&\Rightarrow \quad \|x\|^2 = \frac{\|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \\
&\Rightarrow \quad 1 - \|x\|^2 = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad x = y\sqrt{1 - \|x\|^2} = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv und

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

ist eine C^1-Funktion.

Beispiel 5: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$, $V = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$



$f : U \to V$ mit $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$ ist holomorph

a) $z \in U$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$$

b) $\frac{z-i}{z+i} = \zeta \Leftrightarrow z = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$

$$\overset{\zeta \in V}{\Rightarrow} \operatorname{Im} i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta} > 0$$

$\Rightarrow f : U \to V$ bijektiv
$\Rightarrow f^{-1}(\zeta) = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$
$\Rightarrow f, f^{-1}$ sind holomorph, also C^1
$\Rightarrow f$ ist ein C^1-Diffeomorphismus

Beispiel 6: $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist offen

$$\Rightarrow \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad = \quad \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\} \quad = \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$
Sei $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ die Abbildung $f(A) := A^{-1}$.

$$f \circ f(A) = f(A^{-1}) = (A^{-1})^{-1} = A$$

$\to f$ ist bijektiv und $f = f^{-1}$

Behauptung: f ist ein C^∞-Diffeomorphismus, das heisst f ist C^k für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Induktion

- $k = 1$: f ist eine C^1-Funktion und die Ableitung

$$\mathrm{d}f(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

hat die Form

$$\mathrm{d}f(A)\widehat{A} = -A^{-1}\widehat{A}A^{-1}$$

für $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Zu zeigen:

$$\lim_{\widehat{A}\to 0} \frac{\|(A+\widehat{A})^{-1} - A^{-1} + A^{-1}\widehat{A}A^{-1}\|}{\|\widehat{A}\|} \quad = \quad 0$$

Beweis: $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|B\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} < 1$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} - B)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} B^k \\
\Rightarrow (A - AB)^{-1} &= (A(\mathbf{1} - B))^{-1} \\
&= (\mathbf{1} - B)^{-1}A^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} B^k A^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (A - AB)^{-1} - A^{-1} - BA^{-1} &= \sum_{k=2}^{\infty} B^k A^{-1} \\
\Rightarrow \|(A - AB)^{-1} - A^{-1} - BA^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} B^k A^{-1} \right\| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \|B^k A^{-1}\| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \|B\|^k \|A^{-1}\| \\
&= \frac{\|B\|^2 \|A^{-1}\|}{1 - \|B\|}
\end{aligned}$$

$\widehat{A} := -AB$, $B := -A^{-1}\widehat{A}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|(A+\widehat{A})^{-1} - A^{-1} + A^{-1}\widehat{A}A^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\widehat{A}\|^2\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\widehat{A}\|} \\ &\leq \frac{\|\widehat{A}\|^2\|A^{-1}\|^3}{1-\|A^{-1}\|\|\widehat{A}\|}\end{aligned}$$

- $k > 1$: Sei f eine C^{k-1}-Funktion. Wir wählen eine Basis E_{ij}, $i, j = 1, ..., n$ von $\mathbb{R}^{n\times n}$ wobei E_{ij} folgende Form hat

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 \quad 1 \quad 0 \,\cdots & 0 \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(A+tE_{ij}) \\ &= \mathrm{d}f(A)E_{ij} \\ &= -A^{-1}E_{ij}A^{-1} \\ &= -f(A)E_{ij}f(A)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine C^{k-1}-Funktion $\forall i, j$
$\Rightarrow f$ ist C^k

Lemma 2: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to V$ ein C^1-diffeomorphismus und $f \in C^\ell(U, V)$
$\Rightarrow f^{-1} \in C^\ell(V, U)$, das heisst f ist ein C^ℓ-diffeomorphismus.

Beweis: Induktion

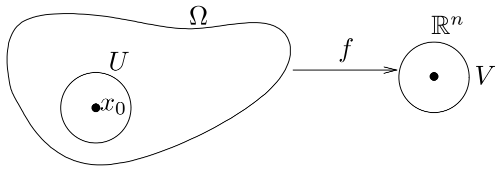
- $k = 1$: $f^{-1} \in C^1$ nach Voraussetzung
- $\ell \geq k > 1$: $f^{-1} \in C^{k-1}$
  $\Rightarrow$ Für $y \in V$ gilt

$$\mathrm{d}f^{-1}(y) \overset{\text{Lem1}}{=} \mathrm{d}f(f^{-1}(y))^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

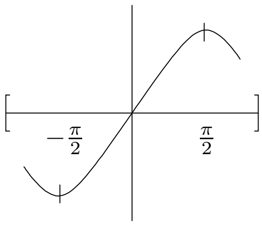
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f^{-1}", "C^{k-1}"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{d}f^{-1}"'] & U \arrow[r, "\mathrm{d}f", "C^{\ell-1}"'] & \mathbb{R}^{n\times n} \arrow[r, "\text{inv.}", "C^\infty"'] & \mathbb{R}^{n\times n} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}f^{-1} \in C^{k-1}$
$\Rightarrow f^{-1} \in C^k$ (QED)

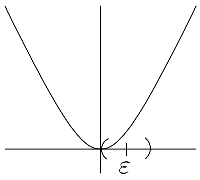
Satz 1 (Inverse Funktionen): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, $x_0 \in \Omega$ und $\det(\mathrm{d}f(x_0)) \neq 0$.
$\Rightarrow \exists$ offenes $U \subset \Omega$, so dass $x_0 \in U$, $V := f(U)$ offen ist und $f|_U : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.



Beispiel 1: $n = 1$, $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $f'(x_0) = 1$



Beispiel 2: $f(x) = x^2$, $x_0 = \varepsilon$



Notation: $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

Lemma 3: Sei $r > 0$ und $\psi : B_r \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, so dass $\psi(0) = 0$ und $\forall x \in B_r$

$$\|\mathrm{d}\psi(x) - \mathbf{1}\| < \frac{1}{2}$$

dann folgt

1) ψ ist injektiv
2) $\psi(B_r) = \{\psi(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < r\}$ ist offen
3) $B_{r/2} \subset \psi(B_r) \subset B_{2r}$
4) $\psi^{-1} : \psi(B_r) \to B_r$ ist C^1

Beweis von Satz 1: Mit Lemma 3
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $x_0 \in \Omega$, $A := \mathrm{d}f(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$

$$\begin{aligned} \psi(x) &:= A^{-1}\left(f(x_0 + x) - f(x_0)\right) \\ \Rightarrow \mathrm{d}\psi(x) - \mathbf{1} &= A^{-1}\mathrm{d}f(x_0 + x) - \mathbf{1} \\ &= A^{-1}\left(\mathrm{d}f(x_0 + x) - \mathrm{d}f(x_0)\right) \end{aligned}$$

Da $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig ist $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x\| < \delta \quad &\Rightarrow \quad x_0 + x \in \Omega \text{ und } \|\mathrm{d}f(x_1 + x) - \mathrm{d}f(x_0)\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \\ &\Rightarrow \quad \|\mathrm{d}\psi(x) - \mathbf{1}\| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Lemma 3 folgt

- $\psi(B_\delta) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen
- $\psi : B_\delta \to \psi(B_\delta)$ ist eine C^1-Diffeomorphismus

Definiere die beiden in $\mathbb{R}^n$ offenen Mengen

$$\begin{aligned} U &:= B_\delta(x_0) = \{x_0 + x \mid \|x\| < \delta\} \\ V &:= f(U) = f(x_0) + A\psi(B_\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) &= A\psi(x) + f(x_0) \quad x \in B_\delta(x_0) \\ y = f(x) &= A\psi(x - x_0) + f(x_0) \quad x \in U \end{aligned}$$

Es folgt:

- $f|_U : U \to V$ ist bijektiv
- $(f|_U)^{-1} : V \to U$ ist C^1 und es gilt $\forall y \in V$

$$(f|_U)^{-1}(y) = \psi^{-1}\left(A^{-1}(y - f(x_0))\right) + x_0$$

(QED)

Beweis von Lemma 3: Definiere $\varphi : B_\delta \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(x) := x - \psi(x)$$

$\Rightarrow \mathrm{d}\varphi(x) = \mathbf{1} - \mathrm{d}\psi(x)$
$\Rightarrow \|\mathrm{d}\varphi(x)\| < \frac{1}{2}\ \forall x \in B_\delta$
$\Rightarrow$ Nach dem Mittelwertsatz gilt $\forall x, x' \in B_\delta$

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(x')\| &\leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \\ \Rightarrow \|\psi(x) - \psi(x')\| &= \|x - \varphi(x) - x' + \varphi(x')\| \\ &\leq \|x - x'\| + \|\varphi(x') - \varphi(x)\| \\ &\leq \frac{3}{2}\|x - x'\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi(B_r) \subset B_{2r}$

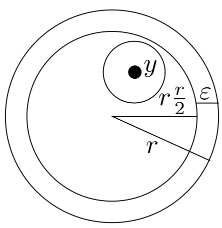
Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \psi(x')\| &\geq \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\ &\geq \frac{1}{2}\|x - x'\| \qquad (\star) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi : B_r \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv.

Behauptung 1: $B_{r/2} \subset \psi(B_r)$

Beweis: Sei $y \in B_{r/2}$



Definiere $\varepsilon := \frac{r}{2} - \|y\| > 0$, $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r - \varepsilon\}$ und $f_y : K \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_y(x) := \varphi(x) + y$$

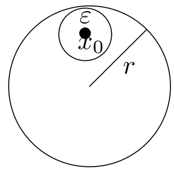
Es gilt: $x \in K \Rightarrow f_y(x) \in K$, $\|x\| \leq r - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f_y(x)\| &= \|\varphi(x) + y\| \\ &= \|\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0) + y\| \\ &\leq \|\varphi(x) - \varphi(0)\| + \|\varphi(0)\| + \|y\| \\ &\leq \frac{1}{2}(r - \varepsilon) + \frac{r}{2} - \varepsilon \\ &= r - \frac{3}{2}\varepsilon \\ &\leq r - \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_y : K \to K$ ist eine Kontraktion
$\Rightarrow$ Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (Kapitel 9.2) $\exists! x \in K : f_y(x) = \varphi(x) + y = x - \psi(x) + y = x$ ($\forall y \in B_{r/2}$, da $\|f_y(x)\| \leq r - \varepsilon$)
$\Rightarrow \psi(x) = y$, wobei $\|x\| \leq r - \varepsilon$
$\Rightarrow B_{r/2} \subset \psi(B_r)$

Behauptung 2: $\psi(B_r)$ ist offen

Beweis: Sei $y_0 = \psi(x_0) \in \psi(B_r)$, also $\|x_0\| < r$.
Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset B_r$ (z.B. $\varepsilon := r - \|x_0\|$)



Wir zeigen:

$$B_{\varepsilon/2}(\psi(x_0)) \subset \psi(B_\varepsilon(x_0)) \subset \psi(B_r)$$

Definiere $\psi_0 : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi_0(x) := \psi(x_0 + x) - \psi(x_0)$$

$\Rightarrow \psi_0(0) = 0$

$$\|\mathbf{1} - \mathrm{d}\psi_0(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in B_\varepsilon$$

$\overset{\text{Beh1}}{\Rightarrow} B_{\varepsilon/2} \subset \psi_0(B_\varepsilon) = \psi(B_\varepsilon(x_0)) - \psi(x_0)$
$\Rightarrow \psi(x_0) + B_{\varepsilon/2} = B_{\varepsilon/2}(\psi(x_0)) \subset \psi(B_\varepsilon(x_0))$

Behauptung 3: $\psi^{-1} : \psi(B_r) \to B_r$ ist stetig differenzierbar

Beweis von Behauptung 3:

Zu zeigen: Für $y_0 \in \psi(B_r)$ ist ψ^{-1} differenzierbar an der Stelle y_0 und

$$\mathrm{d}\psi^{-1}(y_0) = \mathrm{d}\psi(\psi^{-1}(y_0))^{-1}$$

Diese Formel zeigt, dass $\mathrm{d}\psi^{-1} : \psi(B_r) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig ist

$$\begin{tikzcd} \psi(B_r) \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{d}\psi^{-1}"'] & B_r \arrow[r, "\mathrm{d}\psi"] & \mathbb{R}^{n\times n} \arrow[r, "\text{inv.}"] & \mathbb{R}^{n\times n} \end{tikzcd}$$

Sei $x_0 := \psi^{-1}(y_0) \in B_r$ und $A := \mathrm{d}\psi(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$0 < \|x - x_0\| < 2\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\psi(x) - \psi(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Sei zusätzlich δ so klein, dass $B_\delta(y_0) \subset \psi(B_r)$ (Behauptung 2). Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - y_0\| < \delta$, dann ist $y \in \psi(B_r)$ und wir definieren $x := \psi^{-1}(y) \in B_r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x - x_0\| &\overset{(\star)}{\leq} 2\|\psi(x) - \psi(x_0)\| \\ &= 2\|y - y_0\| \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

$$\|\psi(x) - \psi(x_0) - A(x - x_0)\| < \frac{\varepsilon}{4} \|x - x_0\|$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\| \\ &\quad= \|x - x_0 - A^{-1}(\psi(x) - \psi(x_0))\| \\ &\quad= \|A^{-1}(A(x - x_0) - \psi(x) + \psi(x_0))\| \\ &\quad\leq \|A^{-1}\| \cdot \underbrace{\|\psi(x) - \psi(x_0) - A(x - x_0)\|}_{\frac{\varepsilon}{4}\|x - x_0\|} \\ &\quad\leq \frac{\varepsilon}{4} \|A^{-1}\| \cdot \|x - x_0\| \\ &\quad\leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\leq 2} \cdot \|y - y_0\| \end{aligned}$$

da

$$\|\mathbf{1} - A\| < \frac{1}{2} \qquad A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1} - A)^k$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{1} - A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\|\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} = 0$$

das heisst, ψ^{-1} ist differenzierbar an der Stelle y_0 und $\mathrm{d}\psi^{-1}(y_0) = A^{-1} = \mathrm{d}\psi(x_0)^{-1}$ (QED)

Korollar 1 (Offenheitssatz): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung und $\det(\mathrm{d}f(x)) \neq 0 \ \forall x \in U$.
$\Rightarrow f(U)$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Sei $y_0 \in f(U)$ und $x_0 \in U$ mit $f(x_0) = y_0$ und $\det(\mathrm{d}f(x_0)) \neq 0$.
$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} \exists U_0 \subset U$ offen, so dass

- $x_0 \in U_0$
- $V_0 = f(U_0)$ ist offen
- $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ ist ein C^1-Diffeomorphismus

$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \in V_0$
$\Rightarrow$ Da V_0 offen ist $\exists \varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon(y_0) \subset V_0 = f(U_0) \subset f(U)$$

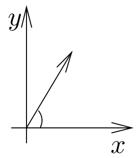
wobei $B_\varepsilon(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\| < \varepsilon\}$. (QED)

Korollar 2 (Diffeomorphiesatz): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung, $\det(\mathrm{d}f(x)) \neq 0 \ \forall x \in U$ und sei f injektiv.
$\Rightarrow f$ ist ein C^k-Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

Beweis: $V := f(U)$ ist offen nach Korollar 1, $f : U \to V$ ist bijektiv nach Voraussetzung, $f \in C^k(U, V)$ nach Voraussetzung.
$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} \forall y_0 \in V\ \exists V_0 \subset V$ offen, so dass $y_0 \in V_0$ und $f^{-1}|_{V_0}$ ist C^k
$\Rightarrow f^{-1} \in C^k(V, U)$ (QED)

Beispiel 1 (Polar-Koordinaten): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$



Die Ableitung ist dann

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle = 0 \qquad \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1 \qquad \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\| = r$$

Die Determinante der Ableitung ist $\forall r \neq 0\ \forall\theta$

$$\det(\mathrm{d}f(r, \theta)) = r$$

$\Rightarrow \exists U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^2$ offen, wobei $(r, \theta) \in U_0$ und $f(r, \theta) \in V_0 = f(U_0)$, so dass $f : U_0 \to V_0$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$f(r, \theta + 2\pi) = f(r, \theta)$$

$\Rightarrow f$ ist nicht injektiv auf $\{r \neq 0\}$

Definiere $U := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$
$\Rightarrow f|_U$ ist injektiv
$\Rightarrow V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \Rightarrow x > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$

$f : U \to V$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.
Was ist $\mathrm{d}(f^{-1})(x, y)$?

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \theta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}(f^{-1})(x, y) &= \mathrm{d}f(r, \theta)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Beispiel 2 (Polar-Koordinaten in $\mathbb{R}^n$): Wir betrachten $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. f_2 ist wie in Beispiel 1.

$$\begin{aligned}
f_3(r,\theta_1,\theta_2) &= \begin{pmatrix} r\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\sin\theta_2 \end{pmatrix} \\
f_n(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) &= \begin{pmatrix} r\cos\theta_1\dots\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_2\cos\theta_3\dots\cos\theta_{n-1} \\ \vdots \\ r\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{n-1}(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-2})\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die Norm gilt per Rekursion:

$$\|f_n(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})\|_{\mathbb{R}^n} = |r|$$

Die Partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_n}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial r}\cos\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1} \end{pmatrix} & \left\|\frac{\partial f_n}{\partial r}\right\| &= 1 \\
\frac{\partial f_n}{\partial \theta_\nu} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \theta_\nu}\cos\theta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} & \left\|\frac{\partial f_n}{\partial \theta_\nu}\right\| &= |r\cos\theta_{\nu+1}\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-1}| \\
\frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}} &= \begin{pmatrix} -f_{n-1}\sin\theta_{n-1} \\ r\cos\theta_{n-1} \end{pmatrix} & \left\|\frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}}\right\| &= |r|
\end{aligned}$$

Behauptung: Die Vektoren $\frac{\partial f_n}{\partial r}$, $\frac{\partial f_n}{\partial \theta_1}$, ..., $\frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}}$ sind paarweise zueinander orthogonal

Beweis: Durch Induktion und scharfes hinsehen

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f_n}{\partial r}, \frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{f_{n-1}}{r}\cos\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f_{n-1}\sin\theta_{n-1} \\ r\cos\theta_{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}\frac{1}{r}\underbrace{\langle f_{n-1}, f_{n-1}\rangle}_{r^2} + r\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{d}f_n^T\mathrm{d}f_n &= \begin{pmatrix} \left\|\frac{\partial f_n}{\partial r}\right\|^2 & & & 0 \\ & \left\|\frac{\partial f_n}{\partial \theta_1}\right\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \left\|\frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}}\right\|^2 \end{pmatrix} \\
\det(\mathrm{d}f_n^T\mathrm{d}f_n) &= r^{2n-2}\cos^{2n-4}\theta_{n-1}\cos^{2n-6}\theta_{n-2}...\cos^2\theta_2 \\
&= \det(\mathrm{d}f_n)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\det(\mathrm{d}f(r,\theta_1,...,\theta_{n-1}))| = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\cos^{j-1}\theta_j$$

Es folgt

$$\det(\mathrm{d}f_n) \neq 0 \iff r \neq 0,\ \cos\theta_j \neq 0,\ j = 2,...,n-1$$

Definiere

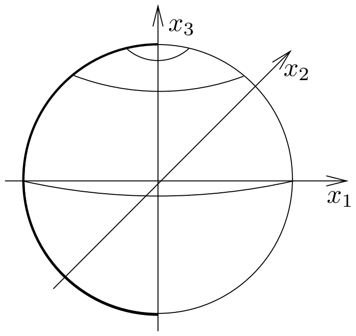
$$U_n := \{(r,\theta_1,...,\theta_{n-1}) \mid r > 0,\ -\pi < \theta_1 < \pi,\ -\pi/2 < \theta_j < \pi/2\,\forall i \geq 2\}$$

dann gilt

$$V = f_n(U_n) = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0 \Rightarrow x_1 > 0\}$$

und $f_n : U_n \to V_n$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

Zur Vorstellung:



Beispiel 3: Definiere eine Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$f(A) = e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Behauptung: f ist stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(A)\widehat{A} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(A + t\widehat{A}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} A^j \widehat{A} A^{k-1-j} \qquad (1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\widehat{A}A^{k-1} + A\widehat{A}A^{k-2} + ... + A^{k-1}\widehat{A}\right) \\
\mathrm{d}f(0)\widehat{A} &= \widehat{A}
\end{aligned}$$

Der lineare Operator $\mathrm{d}f(0) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Identität, also ist $\mathrm{d}f(0)$ invertierbar.

$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow}$ $\exists$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{0} \in U$, $\mathbf{1} \in V$, so dass

$$U \to V \quad : \quad A \to e^A$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: Im Fall $A\widehat{A} = \widehat{A}A$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(A)\widehat{A} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k\widehat{A}A^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{A} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \widehat{A}e^A \\
&= e^A\widehat{A}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad t \mapsto e^{At}$$

ist stetig differenzierbar und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(At) = \mathrm{d}f(At)A = Ae^{At} = e^{At}A$$

$\Rightarrow$ Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad t \mapsto e^{At}$$

C^∞ und $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\, e^{At} \quad = \quad A^k e^{At} \quad = \quad e^{At} A^k$$

Satz 2: Sei $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius

$$\rho \quad := \quad \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} > 0$$

Sei $\Omega := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \|A\| < \rho\}$. Definiere $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$f(A) \quad := \quad \sum_{k=0}^\infty a_k A^k$$

$\Rightarrow$ f ist stetig differenzierbar und

$$\mathrm{d}f(A)\widehat{A} \quad = \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \sum_{j=0}^{k-1} A^j \widehat{A} A^{k-1-j}$$

Bemerkung: f ist sogar eine C^∞-Abbildung.

Beweis von Satz 2: Für $k \geq 1$ definieren wir

$$L_k(A, \widehat{A}) \quad := \quad \sum_{j=0}^{k-1} A^j \widehat{A} A^{k-1-j}$$

Die Abbildung

$$\widehat{A} \quad \mapsto \quad L_k(A, \widehat{A})$$

ist linear. Definiere für $k \geq 2$

$$R_k(A, \widehat{A}) \quad := \quad (A + \widehat{A})^k - A^k - L_k(A, \widehat{A})$$

- *Schritt 1:* Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|L_k(A, \widehat{A})\| \quad \leq \quad k\|A\|^{k-1}\|\widehat{A}\| \qquad k \geq 1 \tag{1}$$

$$\|R_k(A, \widehat{A})\| \quad \leq \quad \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} \|A\|^{k-j}\|\widehat{A}\|^j \qquad k \geq 2 \tag{2}$$

Beweis:

(1) Durch hinsehen!

(2) Durch Induktion:

$k = 2$:

$$R_2(A, \widehat{A}) = \widehat{A}^2 \quad \checkmark$$

$k \geq 3$: (2) gelte für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(A + \widehat{A})^{k+1} \quad &= \quad (A + \widehat{A})^k (A + \widehat{A}) \\
&= \quad (A^k + L_k(A, \widehat{A}) + R_k(A, \widehat{A}))(A + \widehat{A}) \\
&= \quad A^{k+1} + \underbrace{L_k(A, \widehat{A})A + A^k\widehat{A}}_{L_{k+1}(A,\widehat{A})} \\
&\quad\ + \underbrace{L_k(A, \widehat{A})\widehat{A} + R_k(A, \widehat{A})(A + \widehat{A})}_{R_{k+1}(A,\widehat{A})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|R_{k+1}(A,\widehat{A})\| & \\
\leq\ & \|L_k(A,\widehat{A})\|\cdot\|\widehat{A}\| + \|R_k(A,\widehat{A})\|\cdot\|A+\widehat{A}\| \\
\leq\ & k\|A\|^{k-1}\|\widehat{A}\|^2 + \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\|A\|^{k-j}\|\widehat{A}\|^j\left(\|A\|+\|\widehat{A}\|\right) \\
\leq\ & \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\|A\|^{k+1-j}\|\widehat{A}\|^j + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\|A\|^{k-j}\|\widehat{A}\|^{j+1} \\
=\ & \sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}\|A\|^{k+1-j}\|\widehat{A}\|^j + \sum_{j=2}^{k+1}\binom{k}{j-1}\|A\|^{k+1-j}\|\widehat{A}\|^j \\
\leq\ & \sum_{j=2}^{k+1}\binom{k+1}{j}\|A\|^{k+1-j}\|\widehat{A}\|^j
\end{aligned}$$

da $\binom{k}{j}+\binom{k}{j-1}=\binom{k+1}{j}$.

- *Schritt 2:* Seien $A,\widehat{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Folgende Reihen konvergieren absolut:

$$\begin{aligned}
L(A,\widehat{A}) &:= \sum_{k=1}^{\infty} a_k L_k(A,\widehat{A}) \qquad \|A\|<\rho \\
R(A,\widehat{A}) &:= \sum_{k=2}^{\infty} a_k R_k(A,\widehat{A}) \qquad \|A\|+\|\widehat{A}\|<\rho
\end{aligned}$$

Beweis: Für $\|A\|<\rho$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\cdot\|L_k(A,\widehat{A})\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|\cdot\|A\|^{k-1}\right)\|\widehat{A}\|$$

Wir machen folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
\binom{k}{j} &= \frac{k(k-1)(k-2)...(j+1)}{(k-j)!} \\
&= \frac{k(k-1)}{j(j-1)}\binom{k-2}{j-2} \\
&\leq k(k-1)\binom{k-2}{j-2}
\end{aligned}$$

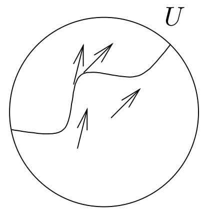
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\cdot\|R_k(A,\widehat{A})\| & \\
\leq\ & \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=2}^{\infty}\binom{k}{j}\|A\|^{k-j}\|\widehat{A}\|^j \\
\leq\ & \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=2}^{\infty}k(k-1)\binom{k-2}{j-2}\|A\|^{k-j}\|\widehat{A}\|^{j-2}\|\widehat{A}\|^2 \\
=\ & \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|k(k-1)\left(\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-2}{i}\|A\|^{k-2-i}\|\widehat{A}\|^i\right)\|\widehat{A}\|^2 \\
=\ & \|\widehat{A}\|^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)|a_k|\left(\|A\|+\|\widehat{A}\|\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

konvergiert für $\|A\|+\|\widehat{A}\|<\rho$.

- *Schritt 3:* f ist differenzierbar an der Stelle A und $\mathrm{d}f(A)\widehat{A}=L(A,\widehat{A})$

Beweis: Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\|<\rho$. Sei $\widehat{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\|\widehat{A}\| < \delta := \frac{\rho-\|A\|}{2}$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|A\| + \|\widehat{A}\| &< \|A\| + \delta = \rho - \delta \\
\Rightarrow \|R(A, \widehat{A})\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot \|R_k(A, \widehat{A})\| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k| \left(\|A\| + \|\widehat{A}\|\right)^{k-2} \|\widehat{A}\|^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|(\rho-\delta)^{k-2}\right) \|\widehat{A}\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \widehat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|\widehat{A}\| < \delta$ gilt

$$\|R(A, \widehat{A})\| \leq c\|\widehat{A}\|^2$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
f(A+\widehat{A}) - f(A) - L(A, \widehat{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((A+\widehat{A})^k - A^k - L_k(A, \widehat{A})\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k R_k(A, \widehat{A}) \\
&= R(A, \widehat{A})
\end{aligned}$$

und wir bekommen für $\|\widehat{A}\| < \delta$

$$\underbrace{\frac{\|f(A+\widehat{A}) - f(A) - L(A, \widehat{A})\|}{\|\widehat{A}\|}}_{\stackrel{\widehat{A}\to 0}{\longrightarrow} 0} \leq c\|\widehat{A}\|$$

- *Schritt 4:* $\mathrm{d}f$ ist stetig

  Beweis: Seien E_{ij} die Matrizen, die überall 0 sind, ausser an der Stelle i, j. Die Matrizen E_{ij} mit $i, j = 1, ...n$ bilden dann eine Basis von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) &= \mathrm{d}f(A)E_{ij} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(A+tE_{ij}) \\
&= L(A, E_{ij}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k L_k(A, E_{ij}) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k L_k(A, E_{ij}) \\
&=: \lim_{m\to\infty} f_{ijm}(A)
\end{aligned}$$

  Die Funktion $f_{ijm} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stetig und

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) = \lim_{m\to\infty} f_{ijm}(A)$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| < \rho$.

Behauptung: $(f_{ijm})_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $C^0(\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \|A\| \leq \rho - \delta\}, \mathbb{R}^{n\times n})$
$\Rightarrow f_{ijm}$ konvergiert gleichmässig gegen $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ in $\{A \mid \|A\| \leq \rho - \delta\}$ $\forall \delta$.
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ ist stetig auf Ω.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m_0+1}^{\infty} k|a_k|(\rho-\delta)^{k-1} \quad < \quad \varepsilon$$

$\Rightarrow$ für $m > \ell \geq m_0$ gilt

$$f_{ijm}(A) - f_{ij\ell}(A) \quad = \quad \sum_{k=\ell+1}^{m} a_k L_k(A, E_{ij})$$

das heisst

$$\begin{aligned} \|f_{ijm}(A) - f_{ij\ell}(A)\| \quad &\leq \quad \sum_{k=\ell+1}^{m} |a_k| \cdot \|L_k(A, E_{ij})\| \\ &\leq \quad \sum_{k=\ell+1}^{m} k|a_k| \cdot \underbrace{\|A\|^{k-1}}_{\leq(\rho-\delta)^{k-1}} \underbrace{\|E_{ij}\|}_{=1} \\ &\leq \quad \sum_{k=\ell+1}^{\infty} k|a_k|(\rho-\delta)^{k-1} \\ &< \quad \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| \leq \rho - \delta$, also gilt $\forall m > \ell \geq m_0$

$$\sup_{\|A\|\leq\rho-\delta} \|f_{ijm}(A) - f_{ij\ell}(A)\| \quad < \quad \varepsilon$$

(QED)

Ziel: Die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad A \to e^A$$

ist C^∞.

Wir wissen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad t \mapsto e^{At}$$

C^∞ ist und dass $\forall A$ und $\forall t$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \quad = \quad A^k e^{At} \quad = \quad e^{At} A^k$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) \quad = \quad f(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

Für jedes $x_0 \in U$ gibt es eine Lösung $x : I \to U$ von (1), wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit $0 \in I$

Definiere $I(x_0) :=$ maximales Existenz-Intervall

Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass $\exists$ eine maximale Lösung

$$x : I(x_0) \to U$$

"maximal" heisst: Wenn $y : I \to U$ eine Lösung von (1) ist, dann gilt $I \subset I(x_0)$ und $y = x|_I$.
Definiere $\Omega := \{(x_0, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t \in I(x_0)\}$ und $\varphi : \Omega \to U$ durch

$$\varphi(x_0, t) \;\; := \;\; x(t)$$

wobei $x : I(x_0) \to U$ die eindeutige Lösung von (1) ist.

Fakt: Sei $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$.
$\Rightarrow \varphi \in C^k(\Omega, U)$

Beispiel: Sei $U = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A, \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f : U \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $f(A, \Phi) := \binom{\mathbf{0}}{A\Phi}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & \dot{A} = 0,\, \dot{\Phi} = A\Phi \\ \Rightarrow \quad & \varphi(A, \Phi, t) \;=\; (A, e^{At}\Phi) \\ \Rightarrow \quad & \varphi(A, \mathbf{1}, 1) = (A, e^A) \end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$
Aus dem Fakt folgt, dass φ C^∞ ist
$\Rightarrow$ Die Abbildung $A \mapsto e^A$ ist C^∞.

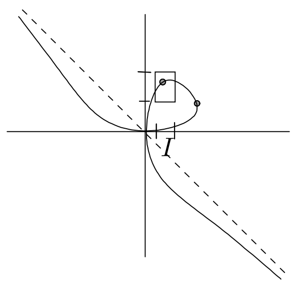
13.2 Der implizite Funktionen-Satz

Für $a > 0$ haben wir die Funktion

$$f(x, y) \;=\; x^3 + y^3 - 3axy$$

und wollen die Gleichung

$$f(x, y) \;=\; 0$$



lösen. Definiere $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

Frage: Können wir die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen? Können wir die Lösungsmenge lokal als Graphen einer Funktion $y = \varphi(x)$ darstellen?

Antwort: Ja, mit zwei Ausnahmen.

1. $x = 0$, $y = 0$
2. $x = \sqrt[3]{4}\,a$, $y = \sqrt[3]{2}\,a$

Annahme: $\exists$ C^1-Funktion $\varphi : I \to J$, so dass $\forall x \in I\, \forall y \in J$

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

In diesem Fall gilt $\forall x \in I$

$$f(x, \varphi(x)) \;=\; 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,\varphi(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ entweder bekommen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3ay \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3ax \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 = ay,\ y^2 = ax \\ &\Rightarrow \quad x^4 = a^3 x \\ &\Rightarrow \quad x = y = 0 \text{ oder } x = y = a \end{aligned}$$

Die schlechten Punkte sind die, bei denen

$$f(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

das heisst

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad \text{und} \quad y^2 = ax$$

$\Rightarrow x^3 = 2ax\sqrt{ax}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{3/2} &= 2a^{3/2} \\ \Rightarrow x = 2^{2/3}a & \qquad y = 2^{1/3}a \end{aligned}$$

Allgemeine Situation: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ offen, $x = (x_1, ..., x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_m(x,y) \end{pmatrix}$$

wobei $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ für $i = 1, ..., m$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\ell} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_\ell} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (\ell + m)} \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Sei $\xi \in \mathbb{R}^\ell$, $\eta \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x + t\xi, y + t\eta) &= \mathrm{d}f(x,y) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\eta \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Satz 3 (Der implizite Funktionen-Satz): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Funktion mit $k \in \mathbb{N}$. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und

$$\det\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^\ell$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $\exists C^k$-Abbildung $\varphi : U \to V$, so dass

(a) $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ und $U \times V \subset \Omega$

(b) $\varphi(x_0) = y_0$

(c) $\forall x \in U\ \forall y \in V$ gilt

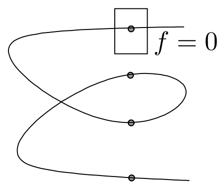
$$f(x, y) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = \varphi(x)$$

(d) $\forall x \in U$ gilt

$$d\varphi(x) \;=\; -\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

Bemerkung:

1. Wenn U, V geeignet gegeben sind, so ist $\varphi : U \to V$ durch Bedingung (c) eindeutig bestimmt.
2. φ ist durch f "implizit definiert"
3. φ existiert im Allgemeinen nur lokal



Beweis von Satz 3: Definiere $F : \Omega \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ durch

$$F(x, y) \;:=\; \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\ell\times\ell} & \mathbf{0}_{\ell\times m} \\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ \det(dF(x, y)) &= \det\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Voraussetzung gilt $\det(dF(x_0, y_0)) \neq 0$
$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} \exists$ offene Teilmenge $W \subset \Omega$ mit $(x_0, y_0) \in W$, so dass gilt:

- $F(W) \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ ist offen
- $F : W \to F(W)$ ist bijektiv
- $F^{-1} : F(W) \to W$ ist eine C^k-Funktion

Für $(\xi, \eta) \in F(W)$ und $(x, y) \in W$ gilt

$$\begin{aligned} (x, y) = F^{-1}(\xi, \eta) &\Leftrightarrow (\xi, \eta) = F(x, y) \\ &\Leftrightarrow \xi = x,\ \eta = f(x, y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists C^k$-Funktion $g : F(W) \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$F^{-1}(\xi, \eta) \;=\; (\xi, g(\xi, \eta))$$

Für ein $(x_0, y_0) \in W$ mit $(x_0, 0) = F(x_0, y_0) \in F(W)$ gilt

$$g(x_0, 0) \;=\; y_0$$

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) \subset W$ und $B_\varepsilon(x_0) \times \{0\} \subset F(W)$. Definiere $V := B_\varepsilon(y_0)$ und $U := \{x \in B_\varepsilon(x_0) \mid g(x, 0) \in B_\varepsilon(y_0)\}$ und

$$\varphi : U \to V \quad : \quad \varphi(x) := g(x, 0)$$

$\Rightarrow \varphi \in C^k(U, V)$

(a) $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ und

$$U \times V \subset B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) \subset W \subset \Omega$$

(b) $\varphi(x_0) = g(x_0, 0) = y_0$

(c) Für alle $x \in U$, $y \in V$ gilt $(x, y) \in W$ und $(x, 0) \in F(W)$

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad F(x, y) = (x, 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) = F^{-1}(x, 0) \\ &\Leftrightarrow \quad y = g(x, 0) = \varphi(x) \end{aligned}$$

(d) Es gilt $\forall x \in U$

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

Die Abbildung

$$U \to \mathbb{R}^m \quad : \quad x \mapsto f(x, \varphi(x))$$

ist C^k, da $f, \varphi \in C^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, \varphi(x)) \\ &= \quad \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x_i}(x, \varphi(x)) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \\ &= \quad \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x_i}(x, \varphi(x)) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}_{\in \mathbb{R}^{m \times \ell}} \mathrm{d}\varphi(x) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \mathrm{d}\varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2) \;&=\; x^2 + y_1^3 + y_2^5 - 1 \;=\; 0 \\ f_2(x, y_1, y_2) \;&=\; x y_1 y_2 + 1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Wähle $x = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 5y_2^4 \\ x y_2 & x y_1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,1)\right) \neq 0$$

$\overset{\text{Sa3}}{\Rightarrow}$ $\exists C^\infty$-Funktionen $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$, so dass $1 \in I$, $g_1(1) = -1$, $g_2(1) = 1$ und $\forall x \in I$

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g_1(x), g_2(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_1, y_2) \\
&= \begin{pmatrix} 3g_1(x)^2 & 5g_2(x)^4 \\ xg_2(x) & xg_1(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ g_1(x)g_2(x) \end{pmatrix} \\
&\overset{x=1}{=} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Sei $A : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine C^k-Abbildung mit $A(0) = \mathbf{1}$.
Definiere $f : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$f(x, y) = A(x) - y^2$$

für $x \in \mathbb{R}^\ell$ und $y \in \mathbb{R}^{n\times n}$

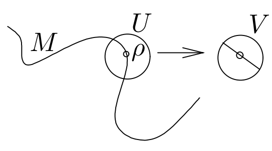
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, \mathbf{1})\eta &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(0, \mathbf{1} + t\eta) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\mathbf{1} - (\mathbf{1} + t\eta)^2\right) \\
&= -2\eta
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, \mathbf{1}) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist bijektiv
$\Rightarrow \exists U \subset \mathbb{R}^\ell$ offen, so dass $0 \in U$ und $\exists B : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ C^k, so dass $\forall x \in U$

$$B(x)^2 = A(x)$$

Definition: Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst *d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit*, wenn es für jedes $p \in M$ offene Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}
\varphi(U \cap M) &= V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \\
&= \{x = (x_1, ..., x_n) \in V \mid x_{d+1} = ... = x_n = 0\}
\end{aligned}$$



Beispiel 1: $d = n$

$$\varphi(U \cap M) = V$$

das heisst $U \cap M = U$ und damit $U \subset M$
$\Rightarrow$"$\forall p \in M\, \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U \subset M$"
das heisst M ist offen. Die n-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ sind gerade die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: $d = 0$

$$\varphi(U \cap M) = \{0\} \qquad \varphi(p) = 0$$

Dies läuft darauf hinaus, dass

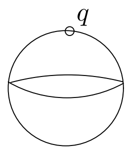
$$U \cap M = \{p\}$$

das heisst, M ist eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn $\forall p \in M\ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $U \cap M = \{p\}$. Die 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ sind die *diskreten* Teilmengen. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 3: $d = n - 1$

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = S^{n-1}$$

"Wir brauchen nun eine Funktion, die diese gebogene Menge ausbügelt. φ ist sozusagen ein Bügeleisen..."



$$U = V = \mathbb{R}^n \setminus \{q\} \qquad q := (0, ..., 0, 1) \in S^{n-1}$$

Definiere

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{q\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{q\} \ : \ \varphi(x) := q + \frac{2}{\|x - q\|^2}(x - q)$$

φ ist ein C^∞-Diffeomorphismus:

i) $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{q\} \to \mathbb{R}^n$ ist C^∞ (da die Funktionen eine Komposition aus C^∞-Funktionen ist)

ii) Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x) - q\| &= \frac{2}{\|x - q\|^2}\|x - q\| \\
&= \frac{2}{\|x - q\|} \\
x - q &= \frac{\|x - q\|^2}{2}(\varphi(x) - q) \\
&= \frac{2}{\|\varphi(x) - q\|^2}(\varphi(x) - q) \\
x &= q + \frac{2}{\|\varphi(x) - q\|}(\varphi(x) - q) \\
&= \varphi(\varphi(x))
\end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter Ausdruck, da $\varphi(x) \neq q$
$\Rightarrow \varphi$ ist bijektiv, $\varphi^{-1} = \varphi$ ist eine C^∞ Funktion.

Und es gilt $\varphi(S^{n-1} \setminus \{q\}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$

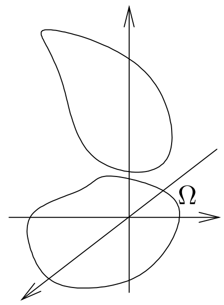
$$x \in S^{n-1} \setminus \{q\} \quad \Rightarrow \quad \|x\| = 1$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \|x - q\|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2 \\
&= x_1^2 + ... + x_n^2 - 2x_n + 1 \\
&= \|x\|^2 + 1 - 2x_n = 2 - 2x_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi_n(x) &= 1 + \frac{2}{2 - 2x_n}(x_n - 1) \\
&= 1 + \frac{x_n - 1}{1 - x_n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow S^{n-1}$ ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine C^k-Abbildung



$$M := \{(x, \psi(x)) \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$$

ist eine C^k-Untermannigfaltigkeit. Definiere

$$U = V = \Omega \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$$

und $\forall x \in \Omega,\ y \in \mathbb{R}^{n-d}$

$$\varphi(x,y) := (x, y - \psi(x))$$

$\to$ Man sieht direkt, dass φ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Satz 4: Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Äquivalent sind:

(i) M ist eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$

(ii) $\forall p \in M\ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $p \in U$ und $\exists C^k$-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$, so dass

- $U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
- $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n-d)\times n}$ ist surjektiv $\forall x \in U \cap M$

Beweis:

- "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei $p \in M$ und $\varphi : U \to V$ wie in der Definition einer Mannigfaltigkeit. Definiere

$$f(x) := \begin{pmatrix} \varphi_{d+1}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-d} \quad : \quad f : U \to \mathbb{R}^{n-d} \text{ ist } C^k$$

1. $\forall x \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in M &\Leftrightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\} \\ &\Leftrightarrow \varphi_i(x) = 0 \quad i = d+1, ..., n \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow U \cap M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$

2. $x \in U,\ \eta \in \mathbb{R}^{n-d}$
$\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{d}\varphi(x)\xi = \binom{0}{\eta}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f(x)\xi = \eta$$

Also ist $\mathrm{d}f(x)$ surjektiv $\forall x \in U$.

- "(ii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $p \in M$ und $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ wie in (ii)
  $\Rightarrow df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ ist surjektiv, wobei

$$df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ mit $i = 1, ..., n$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{n-d}$
$\Rightarrow \exists i_1, ..., i_{n-d} \in \{1, ..., n\}$, so dass die Vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_{i_{n-d}}}(p)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{n-d}$ bilden.

Annahme: $i_1 = d + 1,\ i_2 = d + 2,\ ...,\ i_{n-d} = n$.
Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\begin{aligned} x' &= (x_1, ..., x_d) \\ x'' &= (x_{d+1}, ..., x_n) \\ x &= (x', x'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x''}(p) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(p) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)} \\ \det\left(\frac{\partial f}{\partial x''}(p)\right) &\neq 0 \end{aligned}$$

$\overset{\text{Sa3}}{\Rightarrow} \exists U' \subset \mathbb{R}^d,\ U'' \subset \mathbb{R}^{n-d}$ offen und $\exists \psi : U' \to U''\ C^k$ mit

1. $p' \in U',\ p'' \in U'',\ U' \times U'' \subset U$
2. $\forall x = (x', x'') \in U' \times U''$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' = \psi(x')$$

Definiere $U_0 := U' \times U'' \subset U$ und

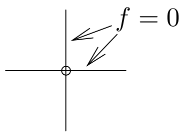
$$\varphi_0(x', x'') := (x', x'' - \psi(x'))$$

und dann $V_0 := \varphi_0(U_0)$
$\Rightarrow U_0, V_0$ sind offen, φ_0 ist ein C^k-Diffeomorphismus, $p \in U_0$ und

$$\varphi(U_0 \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$$

(QED)

Beispiel 5: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1 x_2$



$$f^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}$$

$\to$ keine Untermannigfaltigkeit!

Beispiel 6: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := \|x\|^2 - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i \qquad df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

gilt $\forall x \neq 0$
$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \|x\|^2 - 1 = 0\}$ ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung mit $k \in \mathbb{N}$. Ein Element $y \in \mathbb{R}^m$ heisst *regulärer Wert von* f, wenn $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist, für alle $x \in \Omega$ mit $f(x) = y$.

Bemerkung 1: "Fast jedes" $y \in \mathbb{R}^m$ ist ein regulärer Wert (falls $k \geq n - m$). Der einzige nicht reguläre Wert bei Beispiel 6 ist beispielsweise $y = -1$.

Bemerkung 2: Was ist, wenn $y \notin f(\Omega)$?
Solch ein y ist ein regulärer Wert von f.

Bemerkung 3: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung und $y \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f
$\Rightarrow M := f^{-1}(y) := \{x \in \Omega \mid f(x) = y\}$ ist eine $(n-m)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 7: $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = \mathbf{1}\}$ ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Beweis: $\mathscr{S}_n := \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^T = B\}$ ist ein Vektorraum mit

$$\dim \mathscr{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Definiere

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathscr{S}_n \quad : \quad f(A) := A^T A$$

dann ist

$$O(n) = f^{-1}(\mathbf{1})$$

Wir haben die Abbildung

$$\mathrm{d}f(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathscr{S}_n$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(A)\widehat{A} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(A + t\widehat{A}) \\ &= A^T\widehat{A} + \widehat{A}^T A \end{aligned}$$

Sei $S = S^T \in \mathscr{S}_n$. Definiere

$$\widehat{A} := \frac{1}{2} AS$$

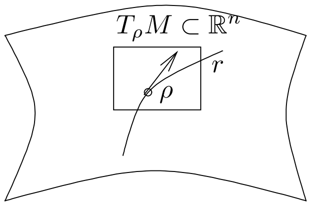
dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(A)\widehat{A} &= \frac{1}{2}\left(A^T AS + (AS)^T A\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A^T AS + S^T A^T A\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(S + S^T\right) \\ &= S \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{1}$ ist ein regulärer Wert von f
$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow} O(n)$ ist eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$\dim O(n) = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathscr{S}_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

(QED)



Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst *Tangentialvektor von M an der Stelle p*, wenn es eine C^1-Abbildung

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

gibt, so dass $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$.
Die Menge

$$T_pM := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist ein Tangentialvektor von } M \text{ an der Stelle } p\}$$

heisst *Tangentialraum von M an der Stelle p.*

Satz 5: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$

(i) T_pM ist ein d-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$

(ii) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $\varphi : U \to V$ ein C^k-Diffeomorphismus, so dass $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$, dann gilt

$$\begin{aligned} T_pM &= \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{d}\varphi_i(p)v = 0,\ i = d+1, ..., n\} \end{aligned}$$

(iii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$, so dass 0 ein regulärer Wert von f ist und $M \cap U = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} T_pM &= \ker(\mathrm{d}f(p)) \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{d}f(p)v = 0\} \end{aligned}$$

Beweis:

(ii) Sei $v \in T_pM$
$\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists C^1$-Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$
Wähle ε so klein, dass $\gamma(t) \in U \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow \varphi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^d \times \{0\} \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
$\Rightarrow \varphi_i(\gamma(t)) = 0,\ i = d+1, ..., n,\ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\Rightarrow 0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_i(\gamma(t)) = \mathrm{d}\varphi_i(\gamma(0))\dot\gamma(0) = \mathrm{d}\varphi_i(p)v$$

für $i = d+1, ..., n$.

Umkehrung: $\varphi(p) =: x = (x_1, ..., x_d, 0, ..., 0)$
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{d}\varphi_i(p)v = 0 \ \forall i > d$. Definiere $\xi := \mathrm{d}\varphi(p)v \in \mathbb{R}^n$

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_d, 0, ..., 0)$$

Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$x + t\xi \in V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$$

$\Rightarrow \gamma(t) := \varphi^{-1}(x + t\xi) \in U \cap M$
$\Rightarrow \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ ist eine C^k-Abbildung

$$\gamma(0) = \varphi^{-1}(x) = p$$

$$\dot\gamma(0) = \mathrm{d}(\varphi^{-1})(x)\xi = \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\xi = v$$

$\Rightarrow v \in T_pM$.

(i) trivial

(iii) Sei $v \in T_pM$
$\Rightarrow \exists C^1$-Funktion $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit

$$\gamma(0) = p \qquad \dot\gamma(0) = v$$

Sei wiederum ε so klein, dass $\gamma(t) \in U \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
$\Rightarrow f(\gamma(t)) = 0 \ \forall t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(0))\dot\gamma(0) \\ &= \mathrm{d}f(p)v \end{aligned}$$

$\Rightarrow v \in \ker(\mathrm{d}f(p))$
$\Rightarrow T_pM \subset \ker(\mathrm{d}f(p))$

Wir wissen aus der linearen Algebra

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\mathrm{d}f(p))) + \dim(\mathrm{im}(\mathrm{d}f(p))) &= \dim \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \dim(\ker(\mathrm{d}f(p))) + n - d &= n \\ \Rightarrow \dim(\ker(\mathrm{d}f(p))) = d = \dim T_pM \end{aligned}$$

$\overset{\text{L.A.}}{\Rightarrow} T_pM = \ker(\mathrm{d}f(p))$ (QED)

Beispiel 1: $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

$$T_xS^{n-1} = x^\perp = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \xi\rangle = 0\}$$

Beweis: Betrachte

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\sum x_i^2$$

wobei 1 ein regulärer Wert ist.
Es gilt $S^{n-1} = \mathrm{d}f^{-1}(1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x)\xi &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x + t\xi) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \frac{1}{2}\sum_1^n (x_i + t\xi_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\xi_i \\ &= \langle x, \xi\rangle \end{aligned}$$

$\ker(\mathrm{d}f(x)) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \xi\rangle = 0\}$

$$\Rightarrow T_xS^{n-1} = x^\perp$$

Beispiel 2: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Ax = c\}$$

für ein $c \neq 0$.

$$\Rightarrow T_x Q = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid x^T A\xi = 0\}$$

Beweis: $f(x) := x^T Ax$, $Q = f^{-1}(c)$

$$\mathrm{d}f(x)\xi = 2x^T A\xi$$

für $x^T A \neq 0$.
$\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist surjektiv $\forall x \in Q$
$\Rightarrow c \neq 0$ ist ein regulärer Wert, Q ist eine $(n-1)$-Untermannigfaltigkeit und

$$T_x Q = \ker(\mathrm{d}f(x))$$

Beispiel 3:

$$T_{\mathbf{1}}O(n) \quad = \quad \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T + X = 0\}$$

Beweis: Definiere

$$A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O(n) \quad : \quad A(t)^T A(t) = \mathbf{1}$$

mit $A(0) = \mathbf{1}$ und $\dot{A}(0) =: X$

$$\Rightarrow 0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A(t)^T A(t) = \dot{A}(0)^T A(0) + A(0)^T \dot{A}(0) = X^T + X$$

$\Rightarrow T_{\mathbf{1}}O(n) \subset \{X \mid X^T + X = 0\}$, wobei

$$\dim(T_{\mathbf{1}}O(n)) = \frac{n(n-1)}{2} \quad = \quad \dim(\{X \mid X^T + X = 0\}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Übung: $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X^T + X = 0$, $A(t) := e^{tX} \in O(n)$

Beispiel 4: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine C^k-Abbildung

$$\begin{aligned} M &:= \{(x, \psi(x)) \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n \\ T_{(x,\psi(x))}M &= \{(\xi, \mathrm{d}\psi(x)\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^d\} \\ \gamma(t) &= (x + t\xi, \psi(x + t\xi)) \in M \end{aligned}$$

13.3 Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ eine C^1-Funktion, so dass 0 ein regulärer Wert ist und

$$M := \varphi^{-1}(0) = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$$

definiert eine $(n-k)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit.
Für C^1-Funktionen

$$f : U \to \mathbb{R}$$

suchen wir ein $x_0 \in M$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in M$$

Notation:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix}$$

$\nabla \varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ i-te Zeile von $\mathrm{d}\varphi(x) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, als Spaltevektor geschrieben.

Satz 6: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f : U \to \mathbb{R}$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ C^1-Funktionen, $0 \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von φ und $M := \varphi^{-1}(0)$. Sei $x_0 \in M$, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla \varphi_i(x_0) \qquad (\star)$$

wobei die λ_i *Lagrange-Multiplikatoren* heissen.

Bemerkung 1: Sei 0 ein regulärer Wert von φ und $\varphi(x_0) = 0$
$\Rightarrow \mathrm{d}\varphi(x_0) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ist surjektiv
$\Rightarrow \mathrm{rang}(\mathrm{d}\varphi(x_0)) = k$
$\Rightarrow$ Die Zeilen von $\mathrm{d}\varphi(x_0)$ sind linear unabhängig
$\Rightarrow \nabla \varphi_1(x_0), ..., \nabla \varphi_k(x_0) \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig
$\Rightarrow \lambda_1, ..., \lambda_k$ sind durch $(\star)$ eindeutig bestimmt

Bemerkung 2:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_i \text{ mit } (\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0) \in \mathrm{span}\{\nabla \varphi_1(x_0), ..., \nabla \varphi_k(x_0)\} \\ &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0) \in \mathrm{im}(\mathrm{d}\varphi(x_0)^T) = (\ker(\mathrm{d}\varphi(x_0))^{\perp} \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\eta \perp \ker(\mathrm{d}\varphi(x_0)) \quad \Leftrightarrow \quad \eta \in \mathrm{im}(\mathrm{d}\varphi(x_0)^T)$$

Beweis: $A := \mathrm{d}\varphi(x_0) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$
Sei $\eta \in \mathrm{im} A^T$
$\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R}^k$, so dass

$$\eta = A^T \xi$$

$\Rightarrow \forall v \in \ker A$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \eta, v \rangle &= \langle A^T \xi, v \rangle \\ &= \langle \xi, Av \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{im} A^T \subset (\ker A^T)^{\perp}$
$\Rightarrow \eta \perp \ker A$

$$\begin{aligned} \dim((\ker A)^{\perp}) &= \dim(\mathrm{im} A) \\ &= \dim(\mathrm{im} A^T) \\ \Rightarrow \mathrm{im} A^T &= (\ker A)^{\perp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0) \perp \ker(\mathrm{d}\varphi(x_0)) \\ &\overset{\text{Sa5}}{\Leftrightarrow} \quad \nabla f(x_0) \perp T_{x_0} M \end{aligned}$$

Beweis von Satz 6: $v \in T_{x_0} M$
$\Rightarrow \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = x_0$, $\dot{\gamma}(0) = v$
$\Rightarrow f(\gamma(0)) \leq f(\gamma(t)) \, \forall t$

$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) = \mathrm{d}f(\gamma(0)) \dot{\gamma}(0) = \mathrm{d}f(x_0) v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp T_{x_0} M$
$\overset{\text{Bem2}}{\Rightarrow} (\star)$ (QED)

Beispiel: $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^T A x \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\,(\|x\|^2 - 1)$$

$M = S^{n-1} = \varphi^{-1}(0)$
$\Rightarrow$ Aus der kompaktheit von S^{n-1} folgt, dass $\exists x \in S^{n-1}$, so dass $\forall x \in S^{n-1}$

$$f(x_0) \leq f(x)$$

$\overset{\text{Sa6}}{\Rightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0)$$
$$\Rightarrow A x_0 = \lambda x_0$$

$\Rightarrow \exists$ Eigenvektor

14 Vektorfelder

14.1 Der Fluss

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

Erinnerung: $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst *lokal lipschitz-stetig*, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ eine Konstante $c = c(K) > 0$ gibt, so dass $\forall x, y \in K$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$$

Bemerkung 1: Sei f eine C^1-Funktion
$\Rightarrow f$ ist lokal lipschitz stetig
(Kapitel 11, Satz 9)

Bemerkung 2: f ist lokal lipschitz-stetig, genau dann wenn $\forall x_0 \in U\ \exists \varepsilon_0 > 0$, so dass

$$f|_{B_{\varepsilon_0}}(x_0)$$

lokal lipschitz-stetig ist.

Bemerkung 3 (Existenz): Sei f lokal lipschitz-stetig
$\Rightarrow \forall x_0 \in U$ hat Gleichung (1) eine Lösung

$$x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$

für ein $\varepsilon > 0$.
(Kapitel 9.2, Satz 1)

Bemerkung 4 (Eindeutigkeit): Sei f lokal lipschitz-stetig und seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle mit $0 \in I \cap J$ und seien $x : I \to U$ und $y : J \to U$ Lösungen von (1)

$$\Rightarrow x(t) = y(t) \qquad \forall t \in I \cap J$$

Bemerkung 5: Es gibt eine maximale Lösung

$$x : I(x_0) \to U$$

auf dem *maximalen Existenzintervall*

$$I(x_0) := \bigcup \left\{ I \subset \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} I \text{ ist ein offenes Intervall mit } 0 \in I \\ \exists \text{ Lösung } x : I \to U \text{ von } U \end{array} \right\}$$

Bemerkung 6: Definiere

$$\Omega := \{(x_0, t) \mid x_0 \in U, t \in I(x_0)\}$$

und $\varphi : \Omega \to U$ durch

$$\varphi(x_0, t) := x(t)$$

wobei $x : I(x_0) \to U$ eine Lösung von (1) ist.
φ heisst *Fluss von f*.

Bemerkung 7: Sei $x_0 \in U$, $t \in I(x_0)$, $s \in I(\varphi(x_0, t))$

$\Rightarrow t + s \in I(x_0)$ und

$$\varphi(x_0, t + s) = \varphi(\varphi(x_0, t), s)$$

Beweis: Definiere $y(s) := \varphi(\varphi(x_0, t), s)$, $s \in I(x_0) - t = \{\tau - t \mid \tau \in I(x_0)\}$

$$\Rightarrow \dot{y}(s) = f(y(s)) \qquad y(0) = \varphi(x_0, t)$$

$\Rightarrow I(x_0) - t \subset I(\varphi(x_0, t))$ und

$$y(s) = \varphi(\varphi(x_0, t), s)$$

Übung: $I(x_0) - t = I(\varphi(x_0, t))$

Satz 1 (stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitz-stetig und $\varphi : \Omega \to U$ der Fluss von f
$\Rightarrow \Omega$ ist offen (in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) und φ ist lokal lipschitz-stetig.

Lemma von Gronwall: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$, $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(t) \geq 0 \; \forall t \in I$, seien $A, B \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten mit $A \geq 0$ und $B \geq 0$ und es gelte $\forall t \in I$

$$g(t) \leq A + B \left| \int_0^t g(s) \, \mathrm{d}s \right| \tag{2}$$

Dann folgt $\forall t \in I$

$$g(t) \leq A e^{Bt} \tag{3}$$

Beweis: Sei $t \geq 0$

Trick:

$$G(t) := A + B \int_0^t g(s) \, \mathrm{d}s$$

$\Rightarrow g(t) \leq G(t) \; \forall t \in I, \, t \geq 0$
$\Rightarrow \dot{G}(t) = Bg(t) \leq BG(t) \; \forall t \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-Bt} G(t) \right) = e^{-Bt} \left(\dot{G}(t) - BG(t) \right) \leq 0$$

$\Rightarrow e^{-Bt} G(t) \leq G(0) = A \; \forall t \geq 0$
$\Rightarrow g(t) \leq G(t) \leq A e^{Bt} \; \forall t \in I$ mit $t \geq 0$ (QED)

Beweis von Satz 1:

- *Schritt 1:* Sei $K \subset U$ eine kompakte Menge
  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in K$
  $$[-\delta, \delta] \subset I(x_0)$$
  Beweis: Bestimmung von δ:

  Die Menge
  $$K_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in K \text{ mit } \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$
  ist kompakt, da K_ε abgeschlossen und K kompakt ist.

  1. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K_\varepsilon \subset U$.

     $\forall x \in K \; \exists \varepsilon(x) > 0$, so dass $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subset U$ und es gilt
     $$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

$\Rightarrow \exists x_1, ..., x_N \in K$, so dass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$$

Definiere $\varepsilon := \frac{1}{2} \min \varepsilon(x_i)$.

Für $x \in K$ und $\|x - y\| \leq \varepsilon$ $\exists i$ mit $\|x - x_i\| < \varepsilon(x_i)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|y - x_i\| &\leq \underbrace{\|y - x\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|x - x_i\|}_{<\varepsilon(x_i)} \\ &< \varepsilon + \varepsilon(x_i) \\ &< 2\varepsilon(x_i) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y \in U$
$\Rightarrow K_\varepsilon \subset U$ mit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{i=1,\ldots,N} \varepsilon(x_i)$$

2. $\exists c > 0 : \forall x, y \in K_\varepsilon$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$$

3. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\delta c \leq \frac{1}{2} \qquad \delta \sup_{x \in K_\varepsilon} \|f(x)\| \leq \varepsilon$$

Behauptung: $[-\delta, \delta] \subset I(x_0)\ \forall x_0 \in K$.

Beweis: Wir definieren

$$\mathscr{X} := \{\xi : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^n \mid \|\xi(t)\| \leq \varepsilon\, \forall t \in [-\delta, \delta]\} \subset C^0([-\delta, \delta], \mathbb{R}^n)$$

und

$$\|\xi\| := \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|\xi(t)\|$$

Für $x \in K$ definieren wir eine Abbildung

$$\mathscr{F}_x : \mathscr{X} \to \mathscr{X} \quad : \quad \mathscr{F}_x(\xi)(t) := \int_0^t f(x + \xi(s))\, \mathrm{d}s$$

a) $\mathscr{F}_x(\xi) \in \mathscr{X}\ \forall \xi \in \mathscr{X}$:

$$\begin{aligned} \|\mathscr{F}_x(\xi)(t)\| &\leq \left| \int_0^t \|f(x + \xi(s))\|\, \mathrm{d}s \right| \qquad |x + \xi(s) \in K_\varepsilon \\ &\leq \delta \sup_{x \in K_\varepsilon} \|f(x)\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

b) $\mathscr{F}_x$ ist eine Kontraktion:

Seien $\xi, \eta \in \mathscr{X}$

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}_x(\xi)(t) - \mathscr{F}_x(\eta)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left(f(x+\xi(s)) - f(x+\eta(s)) \right) \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \left| \int_0^t \| f(\underbrace{x+\xi(s)}_{\in K_\varepsilon}) - f(\underbrace{x+\eta(s)}_{\in K_\varepsilon}) \| \,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_0^t c \underbrace{\|\xi(s) - \eta(s)\|}_{\leq \|\xi-\eta\|} \,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \delta c \|\xi - \eta\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|\xi - \eta\|
\end{aligned}$$

$\forall \xi, \eta \in \mathscr{X}$

c) $\mathscr{X}$ ist ein vollständiger metrischer Raum mit

$$d(\xi,\eta) = \|\xi - \eta\|$$

$\Rightarrow$ Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt, dass $\forall x_0 \in K \, \exists! \xi \in \mathscr{X} : \mathscr{F}_{x_0}(\xi) = \xi$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \xi(t) &= \int_0^t f(x_0 + \xi(s)) \,\mathrm{d}s \qquad t \in [-\delta, \delta] \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + \xi(t))}_{=\dot{\xi}(t)} &= f(x_0 + \xi(t))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x(t) := x_0 + \xi(t)$ mit $-\delta \leq t \leq \delta$ ist eine Lösung von (1)
$\Rightarrow [-\delta, \delta] \subset I(x_0)$

- *Schritt 2:* Seien $K, \delta, \varepsilon, c$ wie in Schritt 1
  $\Rightarrow \varphi|_{K \times [-\delta,\delta]}$ ist Lipschitz-stetig

  Beweis: Seien $x_0, y_0 \in K$ und sei $x(t) := \varphi(x_0, t)$, $y(t) := \varphi(y_0, t)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{x}(t) &= f(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \\
\dot{y}(t) &= f(y(t)) \qquad y(0) = y_0
\end{aligned}$$

und seien ausserdem $x(t), y(t) \in K_\varepsilon \ \forall t \in [-\delta, \delta]$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|x(t) - y(t)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t f(x(s)) \,\mathrm{d}s - y_0 - \int_0^t f(y(s)) \,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \left\| \int_0^t \left(f(x(s)) - f(y(s)) \right) \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_0^t \underbrace{\|f(x(s)) - f(y(s))\|}_{\leq c\|x(s)-y(s)\|} \,\mathrm{d}s \right|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall t \in [-\delta, \delta]$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + c \left| \int_0^t \|x(s) - y(s)\| \,\mathrm{d}s \right|$$

$\Rightarrow$ Mit dem Satz von Gronwald gilt dann $\forall t \in [-\delta, \delta]$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\le \|x_0 - y_0\| e^{ct} \\ &\le e^{c\delta} \|x_0 - y_0\| \end{aligned}$$

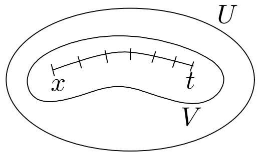
Ausserdem

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(s)\| &= \left\| \int_s^t f(x(t))\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\le |t - s| \sup_{x \in K_\varepsilon} \|f(x)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\varphi(x_0, s) - \varphi(y_0, t)\| &\le \|x(s) - x(t)\| + \|x(t) - y(t)\| \\ &\le \sup_{x \in K_\varepsilon} \|f(x)\| \cdot |t - s| + e^{c\delta} \|x_0 - y_0\| \end{aligned}$$

- *Schritt 3:* Ω ist offen und φ ist lokal lipschitz-stetig

  Beweis: Sei $(x_0, t_0) \in \Omega$ und o.B.d.A. $t_0 > 0$.



Definiere $C := \{\varphi(x_0, t) \mid 0 \le t \le t_0\}$. Sei $x : [0, t_0] \to U$ die Lösung von $(\star)$, das heisst $x(t) = \varphi(x_0, t)$. Diese Abbildung ist stetig und das Intervall $[0, t_0]$ ist kompakt
$\Rightarrow$ Das Bild von $x : [0, t_0] \to U$ ist kompakt, das heisst C ist kompakt.

Sei $K := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in C \text{ mit } \|x - y\| \le \varepsilon\}$
$\Rightarrow K$ ist kompakt (da C kompakt ist $\to$ Übung)
Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt $K \subset U$

Definiere weiter

$$V := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in C \text{ mit } \|x - y\| < \varepsilon\} = \bigcup_{x \in C} B_\varepsilon(x) \subset K$$

das heisst V ist offen.

$\overset{\text{Schr1}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : \forall y \in K$

$$[-\delta, \delta] \subset I(y)$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{t_0}{N} < \delta$
$\Rightarrow \forall y \in K$

$$\tau := \frac{t_0}{N} \in I(y)$$

Definiere $\varphi_\tau : V \to U$ durch $\varphi_\tau(y) := \varphi(y, \tau)$
Nach Schritt 2 ist die Abbildung

$$\varphi|_{K \times [-\delta, \delta]} \to U$$

Lipschitz-stetig

$$\Rightarrow \varphi_\tau : V \to U$$

ist ebenfalls Lipschitz-stetig.

Sei $V_k := \{y \in V \mid k\tau \in I(y),\ \varphi(y, j\tau) \in V,\ j = 1, 2, ..., k\}$, $k = 0, ..., N$.
Es folgt:

1) $V_0 = V$ offen

2) Nach Definition gilt $\varphi(x_0, t) \in V \ \forall t \in [0, t_0]$ und da

$$j\tau = \frac{jt_0}{N} \leq t_0$$

ist, gilt $x_0 \in V_k$, $k = 0, 1, ..., N$

3) V_k ist offen $\forall k$, da $V_{k+1} = \varphi_\tau^{-1}(V_k)$

$$y \in V_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in V \\ \varphi_\tau(y) = \varphi(y, \tau) \in V \\ (k-1)\tau \in I(\varphi_\tau(y)) \\ \varphi(y, \tau + j\tau) \in V \ \forall j = 1, ..., k-1 \\ \text{wobei } \varphi(y, \tau + j\tau) \overset{\text{Bem7}}{=} \varphi(\varphi_\tau(y), j\tau) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in V \\ \varphi_\tau(y) \in V_{k-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow V_N$ ist offen, $x_0 \in V_N$ und $\forall x \in V_N$ gilt $t_0 \in I(x)$
$\Rightarrow \forall x \in V_N$ gilt $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I(x)$
$\Rightarrow V_N \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \Omega$

Behauptung: $\varphi|_{V_N \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis:

(1) Wir wenden Bemerkung 7 an und bekommen

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \varphi(x, N\tau + t - t_0) \\ &\overset{\text{Bem7}}{=} \varphi(\varphi_\tau(x), (N-1)\tau + t - t_0)) \\ &= ... \\ &= \varphi(\underbrace{\varphi_\tau \circ ... \circ \varphi_\tau}_{N\text{-mal}}(x), t - t_0) \\ &= \varphi(\varphi_\tau^N(x), t - t_0) \end{aligned}$$

Nach Schritt 2 $\exists c > 0 : \forall y, y' \in K \ \forall s, s' \in [-\delta, \delta]$

$$\|\varphi(y, s) - \varphi(y', s')\| \leq c|s - s'| + c\|y - y'\| \tag{2}$$

$\Rightarrow \forall x, x' \in V_N \ \forall t, t' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, t) - \varphi(x', t')\| &\overset{(1)}{=} \|\varphi(\varphi_\tau^N(x), t - t_0) - \varphi(\varphi_\tau^N(x'), t' - t_0)\| \\ &\overset{(2)}{\leq} c|t - t'| + c\|\varphi_\tau^N(x) - \varphi_\tau^N(x')\| \\ &\overset{(2)}{\leq} c|t - t'| + c^2\|\varphi_\tau^{N-1}(x) - \varphi_\tau^{N-1}(x')\| \\ &\leq c|t - t'| + c^{N+1}\|x - x'\| \end{aligned}$$

Also haben wir für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega$ eine offene Menge $W = V_N \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ gefunden, so dass

- $(x_0, t_0) \in W \subset \Omega$
- $\varphi|_W$ ist Lipschitz-stetig

$\Rightarrow \Omega$ ist offen und $\varphi : \Omega \to U$ ist lokal Lipschitz-stetig. (QED)

Beispiel: $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\dot{x}(t) = x(t)^2$, $x(0) = 1$

1. Ansatz: $x(t) = ct^\alpha$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x}(t) &= c\alpha t^{\alpha-1} \\ x(t)^2 &= c^2 t^{2\alpha} \end{aligned}$$

x ist Lösung von $(\star)$
$\Rightarrow c = \alpha,\ \alpha - 1 = 2\alpha,\ \alpha = -1$

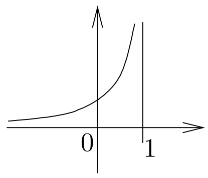
z.B. ist $x(t) = -\frac{1}{t}$ eine Lösung (mit falschem Anfangswert).

2. Ansatz:

$$x(t) = -\frac{1}{t-a} \qquad x(0) = \frac{1}{a}$$

$a = 1$

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$



$I(1) = (-\infty, 1)$

Was ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$?

Satz 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung, $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \Omega \to U$ der Fluss von f
$\Rightarrow \varphi$ ist eine C^k-Abbildung.

Bemerkung 8:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_1, ..., x_n, t) = f(\varphi(x_1, ..., x_n, t))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

ist stetig.

Bemerkung 9: Definiere

$$\begin{aligned} U_t &:= \{x_0 \in U \mid t \in I(x_0)\} \\ &= \{x_0 \in U \mid (x_0, t) \in \Omega\} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} t \in I(x_0) &\overset{\text{Bem7}}{\Leftrightarrow} I(\varphi(x_0, t)) = I(x_0) - t \\ &\Leftrightarrow -t \in I(\varphi(x_0, t)) \end{aligned}$$

Definiere $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ durch $\varphi_t(x_0) := \varphi(x_0, t)$
$\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ ist bijektiv und

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$$

$\overset{\text{Sa1}}{\Rightarrow} \varphi_t$ ist ein Homöomorphismus (eine bijektive Funktion, die in beide Richtungen stetig ist).

Nach Bemerkung 7 gilt

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

auf $U_{t+s} \cap U_s$ und $\varphi_0 = id$.

Bemerkung 10: Für den Beweis von Satz 2 ist zunächst zu zeigen, dass $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ differenzierbar ist.

Angenommen, wir wissen bereits, dass φ_t differenzierbar ist $\forall t$, was ist dann $\mathrm{d}\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $x \in U_t$?

Sei $x_0 \in U$, $t_0 \in I(x_0)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $I := I(x_0)$.
Definiere $x : I \to U$, $\xi : I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$x(t) \;:=\; \varphi_t(x_0) \qquad \xi(t) \;:=\; \mathrm{d}\varphi_t(x_0)\xi_0 \tag{4}$$

Dann gilt

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t)),\ \dot{\xi}(t) \;=\; \mathrm{d}f(x(t))\xi(t) \qquad x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0 \tag{5}$$

Beweis von (5): Wir führen zunächst etwas Notation ein

$$\begin{aligned}
x_0 &= (x_{01}, ..., x_{0n}) \in \mathbb{R}^n \\
\xi_0 &= (\xi_{01}, ..., \xi_{0n}) \in \mathbb{R}^n \\
\varphi(x_0, t) &= (\varphi_1(x_0, t), ..., \varphi_n(x_0, t)) \\
&= (x_1(t), ..., x_n(t)) \\
\xi(t) &= (\xi_1(t), ..., \xi_n(t)) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0, t)\xi_{0i} \\
\xi_j(t) &= \mathrm{d}\varphi_j(x_0, t)\xi_0 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0, t)\xi_{0i}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Ableitung von ξ ist dann

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t}(x_0, t)\xi_{0i} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_0, t)\xi_{0i} \\
&\overset{\text{Bem8}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi)(x_0, t)\xi_{0i} \\
&\overset{\text{KR}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(x_0, t))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0, t)\xi_{0i} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(x_0, t))\underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0, t)\xi_{0i}}_{\xi_j(t)} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t))\xi_j(t) \\
&= \mathrm{d}f(x(t))\xi(t)
\end{aligned}$$

Situation: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $0 \in I$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige Funktion. Wir wollen nun eine Lösung für die Gleichung

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) \qquad \xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Satz 3: Für jeden Anfangswert $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine eindeutige Lösung $\xi : I \to \mathbb{R}^n$ der Gleichung (6).

Bemerkung: Wir betrachten die Standardbasis $e_1, ..., e_n \in \mathbb{R}^n$.
Sei $\Phi_i : I \to \mathbb{R}^n$ die Lösung von (6) mit $\xi_0 := e_i$, $\Phi_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $\dot{\Phi}_i = A\Phi_i$, $\Phi_i(0) = e_i$ und sei

$$\Phi(t) \ := \ \begin{pmatrix}\Phi_1(t) & \dots & \Phi_n(t)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

dann ist $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ und es gilt

$$\dot{\Phi}(t) \ = \ A(t)\Phi(t) \qquad \Phi(0) = \mathbf{1} \tag{7}$$

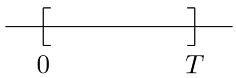
Φ heisst *Fundamentallösung* von (6).

Für jedes $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$\xi(t) \ := \ \Phi(t)\xi_0$$

die eindeutige Lösung der Gleichung (6).

Beweis von Satz 3: Sei $T \in I$ mit $T > 0$.



Definiere

$$\begin{aligned} c &:= 2 \sup_{0\le t\le T} \|A(t)\| < \infty \\ \mathscr{X} &:= C^0([0,T]; \mathbb{R}^n) \\ \|\xi\|_c &:= \sup_{0\le t\le T} e^{-ct}\|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\ \mathscr{F}(\xi) &:= \xi_0 + \int_0^t A(s)\xi(s)\,\mathrm{d}s \qquad \mathscr{F} : \mathscr{X} \to \mathscr{X} \end{aligned}$$

$\mathscr{X}$ ist ein Banachraum und daher ein vollständiger metrischer Raum, denn für die oben definierte Norm gilt

$$e^{-cT} \sup_{0\le t\le T} \|\xi(t)\| \ \le \ \|\xi\|_c \ \le \ \sup_{0\le t\le T} \|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

das heisst, die Neue Norm ist äquivalent zur normalen Supremumsnorm.

Behauptung: $\forall \xi, \eta \in \mathscr{X}$

$$\|\mathscr{F}(\xi) - \mathscr{F}(\eta)\|_c \ \le \ \frac{1}{2}\,\|\xi - \eta\|_c$$

$\Rightarrow \exists! \xi \in \mathscr{X}$ mit

$$\xi \ = \ \mathscr{F}(\xi)$$

$\Rightarrow \forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + \int_0^t A(s)\xi(s)\,\mathrm{d}s \\ \Rightarrow \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) \qquad \xi(0) = \xi_0 \end{aligned}$$

Also gibt es eine eindeutige Lösung von (6) auf $[0,T]$. T war beliebig und $T > 0$ $\Rightarrow$ Die eindeutige Lösung existiert auf ganz $I \cap [0, \infty)$.

Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}(\xi)(t)-\mathscr{F}(\eta)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\|\int_0^t A(s)\,(\xi(s)-\eta(s))\,\mathrm{d}s\right\|_{\mathbb{R}^n}\\
&\le \int_0^t \|A(s)\|\cdot\|\xi(s)-\eta(s)\|_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t e^{cs}\|A(s)\|\cdot e^{-cs}\|\xi(s)-\eta(s)\|_{\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}s\\
&\le \int_0^t e^{cs}\underbrace{\|A(s)\|}_{\le\frac{c}{2}}\,\mathrm{d}s\cdot\|\xi-\eta\|_c\\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t ce^{cs}\,\mathrm{d}s\cdot\|\xi-\eta\|_c\\
&= \frac{1}{2}\,(e^{ct}-1)\|\xi-\eta\|_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{-ct}\|\mathscr{F}(\xi)(t)-\mathscr{F}(\eta)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &\le \frac{1}{2}\,(1-e^{-ct})\|\xi-\eta\|_c\\
&\le \frac{1}{2}\,\|\xi-\eta\|_c\\
\Rightarrow \|\mathscr{F}(\xi)-\mathscr{F}(\eta)\|_c &\le \frac{1}{2}\,\|\xi-\eta\|_c
\end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 2: Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f:U\to\mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion,

$$\Omega \;:=\; \{(x_0,t)\in U\times\mathbb{R}\mid t\in I(x_0)\}$$

$\varphi:\Omega\to U$ der Fluss von f und $\varphi_t(x_0):=\varphi(x_0,t)$.

Sei $x_0\in U$ und $I:=I(x_0)$ und $x(t):=\varphi_t(x_0)$ für $t\in I$. Definiere

$$A(t) \;:=\; \mathrm{d}f(x(t))\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

und sei $\Phi:I\to\mathbb{R}^{n\times n}$ die Fundamental-Lösung von (6), das heisst

$$\dot\Phi(t) \;=\; \mathrm{d}f(x(t))\Phi(t) \qquad \Phi(0)=\mathbf{1} \tag{8}$$

Φ existiert nach Satz 3.

Behauptung 1: Die Funktion $\varphi_t:U_t\to U_t$ (wobei $U_t:=\{x\in U\mid t\in I(x)\}$) ist differenzierbar an der Stelle x_0 und

$$\mathrm{d}\varphi_t(x_0) \;=\; \Phi(t) \qquad 0\le t\le T$$

das heisst $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall\xi_0\in\mathbb{R}^n\,\forall t\in[0,T]$

$$\|\xi_0\|<\delta \;\Rightarrow\; \frac{\|\varphi_t(x_0+\xi_0)-\varphi_t(x_0)-\Phi(t)\xi_0\|}{\|\xi_0\|}<\varepsilon$$

Beweis: Sei $t\in I=I(x_0)$, $T>0$ und $\varepsilon>0$ gegeben

a) Wähle $r>0$ und $c>0$, so dass

   i) $\forall t\in[0,T]$

$$\|\mathrm{d}f(x(t))\| \;\le\; c$$

ii) $\forall t \in [0,T]\ \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| \le r$

$$\|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \le c\|\xi_0\|$$

solche c, r existieren, da $\varphi(t)$ nach Satz 1 lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Wähle $\rho > 0$, so dass $\forall h \in \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \|h\| \le \rho \\ 0 \le t \le T \end{array}\right\} \Rightarrow \|\mathrm{d}f(x(t)+h) - \mathrm{d}f(x(t))\| \le e^{-cT}\varepsilon$$

c) Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\delta \le r \qquad c\delta \le \rho$$

Definiere

$$\begin{aligned} R(t,h) &:= f(x(t)+h) - f(x(t)) - \mathrm{d}f(x(t))h \\ &= \int_0^1 (\mathrm{d}f(x(t)+sh) - \mathrm{d}f(x(t)))\, h\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

dann gilt für $\|h\| \le \rho$

$$\frac{\|R(t,h)\|}{\|h\|} \le \int_0^1 \|\mathrm{d}f(x(t)+sh) - \mathrm{d}f(x(t))\|\, \mathrm{d}s \overset{b)}{\le} e^{-cT}\varepsilon \qquad (\star)$$

Sei $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| < \delta$ und

$$\eta(t) := \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0$$

dann gilt $\eta(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \dot\eta(t) &= f(\varphi_t(x_0+\xi_0)) - f(\varphi_t(x_0)) - \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))\Phi(t)\xi_0 \\ &= f(\varphi_t(x_0+\xi_0)) - f(\varphi_t(x_0)) - \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))(\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)) \\ &\quad + \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))\underbrace{(\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0)}_{\eta(t)} \\ &= R(t, \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)) + \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))\eta(t) \end{aligned}$$

Da $\|\xi_0\| \le \delta \le r$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| &\overset{a)}{\le} c\|\xi_0\| \\ &\le c\delta \\ &\overset{c)}{\le} \rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{(\star)}{\Rightarrow} \|R(t, \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0))\| &\le e^{-cT}\varepsilon\|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \qquad (\star\star) \\ &\overset{a)}{\le} e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $0 \le t \le T$ gilt

$$\begin{aligned} \|\dot\eta(t)\| &= \|R(t, \varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)) + \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))\eta(t)\| \\ &\overset{(\star\star)}{\le} e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| + c\|\eta(t)\| \\ &= e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| + c\left\|\int_0^t \dot\eta(s)\, \mathrm{d}s\right\| \\ &\le e^{-cT}\varepsilon c\|\xi_0\| + c\int_0^t \|\dot\eta(x)\|\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt für $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned}
\|\dot\eta(t)\| &\le c\varepsilon e^{-cT} e^{ct} \|\xi_0\| \\
\Rightarrow \|\eta(t)\| &= \left\| \int_0^t \dot\eta(s)\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\le \int_0^t \|\dot\eta(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\le \varepsilon e^{-cT}\|\xi_0\| \int_0^t c e^{cs}\,\mathrm{d}s \\
&= \varepsilon e^{-cT}\|\xi_0\| \left(e^{ct} - 1\right) \\
&\le \varepsilon \|\xi_0\|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung 1

Behauptung 2: Die Abbildung

$$\Omega \to \mathbb{R}^{n\times n} \quad : \quad (x,t) \mapsto \mathrm{d}\varphi_t(x)$$

ist stetig.

Beweis: Sei $0 \le \varepsilon \le 1$ gegeben.

a) Wähle $c > 0$, so dass

$$\|A(t)\| + 1 \le c \qquad \|\Phi(t)\| \le c$$

b) Wähle $\rho > 0$, so dass $\forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall t \in [0,T]$

$$\|y - \varphi_t(x_0)\| \le \rho \quad \Rightarrow \quad y \in U \text{ und } \|\mathrm{d}f(y) - \mathrm{d}f(\varphi_t(x_0))\| \le e^{-cT}\varepsilon$$

c) Wähle $\delta > 0 : \forall y_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall t \in [0,T]$

$$\|x_0 - y_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad y_0 \in U,\ T \in I(y_0) \text{ und } \|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| \le \rho$$

Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$ und seien für $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned}
y(t) &:= \varphi_t(y_0) \\
B(t) &= \mathrm{d}f(y(t)) \\
\dot\Psi(t) &= B(t)\Psi(t) \qquad \Psi(0) = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Dann folgt $\forall t \in [0,T]$

$$\|x(t) - y(t)\| \le \rho$$

und auch

$$\begin{aligned}
\|A(t) - B(t)\| &\le e^{-cT}\varepsilon \\
\|B(t)\| &\le \|A(t)\| + 1 \le c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\dot\Phi(t) - \dot\Psi(t)\| &= \|A(t)\Phi(t) - B(t)\Psi(t)\| \\
&\le \|A(t) - B(t)\|\|\Phi(t)\| + \|B(t)\|\|\Phi(t) - \Psi(t)\| \\
&\le e^{-cT}\varepsilon c + c\left\| \int_0^t (\dot\Phi(s) - \dot\Psi(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\le e^{-cT}\varepsilon c + c\int_0^t \|\dot\Phi(x) - \dot\Psi(x)\|\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt wiederum

$$\begin{aligned} \|\dot{\Phi}(t) - \dot{\Psi}(t)\| &\leq e^{-cT}\varepsilon c e^{ct} \\ \Rightarrow \|\Phi(t) - \Psi(t)\| &\leq e^{-cT}\varepsilon \int_0^t c e^{cs}\,\mathrm{d}s \\ &= e^{-cT}\varepsilon(e^{ct} - 1) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0 - x_0\| < \delta\ \forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\varphi_t(x_0) - \mathrm{d}\varphi_t(y_0)\| &= \|\Phi(t) - \Psi(t)\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}\varphi_t$ ist stetig (bzw. gleichmässig stetig in t)

$\Rightarrow (x, t) \mapsto \mathrm{d}\varphi_t(x)$ ist stetig

Das heisst, $\forall x_0 \in U\ \forall T \in I(x_0),\ T > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \in U,\ [0, T] \subset I(x),\ \sup_{t \in [0,T]} \|\mathrm{d}\varphi_t(x) - \mathrm{d}\varphi_t(x_0)\| < \varepsilon$$

Frage: Warum ist die Abbildung

$$\Omega \to \mathbb{R}^{n \times n} : (x, t) \mapsto \mathrm{d}\varphi_t(x)$$

stetig?

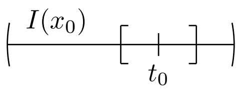
Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\varphi_t(x_0) = \mathrm{d}f(\varphi_t(x))\mathrm{d}\varphi_t(x_0) \tag{9}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_t(x_0) - \mathrm{d}\varphi_{t_0}(x_0) &= \int_{t_0}^t \mathrm{d}f(\varphi_s(x_0))\mathrm{d}\varphi_s(x_0)\,\mathrm{d}s \\ \Rightarrow \|\mathrm{d}\varphi_t(x_0) - \mathrm{d}\varphi_{t_0}(x_0)\| &\leq \int_{t_0}^t \|\mathrm{d}f(\varphi_s(x_0))\| \cdot \|\mathrm{d}\varphi_s(x_0)\|\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Wähle $\delta > 0$, so dass $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset I(x_0)$



Wähle $c > 0$, so dass $\forall s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$\|\mathrm{d}f(\varphi_s(x_0))\| \leq c \qquad \|\mathrm{d}\varphi_s(x_0)\| \leq c$$

$$\Rightarrow \|\mathrm{d}\varphi_t(x_0) - \mathrm{d}\varphi_{t_0}(x_0)\| \leq c^2|t - t_0|$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|\mathrm{d}\varphi_t(x) - \mathrm{d}\varphi_{t_0}(x_0)\| \\ &\quad \leq \|\mathrm{d}\varphi_t(x) - \mathrm{d}\varphi_t(x_0)\| + \|\mathrm{d}\varphi_t(x_0) - \mathrm{d}\varphi_{t_0}(x_0)\| \\ &\quad \leq \sup_{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|\mathrm{d}\varphi_s(x) - \mathrm{d}\varphi_s(x_0)\| + c|t - t_0| \\ &\quad \overset{t \to t_0}{\underset{x \to x_0}{\longrightarrow}} 0 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad i = 1, ..., n$$

ist stetig und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

ist stetig
$\Rightarrow \varphi$ ist stetig differenzierbar.

Behauptung: $f \in C^k \to \varphi \in C^k$

Beweis:

- $k = 1$: Gerade bewiesen
- $k \geq 2$: Es gelte die Behauptung für $k - 1$

  Definiere: $\widetilde{U} := U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, $(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) \in \widetilde{U}$

$$\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{2n} \;:\; \widetilde{f}(x, \xi) := (f(x), \mathrm{d}f(x)\xi)$$

$$\widetilde{\Omega} := \{(x, \xi, t) \mid x \in U,\, \xi \in \mathbb{R}^n,\, t \in I(x)\}$$

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{U} \;:\; \widetilde{\varphi}(x, \xi, t) := (\varphi_t(x), \mathrm{d}\varphi_t(x)\xi)$$

  Mit (9) folgt

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial t} = \widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}$$

  Also ist $\widetilde{\varphi}$ der Fluss von $\widetilde{f}$ und

$$\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{2n}$$

  ist ein C^{k-1}-Vektorfeld
  $\Rightarrow$ Nach Induktions-Annahme ist $\widetilde{\varphi} \in C^{k-1}(\widetilde{\Omega}, \widetilde{U})$
  Wir haben

$$\left(\varphi(x, t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t)\right) = \widetilde{\varphi}(x, e_i, t)$$

  Zusammen mit der Induktionsannahme folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad i = 1, ..., n$$

  ist C^{k-1} und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

  ist C^{k-1}
  $\Rightarrow \varphi$ ist C^k. (QED)

14.2 Divergenz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad x(0) = x_0 \tag{10}$$

Annahme: Die Lösungen von (10) existieren für alle t, das heisst $I(x_0) = \mathbb{R}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, das heisst für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von (10) auf ganz $\mathbb{R}$.

Ein solches Vektorfeld heisst *vollständig.*

Sei $U = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

der Fluss von f und

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad : \quad \varphi_t(x) := \varphi(x,t)$$

$\overset{\text{Sa2}}{\Rightarrow} \varphi$ ist C^1, φ_t ist C^1 $\forall t$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \qquad \varphi_0 = id$$

und $\mathrm{d}\varphi_t$ erfüllt die Differentialgleichung (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\varphi_t(x) \;=\; \mathrm{d}f(\varphi_t(x))\mathrm{d}\varphi_t(x)$$

Definiere

$$A(t) := \mathrm{d}f(\varphi_t(x)) \qquad \Phi(t) := \mathrm{d}\varphi_t(x)$$

$$\Rightarrow \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \qquad \Phi(0) = \mathbf{1} \tag{11}$$

Ziel: Aus (11) folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) \;=\; \mathrm{spur}(A(t))$$

Die *Spur* einer quadratischen Matrix A ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge und es gilt für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$$

Lemma 5: Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\Phi) := \det(\Phi)$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f(\Phi)\widehat{\Phi} \;=\; \det(\Phi)\mathrm{spur}(\Phi^{-1}\widehat{\Phi})$$

Beweis:

- *1. Fall:* $\Phi = \mathbf{1}$

  Behauptung: $\mathrm{d}f(\mathbf{1})A = \mathrm{spur}(A)$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{1})A \;=\; \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\det(\mathbf{1}+tA)$$

  Beweis: $\varphi_i(0) = e_i$, $\dot{\varphi}_i(0) = Ae_i$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{d}f(\mathbf{1})A \;&=\; \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\det(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))\\
&\overset{\text{Leibnitz}}{=}\; \det(\dot{\varphi}_1(0),\varphi_2(0),\varphi_3(0),...,\varphi_n(0))\\
&\quad + \det(\varphi_1(0),\dot{\varphi}_2(0),\varphi_3(0),...,\varphi_n(0))\\
&\quad +... + \det(\varphi_1(0),...,\varphi_{n-1}(0),\dot{\varphi}_n(0))\\
&=\; \sum_{i=1}^n \det(e_1,...,e_{i-1},Ae_i,e_{i+1},...,e_n)\\
&=\; \sum_{i=1}^n \det\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & & a_{2i} & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & \vdots & a_{ii} & 0 & & \vdots\\
\vdots & & \vdots & a_{i+1,i} & 1 & & \vdots\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0\\
0 & \dots & 0 & a_{ni} & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}\\
&=\; \sum_{i=1}^n a_{ii}\\
&=\; \mathrm{spur}(A)
\end{aligned}$$

- *2. Fall:* Sei Φ beliebig

$$\Phi^{-1}\widehat{\Phi} = A$$

$$\Phi(t) := \Phi e^{At} \qquad \dot{\Phi}(t) = \Phi A e^{At} = \widehat{\Phi} e^{At}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{d}f(\Phi)\widehat{\Phi} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \det(\Phi(t)) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \det(\Phi e^{At}) \\
&= \det(\Phi) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \det(e^{At}) \\
&= \det(\Phi)\mathrm{d}f(\mathbf{1})A \\
&\overset{1.\text{Fall}}{=} \det(\Phi)\mathrm{spur}(A) \\
&= \det(\Phi)\mathrm{spur}(\Phi^{-1}\widehat{\Phi})
\end{aligned}$$

(QED)

Aus (11) und Lemma 5 mit $\widehat{\Phi} := \dot{\Phi}(t)$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(\Phi(t)) &= \det(\Phi(t))\mathrm{spur}(\Phi(t)^{-1} \underbrace{A(t)\Phi(t)}_{\dot{\Phi}(t)}) \\
&= \mathrm{spur}(A(t)) \det(\Phi(t)) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(\mathrm{d}\varphi_t(x)) &= \mathrm{spur}(\mathrm{d}f(\varphi_t(x))) \det(\mathrm{d}\varphi_t(x)) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion und $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine hinreichend schöne Menge

$$\mathrm{Vol}(\varphi(Q)) = \int_Q |\det(\mathrm{d}\varphi(x))| \,\mathrm{d}x \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Vol}(\varphi_t(Q)) &\overset{(13)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_Q \det(\mathrm{d}\varphi_t(x)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_Q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(\mathrm{d}\varphi_t(x)) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(12)}{=} \int_Q \mathrm{spur}(\mathrm{d}f(\varphi_t(x))) \det(\mathrm{d}\varphi_t(x)) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\to$ Formel von Liouville

Spezialfall: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{spur}(\mathrm{d}f(x)) = \mathrm{const} = c$$

$$\mathrm{spur}(\mathrm{d}f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \mathrm{div} f(x) \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei $\mathrm{div} f(x)$ die *Divergenz von f* ist

$$\mathrm{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{div} f \equiv c$$

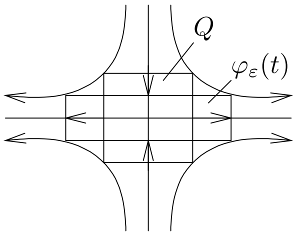
$$\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Vol}(\varphi_t(Q)) = c\mathrm{Vol}(\varphi_t(Q))$$

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\varphi_t(Q)) = e^{Ct}$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x,-y)$

$$\mathrm{div} f(x,y) = 1 + (-1) = 0$$

$$\dot{x} = x \qquad \dot{y} = -y$$



15 Mehrfache Integrale

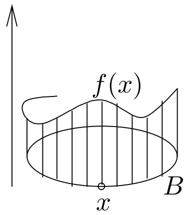
15.1 Das Volumen

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Wir wollen das Integral

$$\int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n$$

definieren.

Idee:



$$\int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n \quad = \quad \mathrm{Vol}_{n+1}\left(\{(x,y) \mid x \in B,\, 0 \leq y \leq f(x)\}\right)$$

falls $f(x) \geq 0\ \forall x \in B$.

Wie definieren wir das Volumen?

Definition 1 aus der Topologie: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $d : X \times X \to [0, \infty)$ die Abstandsfunktion.

Erinnerung: Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$ und

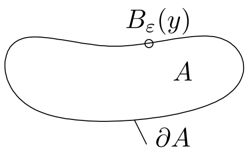
$$B_\varepsilon(x) \quad := \quad \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

Sei $A \subset X$. Der *Abschluss* von A ist die Menge

$$\overline{A} \quad := \quad \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing\, \forall \varepsilon > 0\}$$

Der *Rand* von A ist

$$\partial A \quad := \quad \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing,\, B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\, \forall \varepsilon > 0\}$$



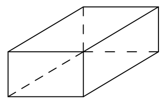
Übungen:

1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A, so dass
$$\lim_{k \to \infty} a_k \quad = \quad x$$
2) $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
3) $\overline{A} = A \cup \partial A$
4) $\overline{A}$ ist abgeschlossen
5) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält, das heisst
$$A \subset B,\ B \text{ abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subset B$$
6) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A$
7) $U \subset X$ ist offen $\Leftrightarrow U \cap \partial U = \varnothing \Leftrightarrow \partial U = \overline{U} \setminus U$

Beispiel: Einge Menge

$$Q \;:=\; Q(a,b) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\; i = 1,...,n\}$$

mit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < b_i$ für $i = 1, ..., n$, heisst *offener (achsenparalleler) Quader.*



Der *Abgeschlossene Quader* ist dann

$$\overline{Q} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

und der Rand

$$\partial Q \;=\; \overline{Q} \setminus Q$$

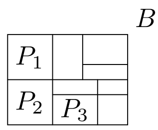
Definition 2: Das *n-dimensionale Volumen* von $Q = Q(a,b)$ ist

$$\mathrm{Vol}_n(Q) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Definition 3: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
Eine *Partition von B* ist eine endliche Menge $P = \{P_1, ..., P_k\}$ von offenen Quadern P_i, so dass

(i) $B = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{P}_j$

(ii) $P_i \cap P_j = \varnothing \;\forall i \neq j$



und wir bezeichnen

$$\mathscr{P}(B) \;:=\; \{\text{Menge der Partitionen von } B\}$$

Warnung: Nicht jede kompakte Menge Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Partition.

Frage: Für welche Teilmengen $B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$?

Übung: Überlege für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$

Definition 4: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Die *Obersumme von* (f, P) ist

$$\overline{S}(f,P) \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \sup_{\overline{P}_j} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_j)$$

Die *Untersumme von* von (f, P) ist

$$\underline{S}(f,P) \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \inf_{\overline{P}_j} f \cdot \mathrm{Vol}_n(P_j)$$

Lemma 1: $\forall$ beschränkten $f : B \to \mathbb{R}$ und $\forall P, Q \in \mathscr{P}(B)$ gilt

$$\underline{S}(f,P) \;\leq\; \overline{S}(f,Q)$$

Bemerkung: Hieraus folgt $\forall Q \in \mathscr{P}(B)$

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$$

und damit

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f, P) \qquad (\star)$$

Definition 5: Eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann-integrierbar*, wenn in $(\star)$ Gleichheit gilt. Die Zahl

$$\int\limits_B f(x)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n := \sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) = \inf_{Q \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f, Q)$$

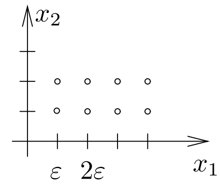
heisst das *Riemann-Integral* von f über B.

Lemma 2: Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \, \forall i\}$ ein offener Quader in $\mathbb{R}^n$ und $P = \{P_1, ..., P_k\}$ eine Partition von $B := \overline{Q}$.

$$\Rightarrow \mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_j)$$

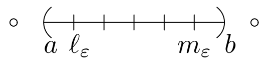
Beweis (von Neumann): Definiere

$$\Lambda_\varepsilon := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \varepsilon\mathbb{Z}, \, i = 1, ..., n\}$$



Betrachte das Intervall (a, b) mit $a < b$. Wähle $\ell, m \in \mathbb{Z}$, so dass

$$(\ell - 1)\varepsilon \leq a < \ell\varepsilon \qquad m\varepsilon < b \leq (m + 1)\varepsilon$$



Die Anzahl

$$\#\{x \in \varepsilon\mathbb{Z} \mid a < x < b\} = m - \ell + 1$$

Es gilt

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon &\leq \varepsilon(m - \ell) < b - a \\ b - a - \varepsilon &\leq \varepsilon(m - \ell + 1) \leq b - a + \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \, \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a, b)) = b - a$$

Betrachte nun das ganze in höheren Dimensionen, also

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$$

Für das Volumen gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(Q) &= \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \varepsilon \, \#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a_i, b_i))}_{\varepsilon^n \, \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \, \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \, \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{Q}) \end{aligned}$$

Sei $P_i \cap P_j = \varnothing \; \forall i \neq j$. Es gilt $\overline{Q} = \bigcup_{i=1}^k \overline{P}_i$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}(P_i) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{i=1}^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap P_i) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \, \# \left(\Lambda_\varepsilon \cap \bigcup_{i=1}^n P_i \right) \\
&\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \, \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \\
&= \mathrm{Vol}(Q) \\
&\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \sum_{i=1}^k \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{P}_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}(P_i)
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung 1: Für $f \equiv 1$, $B = \overline{Q}$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,P) = \overline{S}(f,P) = \mathrm{Vol}(Q)$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{Q}} 1 \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n = \mathrm{Vol}(Q)$$

Bemerkung 2: Seien $P_1, ..., P_k, Q$ offene Quader mit $P_i \subset Q$, $P_i \cap P_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}(P_i) \leq \mathrm{Vol}(Q)$$

Beweis: Wie in Lemma 2. (QED)

Bemerkung 3: Man ist versucht, das Volumen einer beliebigen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit der Formel

$$\mathrm{Vol}(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^n \, \#(\Lambda_\varepsilon \cap B)$$

zu berechnen, doch für welche Mengen B existiert dieser Limes überhaupt?

Lemma 3: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ und $Q = \{Q_1, ..., Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$ Definiere

$$P \wedge Q := \{P_i \cap Q_j \mid i = 1, ..., k, \; j = 1, ..., \ell\}$$

Dann folgt

i) $P \wedge Q \in \mathscr{P}(B)$

ii) $\{P_i \cap Q_j \mid i = 1, ..., k\} \in \mathscr{P}(\overline{Q}_j)$

iii) $\{P_i \cap Q_j \mid j = 1, ..., \ell\} \in \mathscr{P}(\overline{P}_i)$

Beweis: Wir halten zunächst fest:

- $P_i \cap Q_j$ ist entweder $= \varnothing$ oder ein offener Quader
- $(P_i \cap Q_j) \cap (P_{i'} \cap Q_{j'}) \neq \varnothing$

$$\Rightarrow i = i' \text{ und } j = j'$$

Eigentlicher Beweis:

iii) Sei $x \in \overline{P}_i$.

Behauptung: $\exists j : x \in \overline{P_i \cap Q_j}$

Beweis: $\exists$ Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in P_i mit

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu \quad = \quad x$$

für $x_\nu \in B = \overline{Q}_1 \cup ... \cup \overline{Q}_\ell$.
Mindestens ein $\overline{Q}_j$ enthält unendlich viele x_ν
$\Rightarrow$ o.B.d.A $x_\nu \in \overline{Q}_j$ $\forall \nu$ (Teilfolge)
$\Rightarrow \exists y_\nu \in Q_j$ mit

$$\|x_\nu - y_\nu\| \quad < \quad \frac{1}{\nu}$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} (y_\nu - x_\nu) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{\nu\to\infty} y_\nu = x$$

$\Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \geq \nu_0$

$$y_\nu \in P_i \cap Q_j$$

(da P_i offen ist und $x \in P_i$)
$\Rightarrow x \in \overline{P_i \cap Q_j}$

ii) Genauso wie ii)

i) $B = \bigcup_{i=1}^n \overline{P}_i = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^\ell \overline{P_i \cap Q_j}$ (QED)

Beweis von Lemma 1: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Definiere

$$\begin{aligned} P &= \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B) \\ Q &= \{Q_1, ..., Q_k\} \in \mathscr{P}(B) \\ P \wedge Q &= \{P_i \cap Q_j \mid i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., \ell\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Lemma 3 gilt $P \wedge Q \in \mathscr{P}(B)$ und

$$\mathrm{Vol}(P_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j)$$

(nach Lemma 2 und 3)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^{k} \inf_{P_i} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{P_i \wedge Q_j} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\ &= \underline{S}(f, P \wedge Q) \end{aligned}$$

Genauso

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, Q) &= \overline{S}(f, P \wedge Q) \\ &\geq \underline{S}(f, P \wedge Q) \\ &= \underline{S}(f, P) \end{aligned}$$

(QED)

15.2 Integrierbarkeit

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$, $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Eine Summe der Form

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}(P_i)$$

mit $x_i \in \overline{P}_i$ heisst *Riemann-Summe von* f, P.

Ziel: Beweisen, dass wenn f Riemann-integrierbar ist, die Riemann-Summen gegen $\int_B f$ konvergieren, wenn $\delta(P) \to 0$ (Feinheit von P).

Definition: Sei $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$ ein offener Quader und definiere

$$\delta(Q) \ := \ \max_{i=1,...,n} (b_i - a_i)$$

durch die maximale Kantenlänge von Q.
Für $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ definieren wir die *Feinheit von* P durch

$$\delta(P) \ := \ \max_{i=1,...,k} \delta(P_i)$$

Satz 1: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$, $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Äquivalent sind

(i) f ist Riemann-integrierbar und

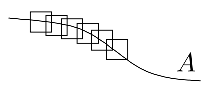
$$c \ = \ \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_0 > 0 : \forall P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(P) < \delta_0 \\ x_i \in \overline{P}_i \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \left| c - \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}(P_i) \right| < \varepsilon$$

Definition: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst *(Jordan'sche) Nullmenge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $W_1, ..., W_N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}(W_\nu) < \varepsilon$$



Bemerkungen:

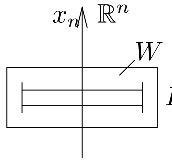
(i) Eine Nullmenge (dieser Art) ist notwendigerweise beschränkt

(ii) Sind $A_1, ..., A_m \subset \mathbb{R}^n$ Nullmengen, so ist auch

$$A \ := \ A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$$

eine Nullmenge.

(iii) Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt
$\Rightarrow A \ := \ K \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge



Beweis: Wähle $R > 0$, so dass $K \subset (-R, R)^{n-1}$. Definiere

$$W \;:=\; (-R, R)^{n-1} \times (-\delta, \delta)$$

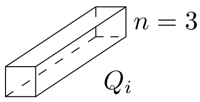
dann gilt

$$\mathrm{Vol}(W) \;=\; 2^n R^{n-1} \delta \;<\; \varepsilon$$

(iv) Sei $Q = \{Q_1, ..., Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$

$$\Rightarrow \partial Q \;:=\; \bigcup_{i=1}^{\ell} \partial Q_i$$

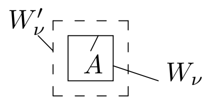
ist eine Nullmenge.



Lemma 4: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge
$\Rightarrow \overline{A}$ ist eine Nullmenge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow$ Nach Definition gibt es offene Quader $W_1, ..., W_N$, so dass

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}(W_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$$



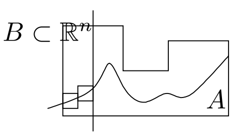
Wähle offene Quader $W'_\nu \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\overline{W}_\nu \subset W'_\nu$$

und $\mathrm{Vol}(W'_\nu) \;\leq\; 2\mathrm{Vol}(W_\nu)$

$$\Rightarrow \overline{A} \overset{!}{\subset} \bigcup_{\nu=1}^{N} \overline{W}_\nu \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W'_\nu \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}(W'_\nu) < \varepsilon$$

denn, falls $a \in \overline{A}$, dann gibt es eine Folge a_k in A, so dass $a_k \to a$ und $a_k \in W_1 \cup ... \cup W_N$ bzw. o.B.d.A. $a_k \in W_\nu \; \forall k$
$\Rightarrow a \in \overline{W}_\nu$ (QED)



Lemma 5: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_0 > 0 : \forall P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$

$$\delta(P) < \delta_0 \;\;\Rightarrow \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} \mathrm{Vol}(P_i) < \varepsilon$$

Beweis: Nach Lemma 4 ist $\overline{A}$ eine Nullmenge
$\Rightarrow \exists$ offene Quader $W_1, ..., W_N$, so dass

$$\overline{A} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}(W_\nu) < \varepsilon$$

Behauptung 1: $\exists \rho > 0 : \forall a \in \overline{A}\, \exists \nu \in \{1, ..., N\}$ mit

$$B_\rho(a) \subset W_\nu$$

Beweis: $\forall a \in \overline{A}\, \exists \nu = \nu(a)$, so dass $a \in W_\nu$ (wobei W_ν offen ist)
$\Rightarrow \exists \rho = \rho(a)$ mit

$$B_{2\rho(a)}(a) \subset W_{\nu(a)} \qquad \overline{A} \subset \bigcup_{a \in \overline{A}} B_{\rho(a)}(a)$$

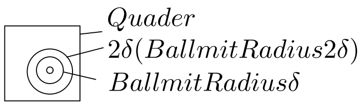
Da A beschränkt ist, ist $\overline{A}$ abgeschlossen und beschränkt, also ist $\overline{A}$ kompakt
$\Rightarrow \exists a_1, ..., a_m \in \overline{A}$ mit

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\rho(a_i)}(a_i)$$

Definiere $\rho_i := \rho(a_i)$, $\rho := \min\{\rho_1, ..., \rho_m\}$

$$\Rightarrow B_{\rho_i + \rho}(a_i) \subset B_{2\rho_i}(a_i) \subset W_{\nu_i}$$

wobei $\nu_i := \nu(a_i) \in \{1, ..., N\}$.

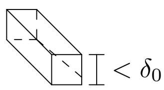


Sei $a \in \overline{A}$
$\Rightarrow \exists i : a \in B_{\rho_i}(a_i)$
$\Rightarrow B_\rho(a) \subset B_{\rho+\rho_i}(a_i) \subset W_{\nu_i}$

Behauptung 2: Sei $\delta_0 = \frac{\rho}{n}$, $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ und $\delta(P) < \delta_0$.
Wenn $\overline{P}_j \cap A \neq \varnothing$, dann $\exists \nu \in \{1, ..., N\}$, so dass $\overline{P}_j \subset W_\nu$.

Beweis: Sei $a \in \overline{P}_j \cap A$. Wähle $\nu \in \{1, ..., N\}$, so dass

$$B_\rho(a) \subset W_\nu$$



$\forall x, y \in \overline{P}_j$

$$\|x - y\| \;<\; n\delta_0 \;=\; \rho$$

$\Rightarrow x \in B_\rho(a) \subset W_\nu\ \forall x \in \overline{P}_j$

Behauptung 3: Lemma 5 gilt mit δ_0 wie in Behauptung 2.

Beweis: Sei $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$

$$\begin{aligned} J_A &:= \{j \in \{1, ..., k\} \mid \overline{P}_j \cap A \neq \varnothing\} \\ J_\nu &:= \{j \in \{1, ..., k\} \mid \overline{P}_j \subset W_\nu\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Behauptung 2 gilt

$$J_A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} J_\nu$$

und weiter

$$\sum_{j \in J_A} \mathrm{Vol}(P_j) \;\leq\; \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{j \in J_\nu} \mathrm{Vol}(P_j) \;\stackrel{\text{Lem2}}{\leq}\; \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}(W_\nu) \;<\; \varepsilon$$

Lemma 6: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $Q = \{Q_1, ..., Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_0 > 0 : \forall P \in \mathscr{P}(B)$

$$\delta(P) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,Q) - \varepsilon \\ \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) + \varepsilon \end{cases}$$

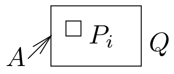
Beweis: Definiere die Nullmenge

$$A \;:=\; \partial Q \;:=\; \bigcup_{j=1}^{\ell} \partial Q_j$$

und die Konstante

$$M \;:=\; \sup_{x \in B} |f(x)| > 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta_0 > 0$ (nach Lemma 5), so dass $\forall P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$



$$\delta(P) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} \mathrm{Vol}(P_i) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$\Rightarrow$ Für jede Partition $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,Q) &= \underline{S}(f, P \wedge Q) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{P_i \cap Q_j} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&= \sum_{\overline{P}_i \cap A = \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{P_i \cap Q_j} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\quad + \sum_{P_i \cap A \neq \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{P_i \cap Q_j} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P}_i} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i) + \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} 2M \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j)}_{=\mathrm{Vol}(P_i)} \\
&\leq \underline{S}(f,P) + \varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Beweis von Satz 1:

- "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei $\varepsilon > 0$ und $c := \int_B f(x) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$

  i) Wähle $Q \in \mathscr{P}(B)$, so dass

  $$c - \frac{\varepsilon}{2} \;\leq\; \underline{S}(f,Q) \;\leq\; \overline{S}(f,Q) \;\leq\; c + \frac{\varepsilon}{2}$$

  ii) Wähle $\delta_0 > 0$, so dass $\forall P \in \mathscr{P}(B)$

  $$\delta(P) < \delta_0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,Q) - \frac{\varepsilon}{2} \\ \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

  $\Rightarrow \forall P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ gilt

  $$\begin{aligned} \underline{S}(f,P) &\geq c - \varepsilon \\ \overline{S}(f,P) &\leq c + \varepsilon \end{aligned}$$

Sei $x_i \in \overline{P}_i$

$$\Rightarrow \inf_{\overline{P}_i} f \quad \leq \quad f(x_i) \quad \leq \quad \sup_{\overline{P}_i} f$$

$$c - \varepsilon \quad \leq \quad \underline{S}(f,P) \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}(P_i) \quad \leq \quad \overline{S}(f,P) \quad \leq \quad c + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| c - \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}(P_i) \right| \quad \leq \quad \varepsilon$$

$\forall P$ mit $\delta(P) < \delta_0$ $\forall x_i \in \overline{P}_i$.

- "(ii) $\Rightarrow$ (i)": Die Riemann-Summe von f konvergiere gegen c.

  Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_0 > 0$ wie in (ii). Sei $P = \{P_1, ..., P_k\} \subset \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ und sei $x_i \in \overline{P}_i$, so dass

$$f(x_i) \quad \leq \quad \inf_{\overline{P}_i} f + \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Vol}(P_j)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{S}(f,P) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P}_i} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i) \\
&\geq \quad \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}(P_j)} \right) \mathrm{Vol}(P_i) \\
&= \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}(P_j)}_{\geq c - \varepsilon} - \varepsilon \\
&\geq \quad c - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

  $\forall \varepsilon > 0$ kann man solch eine Untersumme finden

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f,P) \quad \geq \quad c$$

  Genauso

$$\inf_{P \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f,P) \quad \leq \quad c$$

  und da

$$\inf_{P \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f,P) \quad \geq \quad \sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f,P)$$

  folgt (i). (QED)

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$. Die Funktion

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad : \quad B \to \mathbb{R}^m$$

heisst *Riemann-integrierbar*, wenn die Funktionen $f_i : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind. Das *Integral von f über B* ist definiert durch den Vektor

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n \quad := \quad \left(\int_B f_1(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_m \quad \ldots \quad \int_B f_m(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_m \right)$$

Korollar: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$, $f : B \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und $c = (c_1, ..., c_m) \in \mathbb{R}^m$.
Äquivalent sind:

(i) f ist Riemann-integrierbar und

$$c = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_0 > 0 : \forall P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(P) < \delta_0 \\ x_j \in \overline{P}_j \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| c - \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\mathrm{Vol}(P_j) \right\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

Beweis: Mit Satz 1 und

$$\begin{aligned} \max_{i=1,...,m} \left| c_i - \sum_{j=1}^{k} f_i(x_j)\mathrm{Vol}(P_j) \right| &\leq \left\| c - \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\mathrm{Vol}(P_j) \right\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \left| c_i - \sum_{j=1}^{k} f_i(x_j)\mathrm{Vol}(P_j) \right| \end{aligned}$$

(QED)

Notation: Für eine kompakte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$ bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m) &:= \{f : B \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\} \\ \mathscr{R}(B) &:= \mathscr{R}(B, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Satz 2: Rechenregeln

(i) Die Abbildung

$$\mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m \quad : \quad f \mapsto \int_B f := \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n$$

ist linear, das heisst $\forall f, g \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f + g \in \mathbb{R}(B, \mathbb{R}^m)$, $\lambda f \in \mathbb{R}(B, \mathbb{R}^m)$ und

$$\begin{aligned} \int_B (f+g) &= \int_B f + \int_B g \\ \int_B \lambda f &= \lambda \int_B f \end{aligned}$$

(ii) Sei $f \in \mathscr{R}(B)$ mit $f(x) \geq 0\ \forall x \in B$

$$\Rightarrow \int_B f \geq 0$$

(iii) Seien $f, g \in \mathscr{R}(B)$

$$\Rightarrow fg \in \mathscr{R}(B)$$

(iv) Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$. Wenn $f \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)$ folgt $\|f\| \in \mathscr{R}(B)$ und

$$\left\| \int_B f(x)\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n \right\| \leq \int_B \|f(x)\|\,\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n$$

Beweis:

(i) Sei $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$, $x_j \in \overline{P}_j$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} (f(x_j) + g(x_j)) \mathrm{Vol}(P_j) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \mathrm{Vol}(P_j) + \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \mathrm{Vol}(P_j) \\
\Rightarrow &\lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{j=1}^{k} (f(x_j) + g(x_j)) \mathrm{Vol}(P_j) \\
&\qquad = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \mathrm{Vol}(P_j) + \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{j=1}^{k} g(x_j) \mathrm{Vol}(P_j) \\
\Rightarrow &\int_B (f+g) \\
&\qquad = \int_B f + \int_B g
\end{aligned}$$

und mit λf genauso, also folgt (i) aus dem Korollar.

(ii) $0 \leq \underline{S}(f, P) \leq \int_B f$

(iii) Sei $P = (P_1, ..., P_k) \in \mathscr{P}(B)$, $x, y \in \overline{P}_j$

$$\begin{aligned}
&(fg)(x) - (fg)(y) \\
&\qquad = (f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)) \\
&\qquad \leq \sup_{x,y\in\overline{P}_j} (f(x) - f(y)) \|g\|_{C^0} + \|f\|_{C^0} \sup_{x,y\in\overline{P}_j} (g(x) - g(y)) \\
&\qquad = \left(\sup_{\overline{P}_j} f - \inf_{\overline{P}_j} f \right) \|g\|_{C^0} + \|f\|_{C^0} \left(\sup_{\overline{P}_j} g - \inf_{\overline{P}_j} g \right) \\
\Rightarrow &\overline{S}(fg, P) - \underline{S}(fg, P) \\
&\qquad \leq (\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)) \|g\|_{C^0} + \|f\|_{C^0} (\overline{S}(g, P) - \underline{S}(g, P))
\end{aligned}$$

(iv) *Notation*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\|f\|"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{d}\psi"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\|f\|$ soll die Funktion $B \to \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|$ bezeichnen.

$$\begin{aligned}
\sup_{\overline{P}_j} \|f\| - \inf_{\overline{P}_j} \|f\| &= \sup_{x\in\overline{P}_j} \|f(x)\| - \inf_{y\in\overline{P}_j} \|f(y)\| \\
&= \sup_{x,y\in\overline{P}_j} (\|f(x)\| - \|f(y)\|) \\
&\leq \sup_{x,y\in\overline{P}_j} \|f(x) - f(y)\|
\end{aligned}$$

Nebenbemerkung: $\exists C > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^m$

$$\|\xi\| \leq C \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|$$

da je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^m$ äquivalent sind.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup_{\overline{P}_j} \|f\| - \inf_{\overline{P}_j} \|f\| &\leq \sup_{x,y\in\overline{P}_j} C \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)| \\
&\leq C \sum_{i=1}^m \sup_{x,y\in\overline{P}_j} |f_i(x) - f_i(y)| \\
&\leq C \sum_{i=1}^m \left(\sup_{\overline{P}_j} f_i - \inf_{\overline{P}_j} f_i \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(\|f\|, P) - \underline{S}(\|f\|, P) \leq C \sum_{i=1}^m (\overline{S}(f_i, P) - \underline{S}(f_i, P))$$

$\Rightarrow \|f\| \in \mathscr{R}(B)$

Beweis der Ungleichung:

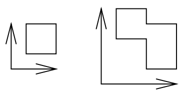
$$\left\| \sum_{j=1}^k f(x_j)\mathrm{Vol}(P_j) \right\| \leq \sum_{i=1}^k \|f(x_j)\|\mathrm{Vol}(P_j)$$

$\delta(P) \to 0$, $x_j \in \overline{P}_j$

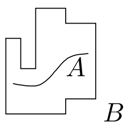
$$\Rightarrow \left\| \int_B f \right\| \leq \int_B \|f\|$$

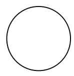
(QED)

Mengen:



$\mathscr{P}(B) = \varnothing$





Kreis geht nicht

$\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$

Das heisst, die wir können nur über bestimmte Mengen integrieren, die Bedingung $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$ ist also ungünstig.

Ziel: Wir wollen $\int_B f$ für beschränkte Teilmengen $B \subset \mathbb{R}^n$ definieren, deren Rand ∂B eine Nullmenge ist.

Satz 3: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$, und $A \subset B$ eine Nullmenge.

(i) Sei $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f|_{B\setminus A}$ stetig

$$\Rightarrow f \in \mathscr{R}(B)$$

(ii) Seien $f, g \in \mathscr{R}(B)$ mit $f(x) = g(x)\ \forall x \in B \setminus A$

$$\Rightarrow \int_B f = \int_B g$$

Beweis: Definiere

$$M := \sup_{x\in B} |f(x)|$$

Sei $\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow$ Nach Lemma 5 $\exists P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(B)$, so dass

$$\sum_{\overline{P}_j \cap A \neq \varnothing} \mathrm{Vol}(P_j) \leq \frac{\varepsilon}{4M} \qquad (\star)$$

- *Fall 1:* $f(x) = 0 \; \forall x \in B \setminus A$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,P) = \sum_{\overline{P}_j \cap A \neq \varnothing} \sup_{\overline{P}_j} f \cdot \mathrm{Vol}(P_j) < M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}$$

und genauso

$$\underline{S}(f,P) > -\frac{\varepsilon}{4}$$

$\Rightarrow f \in \mathscr{P}(B)$ und

$$\int_B f = 0$$

- *Fall 2:* f ist stetig auf $B \setminus A$. Definiere

$$K := \bigcup_{\overline{P}_j \cap A = \varnothing} \overline{P}_j$$

$\Rightarrow K$ ist kompakt und $f|_K : K \to \mathbb{R}$ ist stetig
$\Rightarrow f|_K$ ist gleichmässig stetig
$\Rightarrow \exists \delta_0 > 0 : \forall x, y \in K$

$$\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} < \sqrt{n}\,\delta_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^k \mathrm{Vol}(P_j)}$$

Definiere

$$V := \sum_{j=1}^k \mathrm{Vol}(P_j)$$

Wähle $Q = \{Q_1, ..., Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(Q) < \delta_0$

$\Rightarrow \forall j \; \forall x, y \in \overline{Q}_j$

$$\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} < \sqrt{n}\,\delta_0$$

$\Rightarrow \forall i, j$ mit $\overline{P}_j \cap A = \varnothing$

$$\sup_{P_j \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f \leq \frac{\varepsilon}{2V}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\overline{S}(f, P \wedge Q) - \underline{S}(f, P \wedge Q) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f \right) \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad = \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f \right) \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad \quad + \sum_{\overline{P}_i \cap A = \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sup_{P_i \wedge Q_j} f - \inf_{P_i \wedge Q_j} f \right) \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad \le \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} 2M \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad \quad + \sum_{\overline{P}_i \cap A = \varnothing} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\varepsilon}{2V} \mathrm{Vol}(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad \le \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \varnothing} 2M \mathrm{Vol}(P_i) + \sum_{\overline{P}_i \cap A = \varnothing} \frac{\varepsilon}{2V} \mathrm{Vol}(P_i) \\
&\qquad \overset{(\star)}{\le} 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2V} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(P_i) \\
&\qquad = \varepsilon
\end{aligned}
$$

(QED)

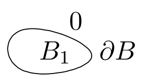
Definition 1: Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst *(Jordan-)messbar*, wenn ihr Rand ∂B eine (Jordan'sche) Nullmenge ist.

Definition 2: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$1_B(x) \; := \; \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

heisst *charakteristische Funktion von* B.

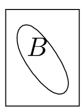
Definition 3: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, die ausserhalb einer beschränkten Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ verschwindet, das heisst $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Eine solche Funktion f nennen wir *Riemann-integrierbar*, wenn die Restriktion von f auf jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $B \subset Q$ Riemann-integrierbar ist.



Diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl von Q.

Bemerkungen:

1) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B$



$\Rightarrow 1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle x
$\Rightarrow$ Nach Satz 3 ist 1_B Riemann-integrierbar.

2) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $B \subset Q$ messbar und $f \in \mathscr{R}(Q)$
$\Rightarrow$ Nach Satz 2 ist die Funktion $1_B \cdot f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wobei

$$1_B \cdot f(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

Wir nennen die Zahl

$$\int\limits_B f \;:=\; \int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \;:=\; \int\limits_Q 1_B f(x)\,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \;=:\; \int\limits_Q 1_B f$$

3) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar. Wir definieren das *n-dimensionale Volumen* (bzw. das *Jordan'sche Mass*) durch

$$\mu(B) \;:=\; \mathrm{Vol}_n(B) \;:=\; \int\limits_B 1 \;=\; \int\limits_Q 1_B$$

4) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader
$\Rightarrow \partial Q$ ist eine Nullmenge
$\Rightarrow Q$ ist messbar (nach Definition) und

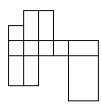
$$\mu(Q) \;=\; \int\limits_Q 1 \;\overset{\text{Lem2}}{=}\; \mathrm{Vol}_n(Q)$$

wobei hier Vol_n das Volumen von vorher bezeichnet (nicht das Jordan'sche Mass).

5) Seien $Q_1, ..., Q_\ell$ abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}^n$ und $B := Q_1 \cup ... \cup Q_\ell$

$$\Rightarrow \partial B \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \partial Q_j$$

und B ist damit messbar.

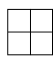


Jedes solche B nennen wir ein *Quadergebäude*.

Übung: $B \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Quadergebäude $\Leftrightarrow \mathscr{P}(B) \neq \varnothing$.

6) *Beispiel:* Definiere

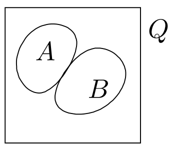
$$B \;:=\; \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1,\, x_i \in \mathbb{Q}\, \forall i\}$$



$\Rightarrow \partial B = [-1, 1]^n = \overline{B}$ ist keine Nullmenge, das heisst B ist nicht messbar.

7) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte, messbare Mengen
$\Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$ sind messbar.

Beweis: $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$



Sei $x \in \partial(A \cap B)$
$\Rightarrow \exists x_\nu \in A \cap B$ mit $x_\nu \to x$ und $\exists y_\nu \notin A \cap B$ mit $y_\nu \to x$
$\Rightarrow \forall \nu$ ist entweder $y_\nu \notin A$ oder $y_\nu \notin B$
$\Rightarrow$ o.B.d.A. (Teilfolge) ist entweder $y_\nu \notin A\ \forall \nu$ oder $y_\nu \notin B\ \forall \nu$
$\Rightarrow$ Entweder ist $x \in \partial A$ oder $x \in \partial B$.

8) Zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir *fast disjunkt*, wenn $A \cap B$ eine Nullmenge ist.

9) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, beschränkt und fast disjunkt, $A \cup B \subset Q$ und $f \in \mathscr{R}(Q)$

$$\Rightarrow \int\limits_{A \cup B} f = \int\limits_A f + \int\limits_B f$$

Beweis: $1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B$

$$\Rightarrow \int\limits_Q 1_{A \cup B} f + \underbrace{\int\limits_Q 1_{A \cap B} f}_{=0} = \int\limits_Q 1_A f + \int\limits_Q f_B f$$

10) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar

a) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
c) A, B fast disjunkt

$$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

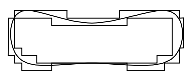
Satz 4: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.
Äquivalent sind:

(i) B ist messbar

(ii) $1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist integrierbar (über jedem Quader der B enthält)

(iii) $\forall \varepsilon > 0\, \exists$Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$, so dass $B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$\mu(B_1) - \mu(B_0) < \varepsilon$$



Bemerkung: In (iii) können wir die Quadergebäude B_0, B_1 so wählen, dass alle Ecken der Quader Vektoren der Form

$$x = \left(\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_2}{2^m}, \ldots, \frac{k_n}{2^m}\right)$$

sind mit $m \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

Korollar 1: B ist eine Nullmenge $\Leftrightarrow$ B ist messbar und $\mu(B) = 0$

Beweis:

- "$\Rightarrow$": Nach Satz 3 ist 1_B Riemann-integrierbar und $\int 1_B = 0$
  $\Rightarrow B$ ist messbar und $\mu(B) = \int 1_B = 0$
- "$\Leftarrow$": Übung (QED)

Korollar 2: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $f : Q \to [0, \infty]$ Riemann-integrierbar und definiere

$$B \;:=\; \{(x,y) \mid x \in Q,\, 0 \le y \le f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$\Rightarrow B$ ist messbar in $\mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\mu(B) \;=\; \int_Q f$$

Beweis: Sei $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$ und definiere

$$\begin{aligned} B_0 &:= \bigcup_{j=1}^{k} \{(x,y) \mid x \in \overline{P}_j,\, 0 \le y \le \inf_{\overline{P}_j} f\} \\ B_1 &:= \bigcup_{j=1}^{k} \{(x,y) \mid x \in \overline{P}_j,\, 0 \le y \le \sup_{\overline{P}_j} f\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$\mu_{n+1}(B_0) \;=\; \underline{S}(f,P) \qquad \mu_{n+1}(B_1) \;=\; \overline{S}(f,P)$$

(QED)

Beweis von Satz 4:

- "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Folgt unmittelbar aus Satz 3
- "(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit $B \subset Q$ (und Ecken in $\mathbb{Z}^n$) und sei $\varepsilon > 0$.
  $\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists$ Partition $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$, so dass
  $$\overline{S}(1_B, P) - \underline{S}(1_B, P) < \varepsilon$$
  (o.B.d.A. seien die Ecken der P_j's in $2^{-m}\mathbb{Z}^n$)
  Es gilt
  $$\sup_{\overline{P}_j} 1_B - \inf_{\overline{P}_j} 1_B \;=\; \begin{cases} 0 & \overline{P}_j \subset B \\ 0 & \overline{P}_j \cap B = \varnothing \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
  Definiere
  $$\begin{aligned} J_0 &:= \{j \in \{1,...,k\} \mid \overline{P}_j \subset B\} \\ J_1 &:= \{j \in \{1,...,k\} \mid \overline{P}_j \cap B \ne \varnothing\} \end{aligned}$$
  (es gilt $J_0 \subset J_1$ und $J_1 \setminus J_0$ entspricht genau dem "sonst" von oben)
  Definiere weiter die Quadergebäude
  $$B_0 \;:=\; \bigcup_{j \in J_0} \overline{P}_j \qquad B_1 \;:=\; \bigcup_{j \in J_1} \overline{P}_j$$
  $\Rightarrow B_0 \subset B \subset B_1$ und
  $$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(B_1) - \mu(B_0) &= \sum_{j \in J_1} \mathrm{Vol}(P_j) - \sum_{j \in J_0} \mathrm{Vol}(P_j) \\ &= \sum_{j \in J_1 \setminus J_0} \mathrm{Vol}(P_j) \\ &= \sum_{j \in J_1 \setminus J_0} \mathrm{Vol}(P_j) \left(\sup_{\overline{P}_j} 1_B - \inf_{\overline{P}_j} 1_B \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Vol}(P_j) \left(\sup_{\overline{P}_j} 1_B - \inf_{\overline{P}_j} 1_B \right) \\ &= \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

- "(iii) $\Rightarrow$ (i)": Wir müssen zeigen, dass ∂B eine Nullmenge ist.

  Sei $\varepsilon > 0$.
  $\Rightarrow \exists$ Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $B_0 \subset B \subset B_1$ und

  $$\mu(B_1) - \mu(B_0) \quad < \quad \varepsilon$$

  Definiere

  $$B_0^\circ \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset B_0\} \quad = \quad B_0 \setminus \partial B_0$$

  ($\widehat{=}$ dem Inneren, da B_0 abgeschlossen ist)

  - $A := B_1 \setminus B_0^\circ$ ist abgeschlossen
  - A ist messbar und mit Bemerkung 7 gilt

    $$\partial A \subset \partial B_0 \cup \partial B_1$$

  - $A \cup B_0 = B_1$
  - $A \cap B_0$ ist eine Nullmenge ($= \partial B_0$)
  - Nach Bemerkung 10 gilt

    $$\mu(A) + \mu(B_0) \quad = \quad \mu(B_1)$$

    $\Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$
  - $\partial B \subset A$, da $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ \subset B_1 \setminus B_0^\circ = A$

  $\Rightarrow \partial B \subset A$ und

  $$\mu(A) \quad = \quad \int\limits_Q 1_A \quad < \quad \varepsilon$$

  $\Rightarrow \exists P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$ mit $\overline{S}(1_A, P) < \varepsilon$
  Definiere

  $$J \quad := \quad \{j \in \{1, ..., k\} \mid \overline{P}_j \cap \partial B \neq \varnothing\}$$

  $\Rightarrow$ Die Obersumme lässt sich schreiben als

  $$\begin{aligned} \varepsilon \quad > \quad \overline{S}(1_A, P) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k} \sup_{\overline{P}_j} 1_A \cdot \mathrm{Vol}(P_j) \\ &= \quad \sum_{\overline{P}_j \cap A \neq \varnothing} \mathrm{Vol}(P_j) \\ &\geq \quad \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}(P_j) \end{aligned}$$

  Für $j \in J$ wählen wir einen offenen Quader $W_j \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\overline{P}_j \subset W_j$ und

  $$\mathrm{Vol}(W_j) \quad \leq \quad 2\mathrm{Vol}(P_j)$$

  Dann wissen wir, dass

  $$\partial B \subset \bigcup_{j \in J} \overline{P}_j \subset \bigcup_{j \in J} W_j$$

  und

  $$\sum_{j=J} \mathrm{Vol}(W_j) \quad \leq \quad 2 \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}(P_j) \quad < \quad 2\varepsilon$$

  $\Rightarrow \partial B$ ist eine Nullmenge. (QED)

Satz 5:

i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung und $A \subset U$ eine kompakte Nullmenge.
$\Rightarrow f(A)$ ist eine Nullmenge.

ii) Sei $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $g : V \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $B \subset V$ kompakt und $d < n$
$\Rightarrow g(B)$ ist eine Nullmenge

Beweis:

(ii) Folgt aus (i): Definiere $U := V \times \mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$ und

$$f(x_1, ..., x_n) \quad = \quad g(x_1, ..., x_d)$$

$A := B \times \{0\}$ ist eine Nullmenge
$\overset{(i)}{\Rightarrow} f(A) = g(B) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.

(i) 1) Nach Satz 9, Kapitel 11 ist $f|_A$ Lipschitz-stetig
$\Rightarrow \exists c > 0 : \forall x, y \in A$

$$\|f(x) - f(y)\| \quad \leq \quad c\|x - y\|$$

wobei wir hier $\|\cdot\|$ als Euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ auffassen.

2) Ein *abgeschlossener Würfel* ist ein Quader der Form

$$Q \quad = \quad [a_1, a_1 + s] \times [a_2, a_2 + s] \times ... \times [a_n, a_n + s]$$

wobei s die Seitenlänge des Würfels Q ist.

3) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 5 gibt es endlich viele abgeschlossene Würfel $Q_1, ..., Q_\ell$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_i \qquad \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}(Q_j) < \frac{\varepsilon}{(3c\sqrt{n})^n}$$

Notation: $s_j :=$ Seitenlänge von Q_j und es gilt

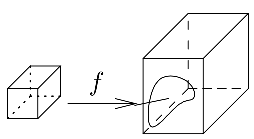
$$\mathrm{Vol}(Q_j) \quad = \quad s_j^n$$

4) $\forall x, y \in Q_j$ gilt

$$\|x - y\| \quad \leq \quad \sqrt{n}\, s_j$$

$\overset{1)}{\Rightarrow} \forall x, y \in Q_j \cap A$ gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \quad \leq \quad c\|x - y\| \quad \leq \quad c\sqrt{n}\, s_j$$



$\Rightarrow \forall j\, \exists$offener (achsenparalleler) Würfel $W_j \subset \mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $t_j = 3c\sqrt{n}\, s_j$, so dass

$$f(Q_j \cap A) \subset W_j$$

Es folgt

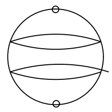
$$f(A) \quad = \quad \bigcup_{j=1}^{\ell} f(A \cap Q_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} W_j$$

und für das Valumen der Vereinigung gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}(W_j) &= \sum_{j=1}^{\ell} t_j^n \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} (3c\sqrt{n})^n s_j^n \\ &= (3c\sqrt{n})^n \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}(Q_j) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

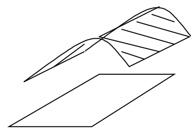


S^n ist eine $n+1$-dimensionale Nullmenge und für $B^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$ gilt

$$\partial B^{n+1} = S^n$$

das heisst, B^{n+1} ist messbar.

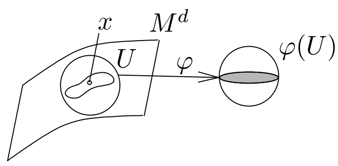
Beispiel 2: Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine C^1-Abbildung, wobei $d < n$ und $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt.



Die Menge $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in K, y = f(x)\}$ ist eine Nullmenge.

Beispiel 3: Jede kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim M < n$ ist eine Nullmenge.

Beweis:



$U \cap M = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^d \times 0)$, $d < n$
$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow} \forall x \in M\ \exists U_x \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $M \cap U_x$ eine Nullmenge ist. Es gilt

$$M \subset \bigcup_{x \in M} U_x$$

$\Rightarrow \exists x_1, ..., x_N \in M$, so dass

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$$

Es folgt

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \underbrace{(U_{x_i} \cap M)}_{\text{Nullmenge}}$$

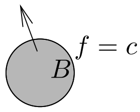
$\Rightarrow M$ ist eine Nullmenge.

Beispiel 4: Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine C^1-Abbildung und "eigentlich", das heisst, wenn wir eine Folge $x_\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_\nu) \to c$ haben, dann hat x_ν eine konvergente Teilfolge
$\Rightarrow f^{-1}(c)$ und $f^{-1}([0, c])$ sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Sei nun noch $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f
$\Rightarrow$ Aus dem impliziten Funktionensatz folgt, dass $M := f^{-1}(c)$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

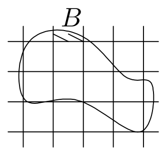
Definiere die kompakte Menge

$$B \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\} \quad = \quad f^{-1}([0, c])$$



$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} = f^{-1}(c) = M$
$\overset{\text{Bsp3}}{\Rightarrow} \partial B$ ist eine Nullmenge
$\Rightarrow B$ ist messbar.

15.3 Zerlegungen



Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar. Eine *Zerlegung von B* ist eine endliche Menge $Z = \{B_1, ..., B_k\}$ von kompakten, messbaren Teilmengen von B, so dass

$$B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

und $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge ist $\forall i \neq j$.

Der *Durchmesser (diameter)* ist definiert durch

$$\operatorname{diam}(B_i) \quad := \quad \sup_{x,y \in B_i} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

und die *Feinheit*

$$\delta(Z) \quad := \quad \max_{j=1,\dots,k} \operatorname{diam}(B_i)$$

und

$$\mathscr{Z}(B) \quad := \quad \{\text{Menge aller Zerlegungen von } B\}$$

Lemma 7: Sei B kompakt und messbar und $f : B \to \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar (das heisst, die erweiterte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ ist über jedem Quader integrierbar).
$\Rightarrow \forall Z = \{B_1, ..., B_k\} \in \mathscr{Z}(B) \ \forall x_i \in B_i$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu(B_i) - \int_B f \right\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{k} \operatorname{diam}(f(B_i))\mu(B_i)$$

Beweis: Nach Bemerkung 9 ist

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i)$$

Definiere $c_i := f(x_i) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu(B_i) - \int_B f \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(c_i\mu(B_i) - \int_{B_i} f \right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{k} \left\| \int_{B_i} (c_i - f) \right\| \\
&\overset{\text{Sa2}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_i} \|c_i - f(x)\| \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sup_{x \in B_i} \|c_i - f(x)\|_{\mathbb{R}^m}}_{\leq \mathrm{diam} f(B_i)} \mu(B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{diam}(f(B_i))\mu(B_i)
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu(B_i)$$

mit $Z = \{B_1, ..., B_k\} \in \mathscr{Z}(B)$ und $x_i \in B_i$ heisst *(verallgemeinerte) Riemann'sche Summe von f.*

Satz 6: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und $f : B \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_0 > 0 : \forall Z = \{B_1, ..., B_k\} \in \mathscr{Z}(B)$

$$\left. \begin{array}{l} \delta(Z) < \delta_0 \\ x_i \in B_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu(B_i) - \int_B f \right\| < \varepsilon$$

Beweis: $f : B \to \mathbb{R}^m$ ist gleichmässig stetig, da f stetig und B kompakt ist
$\Rightarrow \exists \delta_0 > 0 : \forall x, y \in B$

$$\|x - y\| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2\mu(B)}$$

Sei $Z = \{B_1, ..., B_k\} \in \mathscr{Z}(B)$ mit $\delta(Z) < \delta_0$
$\Rightarrow \mathrm{diam}(B_i) < \delta_0 \; \forall i$
$\Rightarrow \forall i$

$$\mathrm{diam}(f(B_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(B)}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mu(B_i) - \int_B f \right\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{diam}(f(B_i))\mu(B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2\mu(B)}\,\mu(B_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2\mu(B)} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

(QED)

Bemerkung: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}^m$ ist Riemann-integrierbar, genau dann wenn die durch $f(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ erweiterte Funktion über jeden Quader integrierbar ist und wir schreiben

$$\mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m) = \{\text{Riemann-integrierbare Funktionen } f : B \to \mathbb{R}^m\}$$

Satz 7: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar, $f_\nu \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)$, $\nu = 1, 2, 3, ...$ und $f : B \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, wobei f_ν gleichmässig gegen f konvergiere.
$\Rightarrow f \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)$ und

$$\int_B f = \lim_{\nu\to\infty} \int_B f_\nu$$

Beweis: O.B.d.A sei $B = Q$ ein abgeschlossener Quader, das heisst $\mathscr{P}(B) \neq \varnothing$ und o.B.d.A. sei $m = 1$. Sei $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{x\in Q} |f(x) - f_\nu(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3\mathrm{Vol}(Q)}$$

$\Rightarrow$ Da $f_\nu \in \mathscr{R}(Q)$ $\exists P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$, so dass

$$\overline{S}(f_\nu, P) - \underline{S}(f_\nu, P) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{\overline{P}_i} f \cdot \mathrm{Vol}(P_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{\overline{P}_i} f_\nu + \frac{\varepsilon}{3\mathrm{Vol}(Q)} \right) \mathrm{Vol}(P_i) \\
&= \overline{S}(f_\nu, P) + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

genauso

$$\underline{S}(f, P) \geq \underline{S}(f_\nu, P) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) &\leq \overline{S}(f_\nu, P) - \underline{S}(f_\nu, P) + \frac{2}{3}\,\varepsilon \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Also ist f Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q f - \int_Q f_\nu \right| &\leq \int_Q |f - f_\nu| \\
&\leq \sup_{x\in Q} |f(x) - f_\nu(x)| \cdot \mathrm{Vol}(Q) \\
&\overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Satz 8 (Fubini): Seien $A \subset \mathbb{R}^p$ und $B \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader und $f : A \times B \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.
Für $x \in A$ definieren wir $f_x : B \to \mathbb{R}^m$ durch

$$f_x(y) \;:=\; f(x,y) \qquad y \in B$$

Annahme 1: $f \in \mathscr{R}(A \times B, \mathbb{R}^m)$
Annahme 2: $f_x \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)\ \forall x \in A$

Definiere $F : A \to \mathbb{R}^m$ durch

$$F(x) \;:=\; \int\limits_B f_x(y)\,\mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_q$$

$\Rightarrow F \in \mathscr{R}(A, \mathbb{R}^m)$ und

$$\int\limits_A F(x)\,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_p \;=\; \int\limits_{A \times B} f(x,y)\,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_p \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_q \qquad (\star)$$

Notation:

$$\int\limits_B f_x(y)\,\mathrm{d}y \;:=\; \int\limits_B f_x \;=\; \int\limits_B f_x(y)\,\mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_q$$

Wir schreiben für $(\star)$ also

$$\int\limits_{A \times B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Beweis: *Behauptung:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists P \in \mathscr{P}(A)$, so dass

$$\int\limits_{A \times B} f - \varepsilon \;\leq\; \underline{S}(F,P) \;\leq\; \overline{S}(F,P) \;\leq\; \int\limits_{A \times B} f + \varepsilon$$

Es folgt:

$$\int_{A \times B} f \;\geq\; \inf_P \overline{S}(F,P) \;\geq\; \sup_P \underline{S}(F,P) \;\geq\; \int\limits_{A \times B} f$$

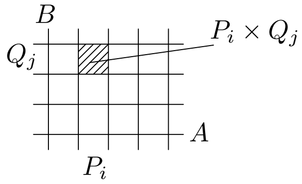
$$\Rightarrow \sup_P \underline{S}(F,P) \;=\; \inf_P \overline{S}(F,P) \;=\; \int\limits_{A \times B} f$$

$\Rightarrow$ Satz 8.

Beweis der Behauptung: $\varepsilon > 0$ ist gegeben.
Nach Satz 1 $\exists \delta_0 > 0 : \forall R \in \mathscr{P}(A \times B)$

$$\delta(R) < \delta_0 \;\Rightarrow\; \overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \leq \varepsilon$$

Wähle $P = \{P_1, ..., P_k\} \in \mathscr{P}(A)$ und $Q = \{Q_1, ..., Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$, so dass $\delta(P) < \delta_0$ und $\delta(Q) < \delta_0$.



Definiere

$$P \times Q \;:=\; \{P_i \times Q_j \mid i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., \ell\}$$

Dann gilt

1. $P \times Q \in \mathscr{P}(A \times B)$, da $\overline{P_i \times Q_j} = \overline{P}_i \times \overline{Q}_j$
2. $\delta(P \times Q) < \delta_0$, da
$$\delta(P_i \times Q_j) \;=\; \max\{\delta(P_i), \delta(Q_j)\}$$
3. $\mathrm{Vol}_{pq}(P_i \times Q_j) = \mathrm{Vol}_p(P_i)\mathrm{Vol}_q(Q_j)$

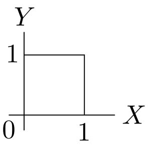
Ausserdem
$$\underline{S}(f_x, Q) \;\le\; F(x) \;\le\; \overline{S}(f_x, Q)$$
wobei
$$\underline{S}(f_x, Q) \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} \inf_{\overline{Q}_j} f(x,y) \cdot \mathrm{Vol}_q(Q_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_{A\times B} f - \varepsilon \;&\le\; \underline{S}(f, P \times Q) \\
&=\; \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \inf_{\overline{P}_i \times \overline{Q}_j} f \cdot \mathrm{Vol}_p(P_i)\mathrm{Vol}_q(Q_j) \\
&\le\; \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_p(P_i) \inf_{x \in \overline{P}_i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \inf_{y \in \overline{Q}_j} f(x,y) \cdot \mathrm{Vol}_q(Q_j) \right) \\
&\le\; \sum_{i=1}^{k} \inf_{\overline{P}_i} F \cdot \mathrm{Vol}_p(P_i) \\
&=\; \underline{S}(F, P)
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1: $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0,\ y \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x = 0,\ y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



f ist integrierbar. f_x ist integrierbar für $x > 0$, nicht aber integrierbar für $x = 0$.

$\to$ Wir brauchen also beide Voraussetzungen im Satz.

Beispiel 2: Seien $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader und $g : A \to \mathbb{R}$, $h : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
Sei $f : A \times B \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x,y) \;:=\; g(x)h(y)$$
$\Rightarrow f \in \mathscr{R}(A \times B)$ und
$$\int\limits_{A\times B} f \;=\; \int\limits_A g \int\limits_B h$$
$\to$ Spezialfall vom Satz von Fubini!

Beweis: Definiere $f_1, f_2 : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x,y) := g(x) \qquad f_2(x,y) := h(y)$$

Übung: $f_1, f_2 \in \mathscr{R}(A \times B)$ (Zerlegungen)

$\Rightarrow f = f_1 f_2 \in \mathscr{R}(A \times B)$ erfüllt die Voraussetzung von Satz 8

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_{A\times B} f &= \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_A \left(\int\limits_B g(x)h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_A g(x) \left(\int\limits_B h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \left(\int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int\limits_B h(y)\,\mathrm{d}y \right)
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 3: Sei $n = p+q$ und seien $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ messbar und beschränkt.
$\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ist messbar (und beschränkt) und

$$\mu_n(A \times B) = \mu_p(A)\mu_q(B)$$

Beweis: Seien $A' \subset \mathbb{R}^p$, $B' \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader mit $A \subset A'$, $B \subset B'$.
Seien $g := 1_A : A' \to \mathbb{R}$, $h := 1_B : B' \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
Definiere $f : A' \times B' \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = g(x)h(y)$

$$\Rightarrow f = 1_{A\times B}$$

ist Riemann-integrierbar nach Beispiel 2.
$\Rightarrow A \times B$ ist messbar und

$$\begin{aligned}
\mu_n(A \times B) &= \int\limits_{A'\times B'} 1_{A\times B} \\
&\overset{\text{Bsp2}}{=} \left(\int\limits_{A'} 1_A \right) \left(\int\limits_{B'} 1_B \right) \\
&= \mu_p(A)\mu_q(B)
\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 4: Nach Fubini können wir die Reihenfolge der Integration vertauschen.

Wir können nun mit Hilfe von Fubini beweisen, dass wir die Reihenfolge der zweiten Ableitungen vertauschen können:
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}
F(x,y) &:= \int\limits_0^y f(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
G(x,y) &:= \int\limits_0^x f(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach Kapitel 11, Satz 6 sind F, Q stetig.
Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_0^x F(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x \left(\int_0^y f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^y \left(\int_0^x f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^y G(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &=: h(x,y)\end{aligned}$$

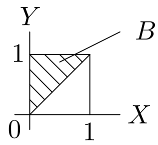
$\Rightarrow$ Die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= F(x,y) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= G(x,y)\end{aligned}$$

existieren überall und sind stetig, also ist $h \in C^1$.
Die Partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial x}$ existieren überall und sind stetig

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = f = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

Beispiel 5:



$B = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s \le t \le 1\}$

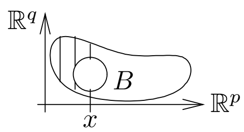
Behauptung:

$$\begin{aligned}\int_B f &= \int_0^1 \left(\int_0^t f(s,t)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\int_s^1 f(s,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Beweis: Satz 8 für

$$g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \quad : \quad g(s,t) := \begin{cases} f(s,t) & (s,t) \in B \\ 0 & (s,t) \notin B \end{cases}$$

Allgemein:



Korollar: Seien $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader, $B \subset P \times Q$ und $f : B \to \mathbb{R}^m$.

Annahme 1: B ist messbar und $f \in \mathscr{R}(B, \mathbb{R}^m)$.
Für $x \in P$ definieren wir $B_x := \{y \in Q \mid (x,y) \in B\}$ und

$$f_x : B_x \to \mathbb{R}^m \quad : \quad f_x(y) \quad := \quad f(x,y)$$

Annahme 2: Für jedes $x \in P$ ist B_x messbar und $f_x \in \mathscr{R}(B_x, \mathbb{R}^m)$.
Definiere $F : P \to \mathbb{R}^m$ durch $F(x) := \int_{B_x} f_x$
$\Rightarrow F \in \mathscr{R}(P)$ und

$$\int\limits_P F \quad = \quad \int\limits_B f$$

das heisst

$$\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad = \quad \int\limits_P \left(\int\limits_{B_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Beweis: Wir setzen f auf $P \times Q$ durch $f(x,y) := 0$ für $(x,y) \in P \times Q \setminus B$ fort. (QED)

15.4 Transformationsformel

Lemma 8: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und

$$\Phi B + c \quad := \quad \{\Phi x + c \mid x \in B\}$$

$\Rightarrow \Phi B + c$ ist messbar und

$$\mu(\Phi B + c) \quad = \quad |\det \Phi| \cdot \mu(B)$$

Beweis:

- *Schritt 1:* Betrachte $\Phi = \mathbf{1}$

  $$\Rightarrow \mu(B + c) \quad = \quad \mu(B)$$

  Beweis in Stichworten: Für Quader gilt

  $$\Rightarrow \int\limits_Q f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int\limits_{Q+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x$$

  Hier gilt $f = 1_B$

  $$\Rightarrow 1_B(x-c) \quad = \quad 1_{B+c}(x)$$

- *Schritt 2:* Von jetzt an setzen wir $c = 0$. Betrachte $\det \Phi = 0$.
  $\Rightarrow \Phi B$ ist eine Nullmenge.

  Beweis:

  Setze $V := \mathrm{im}\Phi = \{\Phi x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. V ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit

  $$\dim V \quad =: \quad d < n$$

  da $\det \Phi = 0$. Wähle eine Basis $e_1, ..., e_d$ von V. Definiere

  $$g : \mathbb{R}^d \to V \quad : \quad g(\lambda) := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$$

  g ist linear und bijektiv, $\Phi B \subset V$ und $A := g^{-1}(\Phi B) \subset \mathbb{R}^d$
  $\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow} g(\overline{A})$ ist eine Nullmenge
  $\Rightarrow \Phi B = g(A) \subset g(\overline{A})$ ist eine Nullmenge.

- *Schritt 3:* Betrachte $\Phi = s\mathbf{1}$, $\rho > 0$

$$\mu(sB) \quad = \quad s^n\mu(B)$$

Beweis:

  – *Fall 1:* B ist ein Quader, das heisst

$$B = Q = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$$

  Es gilt

$$sQ = \prod_{i=1}^{n}[sa_i, sb_i] \quad \Rightarrow \quad \mu(sQ) = \prod_{i=1}^{n} s(b_i - a_i) = s^n\mu(Q)$$

  – *Fall 2:* B ist beliebig. Sei $\varepsilon > 0$.
  $\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow}$ $\exists$Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$\mu(B_1) - \mu(B_0) \quad < \quad \varepsilon$$

  Da $\mathscr{P}(B_0) \neq \varnothing$ und $\mathscr{P}(B_1) \neq \varnothing$ gilt nach dem 1. Fall

$$\mu(sB_i) \quad = \quad s^n\mu(B_i) \qquad i = 0, 1$$

  Es gilt $sB_0 \subset sB \subset sB_1$ und

$$s^n\mu(B_0) = \mu(sB_0) \quad \leq \quad \mu(sB) \quad \leq \quad \mu(sB_1) = s^n\mu(B_1)$$
$$\Rightarrow \mu(sB_1) - \mu(sB_0) \quad \leq \quad s^n\varepsilon$$

  $\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow}$ sB ist Messbar und

$$\mu(sB) \quad = \quad s^n\mu(B)$$

- *Schritt 4:* $\forall\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists!\lambda(\Phi) \geq 0$ mit

$$\mu(\Phi B) \quad = \quad \lambda(\Phi)\mu(B)$$

für jede messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ (insbesondere ist ΦB messbar, wenn immer B messbar ist).

Beweis: Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Wähle den Einheitswürfel

$$W_0 \quad := \quad [0,1]^n \qquad \lambda \quad := \quad \mu(\Phi W_0)$$

1. Sei W irgendein Würfel, dann gilt

$$\mu(\Phi W) \quad = \quad \lambda\mu(W)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} W \quad &= \quad \prod_{i=1}^{n}[a_i, a_i + s] \\ &= \quad sW_0 + a \\ a \quad &:= \quad (a_1, ..., a_n) \\ \Rightarrow \mu(W) \quad &= \quad s^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(\Phi W) \quad &= \quad \mu(s\Phi W_0 + \Phi a) \\ &\overset{\text{Schr.1}}{=} \quad \mu(s\Phi W_0) \\ &= \quad s^n\mu(\Phi W_0) \\ &= \quad \lambda s^n \\ &= \quad \lambda\mu(W) \end{aligned}$$

2. Sei B eine beliebige, messbare Menge.
$\overset{\text{Sa4}}{\Rightarrow}$ $\exists$Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit Ecken in $2^{-m}\mathbb{Z}^n$, so dass $B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$\mu(B_1) - \mu(B_0) \; < \; \varepsilon$$

B_0, B_1 besitzen dann Würfel-Partitionen

$$\begin{aligned} \overset{1.}{\Rightarrow} \mu(\Phi B_0) \; &\leq \; \mu(\Phi B) \; \leq \; \mu(\Phi B_1) \\ \lambda\mu(B_0) \; &\leq \; \lambda\mu(B) \; \leq \; \lambda\mu(B_1) \end{aligned}$$

wobei $\mu(\Phi B_i) = \lambda\mu(B_i)$, $i = 0, 1$ und

$$\mu(\Phi B_1) - \mu(\Phi B_0) \; \leq \; \lambda\varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |\mu(\Phi B) - \lambda\mu(B)| \; &< \; \varepsilon \\ \Rightarrow \mu(\Phi B) \; &= \; \lambda\mu(B) \end{aligned}$$

Warum ist ΦB messbar?
∂B ist eine Nullmenge
$\Rightarrow$ Da $\det \Phi \neq 0$ ist, ist Φ ein Homöomorphismus
$\Rightarrow \partial(\Phi B) = \Phi(\partial B)$
$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow}$ $\partial(\Phi B)$ ist eine Nullmenge
$\Rightarrow \Phi B$ ist messbar.

- *Schritt 5:* Die im 4. Schritt definiere Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^{n \times n} \to [0, \infty)$ hat folgende Eigenschaften

  a) $\det \Phi = 0 \Rightarrow \lambda(\Phi) = 0$ (Schritt 2)
  b) $\lambda(s\mathbf{1}) = s^n$ (Schritt 3)
  c) $\lambda(\Phi\Psi) = \lambda(\Phi)\lambda(\Psi)$, da

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi\Psi) \; &= \; \mu(\Phi(\Psi W_0)) \\ &= \; \lambda(\Phi)\mu(\Psi W_0) \\ &= \; \lambda(\Phi)\lambda(\Psi) \end{aligned}$$

- *Schritt 6:* $\lambda(\Phi) = |\det \Phi| \; \forall \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  – *Fall 1:* Φ ist eine Permutationsmatrix, das heisst

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \qquad \sigma : \{1, ..., n\} \overset{\text{bij.}}{\to} \{1, ..., n\}$$

$$\Phi W_0 = W_0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda(\Phi) = \mu(\Phi W_0) \; = \; 1 \; = \; |\det \Phi|$$

  – *Fall 2:* Φ ist eine Diagonalmatrix

$$\Phi \; = \; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\Phi W_0 \; = \; \prod_{i=1}^{n} [0, \lambda_i] \qquad (\lambda_i > 0)$$

und damit

$$\mu(\Phi W_0) \; = \; \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \; = \; |\det \Phi|$$

– *Fall 3:*

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

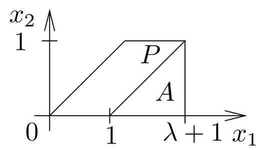
$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi W_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid 0 \le x_i \le 1 \right\} \\ &= P \times Q \end{aligned}$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^{n-2}$ der Einheitswürfel ist und

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in [0,1] \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda(\Phi) &= \mu_n(\Phi W_0) \\ &= \mu_2(P) \underbrace{\mu_{n-2}(Q)}_{1} \\ &= \mu_2(P) \end{aligned}$$

Zu zeigen: $\mu_2(P) = 1$



$$\begin{aligned} P &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 + \lambda,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le x - \lambda y \le 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 + \lambda,\, 0 \le y \le 1,\, \frac{x-1}{\lambda} \le y \le \frac{x}{\lambda}\right\} \\ A &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le \lambda + 1,\, 0 \le y \le \frac{x-1}{\lambda}\right\} \\ B &:= A \cup P \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \lambda + 1,\, 0 \le y \le \min\left\{1, \frac{x}{\lambda}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$A \cap P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le \lambda + 1,\, y = \frac{x-1}{\lambda}\right\}$$

$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow}$ $A \cap P$ ist eine Nullmenge
$\Rightarrow$ Nach Korollar 2 von Satz 4 gilt

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \mu(B = P \cup A) - \mu(A) \\ \mu(A) &= \int_1^{\lambda+1} \frac{x-1}{\lambda}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\lambda} \frac{\xi}{\lambda}\,\mathrm{d}\xi = \left.\frac{\xi^2}{2\lambda}\right|_0^{\lambda} = \frac{\lambda}{2} \\ \mu(B) &= \int_0^{1+\lambda} \min\left\{1, \frac{x}{\lambda}\right\}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\lambda} \frac{x}{\lambda}\,\mathrm{d}x}_{\lambda/2} + \underbrace{\int_{\lambda}^{1+\lambda} 1\,\mathrm{d}x}_{1} = 1 + \frac{\lambda}{2} \\ \mu(P) &= \mu(B) - \mu(A) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda(\Phi) = 1 = |\det \Phi|$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass sich jede Matrix Φ als Produkt von Elementarmatrizen darstellen lässt (P,D,S), das heisst

$$\Phi = \Phi_1\Phi_2...\Phi_N$$

Nach Schritt 5 gilt

$$\begin{aligned}\lambda(\Phi) &= \lambda(\Phi_1)...\lambda(\Phi_N)\\ &= |\det\Phi_1|...|\det\Phi_N|\\ &= |\det(\Phi_1...\Phi_N)|\\ &= |\det\Phi|\end{aligned}$$

(QED)

Lemma 9: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in U$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, $\varphi(0) = 0$, $\det(\mathrm{d}\varphi(0)) \neq 0$. Definiere

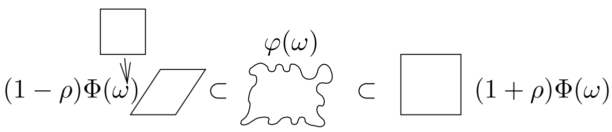
$$W := [-s,s]^n \subset U \qquad \Phi := \mathrm{d}\varphi(0)$$

Annahme: $\forall x \in W$

$$\|\mathrm{d}\varphi(x) - \Phi\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{n}\,\|\Phi^{-1}\|}$$

wobei $0 < \rho < 1$.

$$\Rightarrow (1-\rho)\Phi W \subset \varphi(W) \subset (1+\rho)\Phi W$$



Beweis: (Wie Lemma 3 in Kapitel 13)
Definiere

$$\psi(x) := \Phi^{-1}\varphi(x)$$

$\Rightarrow \psi(0) = 0$, $\mathrm{d}\psi(0) = \mathbf{1}$

1. $\forall x \in W$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}\psi(x) - \mathbf{1}\| &\leq \|\Phi^{-1}\|\,\|\mathrm{d}\varphi(x) - \Phi\|\\ &\leq \frac{\rho}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

   Nach Kapitel 11, Satz 8 gilt $\forall x \in W$

$$\begin{aligned}\|\psi(x) - x\| &= \|(\psi - id)(x) - (\psi - id)(0)\|\\ &\leq \frac{\rho}{\sqrt{n}}\|x\|\\ &\leq \rho s\end{aligned}$$

   $\Rightarrow \forall x \in W$

$$\begin{aligned}|\psi_i(x)| &\leq \underbrace{|x_i|}_{\leq s} + \rho s\\ &\leq (1+\rho)s\end{aligned}$$

   $\Rightarrow \psi(W) \subset (1+\rho)W$
   $\Rightarrow \varphi(W) \subset (1+\rho)\Phi W$

2. Sei $y \in (1-\rho)W$

   Zu zeigen: $\Phi y \in \varphi(W)$, das heisst $y \in \psi(W)$.

   Definiere $f : W \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x) := x + y - \psi(x)$$

   Gesucht: Ein Fixpunkt von f

a) $f(W) \subset W$

$$\begin{aligned} |f_i(x)| &\leq |y_i| + |x_i - \psi_i(x)| \\ &\leq (1-\rho)s + \rho s \\ &\leq s \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) \in W \, \forall x \in W$

b) $f : W \to W$ ist eine Kontraktion

$$\mathrm{d}f(x) = \mathbf{1} - \mathrm{d}\psi(x)$$

$\overset{1.}{\Rightarrow} \forall x \in W$

$$\|\mathrm{d}f(x)\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{n}} < 1$$

$\Rightarrow$ Nach Kapitel 11, Satz 8 folgt $\forall x, x' \in W$

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{n}} \|x - x'\|$$

$\Rightarrow$ Nach dem Banachschen Fixpunktsatz $\exists! x \in W$ mit $f(x) = x$
$\Rightarrow \psi(x) = y$
"Und deswegen ist irgendeine Menge Teilmenge irgendeiner anderen Menge" ($(1-\rho)\Phi W \subset \varphi(W)$) (QED)

Lemma 10: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, $K \subset U$ kompakt und $\det(\mathrm{d}\varphi(x)) \neq 0 \; \forall x \in K$.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall W = [a_1 - s, a_1 + s] \times ... \times [a_n - s, a_n + s] \subset K$ mit $s < \delta$ gilt

$$|\mu(\varphi(W)) - |\det(\mathrm{d}\varphi(a))| \cdot \mu(W)| \leq \varepsilon \cdot \mu(W)$$

Beweis: Die Abbildung

$$K \to [0, \infty) \quad : \quad x \mapsto \|\mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\|$$

ist stetig (Kapitel X, Lemma 7 oder Kapitel XIII, Beweis von Lemma 3).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup_{x \in K} \|\mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\| &< \infty \\ \sup_{x \in K} |\det(\mathrm{d}\varphi(x))| &< \infty \end{aligned}$$

das heisst $\exists c > 0 : \forall x \in K$

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\varphi(x)^{-1}\| &\leq c \\ |\det(\mathrm{d}\varphi(x))| &\leq c \end{aligned}$$

Wähle $\rho := \varepsilon / c$. Die Abbildung $\mathrm{d}\varphi : K \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist gleichmässig stetig, also $\exists \delta > 0 : \forall x, a \in K$

$$\|x - a\| < \delta\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \|\mathrm{d}\varphi(x) - \mathrm{d}\varphi(a)\| < \frac{\rho}{\sqrt{n}\, c}$$

Sei

$$W = \prod_{i=1}^{n} [a_i - s, a_i + s] \subset K$$

mit $s < \delta$.
$\Rightarrow \forall x \in W$

$$\|x - a\| \leq \sqrt{n}\, s < \sqrt{n}\, \delta$$

und da $W \subset K$

$$\|\mathrm{d}\varphi(x) - \mathrm{d}\varphi(a)\| < \frac{\rho}{\sqrt{n}\, c} \leq \frac{\rho}{\sqrt{n}\, \|\Phi^{-1}\|}$$

wobei $\Phi := \mathrm{d}\varphi(a)$.

$$\overset{\text{Lem9}}{\Rightarrow} (1-\rho)\Phi(W-a) \subset \varphi(W)-\varphi(a) \subset (1+\rho)\Phi(W-a)$$

$$\Rightarrow (1-\rho)\underbrace{\mu(\Phi(W-a))}_{|\det\Phi|\cdot\mu(W)} \;\leq\; \underbrace{\mu(\varphi(W)-\varphi(a))}_{\mu(\varphi(W))} \;\leq\; (1+\rho)\underbrace{\mu(\Phi(W-a))}_{|\det\Phi|\cdot\mu(W)}$$

Nach Umformung ergibt sich

$$-\rho|\det\Phi|\cdot\mu(W) \;\leq\; \mu(\varphi(W)) - |\det\Phi|\cdot\mu(W) \;\leq\; \rho|\det\Phi|\cdot\mu(W)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\mu(\varphi(W)) - |\det\Phi|\cdot\mu(W)| &\leq \rho\underbrace{|\det\Phi|}_{\leq c}\cdot\mu(W)\\ &\leq \rho c\cdot\mu(W)\\ &= \varepsilon\cdot\mu(W)\end{aligned}$$

(QED)

Satz 9 (Transformationsformel): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, $A \subset U$ eine kompakte, messbare Teilmenge und $N \subset A$ eine Nullmenge. Wir nehmen weiter an:

a) $\varphi|_{A\setminus N}$ sei injektiv

b) $\det(\mathrm{d}\varphi(x)) \neq 0\ \forall x \in A\setminus N$

$\Rightarrow B := \varphi(A)$ ist kompakt und messbar und $\forall f \in C^0(B,\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\int_B f(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_A f(\varphi(x))|\det(\mathrm{d}\varphi(x))|\,\mathrm{d}x$$

(insbesondere ist $(f\circ\varphi)|\det\mathrm{d}\varphi| : A \to \mathbb{R}^m$ integrierbar)

Beweis: B ist messbar. $A\setminus(\partial A\cup N)$ ist offen.
$\Rightarrow$ Da $\varphi|_{A\setminus N}$ injektiv und streng monoton ist, ist $\varphi(A\setminus(\partial A\cup N))$ offen und

$$\partial B \;=\; B\setminus B^\circ \;\subset\; B\setminus\varphi(A\setminus(\partial A\cup N)) \;\subset\; \varphi(\underbrace{\partial A\cup N}_{\text{Nullm.}})$$

$\overset{\text{Sa5}}{\Rightarrow}$ ∂B ist eine Nullmenge.

1. Nach Satz 9 in Kapitel 11 ist $\varphi|_A$ Lipschitz-stetig, das heisst $\exists c > 0 : \forall x, x' \in A$
$$\|\varphi(x)-\varphi(x')\| \;\leq\; c\|x-x'\|$$

2. f ist beschränkt, das heisst $\exists M > 0 : \forall y \in B$
$$\|f(y)\| \;\leq\; M$$

3. $\exists c' > 0 : \forall x \in A$
$$|\det(\mathrm{d}\varphi(x))| \;\leq\; c'$$

4. Sei $\varepsilon > 0$. nach Satz 4 $\exists$Quadergebäude $A_0 \subset A\setminus N$ mit
$$\mu(A\setminus N) - \mu(A_0) \;<\; \varepsilon$$
und allen Ecken in $2^{-q}\mathbb{Z}^n$

Behauptung 1:

$$\left\| \int\limits_{A \setminus A_0} f(\varphi(x)) |\det(\mathrm{d}\varphi(x))| \,\mathrm{d}x \right\| \leq Mc'\varepsilon$$

Behauptung 2: Für $B_0 := \varphi(A_0)$ gilt

$$\left\| \int\limits_{B \setminus B_0} f \right\| \leq 2M(3c\sqrt{n})^n\varepsilon$$

Behauptung 3:

$$\left| \int\limits_{B_0} f - \int\limits_{A_0} (f \circ g) |\det \varphi| \right| \leq (2 + M\mu(A))\varepsilon$$

Aus den Behauptungen 1 bis 3 folgt Satz 9.

Beweis von Behauptung 1:

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_{A \setminus A_0} f |\det \mathrm{d}\varphi| \right\| &\leq \int\limits_{A \setminus A_0} \underbrace{\|f\|}_{\leq M} \underbrace{|\det(\mathrm{d}\varphi)|}_{\leq c'} \\
&\leq \int\limits_{A \setminus A_0} Mc' \\
&= \mu(A \setminus A_0)Mc' \\
&= \underbrace{\mu((A \setminus N) \setminus A_0)}_{<\varepsilon} Mc'
\end{aligned}$$

Beweis von Behauptung 2: Nach Satz 4 $\exists$Quadergebäude

$$A_1 = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

so dass

- $A \setminus A_0 \subset A_1$
- $\mu(A_1) < \mu(A \setminus A_0) + \varepsilon < 2\varepsilon$

o.B.d.A. nehmen wir an, dass alle Ecken von P_i in $2^{-p}\mathbb{Z}^n$ liegen und dass alle P_i disjunkte Würfel mit Seitenlänge 2^{-p} sind.

$$\Rightarrow A \setminus A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i \qquad \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) < 2\varepsilon$$

Sei s_i die Seitenlänge von P_i also $\mu(P_i) = s_i^n$
$\Rightarrow \|x - x'\| \leq \sqrt{n}\, s_i \ \forall x, x' \in P_i$
$\Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq c\sqrt{n}\, s_i \ \forall x, x' \in P_i \cap A$
$\Rightarrow \varphi(P_i \cap A) \subset P_i'$ ist ein Würfel mit Seitenlänge $3c\sqrt{n}\, s_i = s_i'$

$$\Rightarrow \mu(P_i') = (s_i')^n = (3c\sqrt{n})^n s_i^n = (3c\sqrt{n})^n \mathrm{Vol}(P_i)$$

$$\varphi(A \setminus A_0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(P_i \cap A)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B \setminus B_0 &= \varphi(A) \setminus \varphi(A_0) \\
&\subset \varphi(A \setminus A_0) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(P_i \cap A) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu(B \setminus B_0) &\le \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i') \\
&= (3c\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \\
&\le 2\varepsilon(3c\sqrt{n})^n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung 2.

Beweis von Behauptung 3: Wähle $\delta > 0$, so dass folgendes gilt:

1) Behauptung von Lemma 10
2) Sei
$$A_0 = \bigcup_{j=1} A_j$$
eine Vereinigung aus fast disjunkten Mengen, $x_j \in A_j$ und $\operatorname{diam}(A_j) < \delta$, dann gilt
$$\left\| \int_{A_0} (f \circ \varphi) |\det(\mathrm{d}\varphi)| - \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(x_j)) |\det(\mathrm{d}\varphi(x_j))| \cdot \mu(A_j) \right\| \le \varepsilon$$
3) Sei
$$B_0 = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j$$
eine Vereinigung fast disjunkter Mengen, $y_i \in B_j$, $\operatorname{diam}(B_j) < c\delta$
$$\Rightarrow \left\| \int_{B_0} f - \sum_{j=1}^{\ell} f(y_j) \cdot \mu(B_j) \right\| \le \varepsilon$$

Wähle eine Partition
$$A_0 = \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j$$
wobei Q_j abgeschlossene und fast disjunkte Würfel mit Seitenlänge $t_j < \delta/\sqrt{n}$ sind. Definiere $a_j :=$ Mittelpunkt von Q_j.

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(Q_j) < \delta \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \left\| \int (f \circ \varphi) |\det(\mathrm{d}\varphi)| - \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(a_j)) |\det(\mathrm{d}\varphi(a_j))| \cdot \mu(Q_j) \right\| < \varepsilon$$

und $\operatorname{diam}(\varphi(Q_j)) < c\delta$, also gilt

$$\left\| \int_{B_0} f - \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(a_j)) \cdot \mu(\varphi(Q_j)) \right\| < \varepsilon$$

$$B_j := \varphi(Q_j) \qquad y_j := \varphi(a_j)$$

Ausserdem gilt

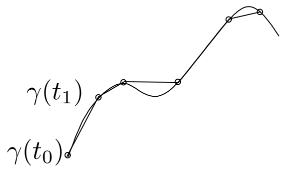
$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(a_j)) \cdot \mu(\varphi(Q_j)) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(a_j)) |\det(\mathrm{d}\varphi(a_j))| \mu(Q_j) \right\|_{\mathbb{R}^m} \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\|f(\varphi(a_j))\|}_{\le M} \cdot \underbrace{|\mu(\varphi(Q_j)) - |\det(\mathrm{d}\varphi(a_j))| \cdot \mu(Q_j)|}_{\le \varepsilon \cdot \mu(Q_j)} \\
&\quad \le M\varepsilon \sum_{j=1}^{\ell} \mu(Q_j) \\
&\quad = M\mu(A_0)\varepsilon \\
&\quad \le M\mu(A)\varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung 3 (QED)

16 Integrale über Untermannigfaltigkeiten

16.1 Graphen

Sei $I = [a, b]$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig.



Frage: Wie lang ist γ?

Erinnern wir uns an die Menge

$$\mathscr{P}(I) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Menge der Partitionen } P = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \text{ von } I, \\ a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = b \end{array} \right\}$$

Definiere

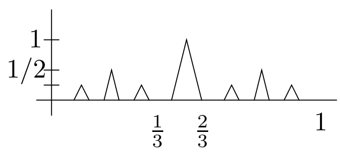
$$L(\gamma, P) \quad := \quad \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Definition: Die *Länge* von γ ist definiert durch

$$L(\gamma) \quad := \quad \sup_{P \in \mathscr{P}(I)} L(\gamma, P)$$

Ist $L(\gamma) < \infty$?

Beispiel: $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$



Der Limes $L(\gamma) = \infty$.

Definition: Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heisst *rektifizierbar*, wenn $L(\gamma) < \infty$.

Lemma 1: Sei $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung
$\Rightarrow \gamma$ ist rektifizierbar und

$$L(\gamma) \quad = \quad \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

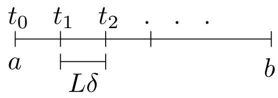
Beweis:

$$L(\gamma, P) \quad \leq \quad \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \quad = \quad \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t \right\| \quad \leq \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0 : \forall s, t \in I$

$$|s - t| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)\| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Sei $P = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \in \mathscr{P}(I)$ mit $|t_i - t_{i-1}| < \delta \ \forall i$



$$\Rightarrow \|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)\| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\forall s, t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\Rightarrow \left\|\dot\gamma(t) - \frac{\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right\| \quad = \quad \left\|\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$< \quad \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad \|\dot\gamma(t)\| \quad < \quad \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \quad < \quad \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \quad < \quad L(\gamma, P) + \varepsilon$$

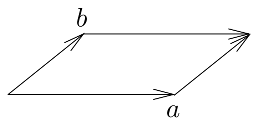
Also gilt

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(I)} L(\gamma, P) \quad = \quad \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t$$

(QED)

16.2 Parallelogramme

Wir haben ein Parallelogramm



Für den Flächeninhalt A und $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$A \quad = \quad \sqrt{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2}$$

Wir wollen diese Formel nun auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Definition: Ein *Parallelotop* hat die Form

$$P(a_1, ..., a_d) \quad = \quad \left\{\sum_{i=1}^d t_i a_i \mid 0 \le t_i \le 1\right\}$$

wobei $a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}^n$. Was ist das d-dimensionale Volumen von $P(a_1, ..., a_d)$?

Axiomatischer Zugang: Wir suchen eine Funktion

$$v_d : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{d} \to [0, \infty)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(V1) Für $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v_d(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_d a_d) \quad = \quad \prod_{i=1}^d |\lambda_i| \cdot v_d(a_1, ..., a_d)$$

(V2) Scherung: Für $i \ne j$ gilt

$$v_d(a_1, ..., a_i + a_j, ..., a_j, ..., a_d) \quad = \quad v_d(a_1, ..., a_d)$$

(V3) Für $\|a_i\| = 1$ mit $\langle a_i, a_j\rangle = 0\ \forall i \ne j$ gilt

$$v_d(a_1, ..., a_d) \quad = \quad 1$$

Lemma 2: Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $d \leq n$.
$\exists! v_d : (\mathbb{R}^n)^d \to [0, \infty)$, das die Bedingungen $(V1) - (V3)$ erfüllt und zwar

$$v_d(a_1, ..., a_d) = \sqrt{\det(A^T A)}$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

und

$$A^T A = (\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j=1,...,d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

Bemerkung: $A^T A$ ist positiv semidefinit, also ist $\det(A^T A) \geq 0$.

Beweis von Lemma 2: Übung (QED)

Beispiel:

- $d = 1$: $v_1(a) = \|a\|$
- $d = 2$: $v_2(a, b) = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2}$
- $d = n - 1$: $v_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}) = \|a_0\|$

$$a_0 = a_1 \times ... \times a_{n-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \alpha_k = (-1)^k \det(A_k)$$

wobei wir in $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die k-te Zeile von A weglassen.
$a_0 \perp a_i$, $i = 1, ..., n-1$, $B = \begin{pmatrix} a_0 & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(B) = \det(A^T A) = \|a_0\|^2$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} \|a_0\|^2 & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}$$

$$(\det B)^2 = \det(B^T B) = \|a_0\|^2 \det(A^T A)$$

Beispiel: Sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader und $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

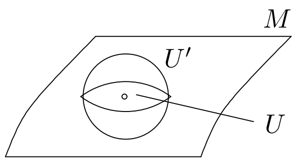
$$\Rightarrow v_d(AQ) = \sqrt{\det(A^T A)} \mu_d(Q)$$

Beweis: $A = (a_1, ..., a_d)$, $Q = \prod_{i=1}^d [0, \lambda_i]$, $AQ = P(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_d a_d)$, $\mathrm{Vol}(Q) = \prod \lambda_i$

$$\begin{aligned} v_d(AQ) &= v_d(\lambda_1 a_1, ..., \lambda_d a_d) \\ &= \underbrace{\prod \lambda_i}_{\mu_d(Q)} \cdot \underbrace{v_d(a_1, ..., a_d)}_{\sqrt{\det(A^T A)}} \end{aligned}$$

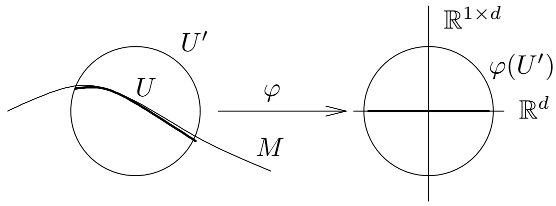
16.3 Mannigfaltigkeiten

$M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $U \subset M$.



Definition: U heisst *Kartengebiet*, wenn es eine offene Teilmenge $U' \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : U' \to \varphi(U') \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

1) $U' \cap M = U$
2) $\varphi(U' \cap M) = \varphi(U') \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$



Eine *Parametrisierung* eines Kartengebietes $U \subset M$ ist eine bijektive C^1-Abbildung $\psi : \Omega \to U$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, so dass

- ψ ist bijektiv
- $\mathrm{d}\psi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\psi^{-1} : U \to \Omega$ ist stetig

(Insbesondere ist $\psi : \Omega \to U$ ein Homöomorphismus)

Lemma 3:

(i) Jedes Kartengebiet $U \subset M$ besitzt eine Parametrisierung $\psi : \Omega \to U$

(ii) Falls $\psi' : \Omega' \to U$ eine weitere Parametrisierung ist, so gibt es einen C^1-Diffeomorphismus $g : \Omega' \to \Omega$, so dass

$$\psi' = \psi \circ g$$

Beweis:

(i) Sei $U' \subset \mathbb{R}^n$, $M \cap U' = U$, $\varphi : U' \to \varphi(U') \subset \mathbb{R}^n$. Definiere die Parametrisierung durch

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \mid (x_1, ..., x_d, 0, ..., 0) \in \varphi(U')\} \\ \psi(x_1, ..., x_d) &:= \varphi^{-1}(x_1, ..., x_d, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

(ii) $g := \psi^{-1} \circ \psi' : \Omega' \to \Omega$ ist ein Homöomorphismus!

Definiere die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ durch

$$\pi(x_1, ..., x_n) := (x_1, ..., x_d)$$

das heisst $\psi^{-1} = \pi \circ \varphi : U \to \Omega$.
$\Rightarrow g = \pi \circ \varphi \circ \psi' : \Omega' \to \Omega$ ist C^1 und

$$\psi \circ g = \psi'$$

$\Rightarrow \mathrm{d}\psi(g(x))\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}\psi'(x)\ \forall x \in \Omega'$
$\Rightarrow \det(\mathrm{d}g(x)) \neq 0\ \forall x \in \Omega'$
$\Rightarrow g'$ ist ein C^1-Diffeomorphismus. (QED)

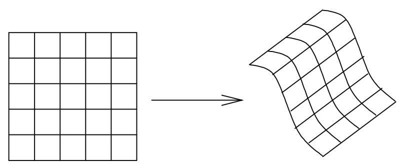
Situation: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $U \subset M$ ein Kartengebiet. Wir wollen nun das Integral

$$\int_U f \, \mathrm{d}S$$

definieren.

Idee: Sei $\psi : \Omega \to U$ eine Parametrisierung. Wir machen folgende Annahmen:

- ψ lässt sich zu einer Abbildung $\psi : \overline{\Omega} \to \overline{U}$ erweitern.
- $\overline{\Omega}$ ist ein abgeschlossener Quader



Sei

$$\overline{\Omega} \;=\; \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j$$

eine Vereinigung fast disjunkter Mengen Q_j und

$$\overline{U} \;=\; \bigcup_{i=1}^{\ell} \psi(Q_j)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_d(\psi(Q_j)) &\sim \mathrm{Vol}_d(\mathrm{d}\psi(x_j)Q_j)\\ &= \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi(x_j)^T\psi(x_j))}\cdot\mu_d(Q_j)\end{aligned}$$

für $x_j \in Q_j$

$$\begin{aligned}\int_U f\,\mathrm{d}S &\sim \sum_{i=1}^{\ell} f(\psi(x_j))\mathrm{Vol}_d(\psi(Q_j))\\ &\sim \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} f(\psi(x_j))\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi(x_i)^T\mathrm{d}\psi(x_i))}\cdot\mu_d(Q_j)}_{\text{Riemann-Summe}}\end{aligned}$$

Definition: Das *Integral von f über U* ist definiert durch

$$\int_U f\,\mathrm{d}S \;:=\; \int_\Omega f(\psi(x))\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi(x)^T\mathrm{d}\psi(x))}\,\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

wobei $\psi : \Omega \to U$ eine Parametrisierung des Kartengebiets $U \subset M$ ist.

Lemma 4: Die rechte Seite von $(\star)$ ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Notation: Für $x \in \Omega$ ist

$$g^\psi(x) \;:=\; \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi(x)^T\mathrm{d}\psi(x))}$$

Beweis: Sei $\psi' = \psi \circ g$ (siehe Lemma 3) wobei

$$g : \Omega' \to \Omega$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist.
$\Rightarrow$ Mit der Kettenregel gilt $\forall x \in \Omega'$

$$\mathrm{d}\psi'(x) = \mathrm{d}\psi(g(x))\mathrm{d}g(x)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g^{\psi'}(x) &= \sqrt{\det(\mathrm{d}g(x))^2 \det(\mathrm{d}\psi(g(x))^T \mathrm{d}\psi(g(x)))} \\ &= g^{\psi}(g(x))|\det \mathrm{d}g(x)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} f(\psi'(x))g^{\psi'}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega'} f(\psi(g(x)))g^{\psi}(g(x))|\det \mathrm{d}g(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Sa9}}{\underset{\text{K15}}{=}} \int_{\Omega} f(\psi(x))g^{\psi}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(QED)

Beispiel 1: $d = 1$, $\psi = \gamma : [a, b] \to U$

$$\int_U f\,\mathrm{d}S = \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Beispiel 2: $d = n - 1$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$

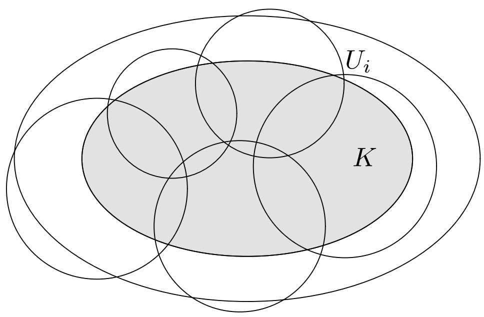
$$\begin{aligned}U &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, ..., x_{n-1}) \in \Omega,\ x_n = h(x_1, ..., x_{n-1})\} \\ \psi(x_1, ..., x_{n-1}) &:= (x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1})) \\ \int_U f\,\mathrm{d}S &= \int_\Omega f(\psi(x))\sqrt{1 + \|\nabla h(x)\|^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Satz 1 (Partition der Eins): Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine endliche Überdeckung von K (das heisst $U_i \subset \mathbb{R}^n$ ist offen für jedes $i \in I$, I ist eine endliche Menge und $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$).
$\Rightarrow \exists C^\infty$-Abbildungen $\rho_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, so dass $\forall x \in K$

$$\sum_{i\in I} \rho_i(x) = 1$$

und $\forall i \in I$

$$\mathrm{supp}(\rho_i) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$$



Beweis: o.B.d.A. sei $I = \{1, ..., m\}$

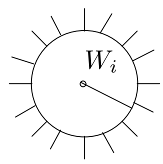
- *Schritt 1:* $\exists V_i, W_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, $i \in I$, so dass $\overline{W}_i \subset V_i$, $\overline{V}_i \subset U_i$, $K \subset \bigcup_{i\in I} W_i$.

  Beweis: $\exists \delta > 0 : \forall x \in K\, \exists i$:
  $$B_{5\delta}(x) \subset U_i$$
  (siehe Kapitel 15, Beweis von Lemma 5, Behauptung 1)

  Definiere
  $$\begin{aligned} V_i &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{B_\delta(x)} \subset U_i\} \\ W_i &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{B_{2\delta}(x)} \subset U_i\} \end{aligned}$$
  Definiere weiter
  $$\begin{aligned} V_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{B_\delta(x)} \cap K = \varnothing\} \\ W_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{B_{2\delta}(x)} \cap K = \varnothing\} \end{aligned}$$
  es folgt
  $$\overline{W}_0 \subset V_0 \qquad \bigcup_{i=0}^{m} W_i = \mathbb{R}^n$$

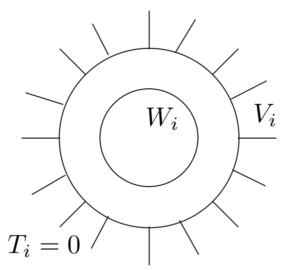
- *Schritt 2:* $\exists$stetige Funktionen $\sigma_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, ..., m$, so dass $\sigma_i(x) > 0$ $\forall x \in W_i$, $\sigma_i(x) = 0\ \forall x \notin W_i$

  Beweis: Definiere
  $$\sigma_i(x) := \inf_{y \notin W_i} \|x - y\|$$

  Wenn $x \in W_i$ folgt $\sigma_i(x) > 0$ (sonst $\exists$Folge $y_\nu \notin W_i$, $\|x - y_\nu\| \to 0$, dann gilt $y_\nu \to x$, also $x \notin W_i$).
  σ_i ist stetig, da
  $$|\sigma_i(x) - \sigma_i(x')| \le \|x - x'\|$$

- *Schritt 3:* $\exists C^\infty$-Abbildung $\tau_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $\tau_i(x) > 0\ \forall x \in W_i$, $\tau_i(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $\tau_i(x) = 0\ \forall x \notin V_i$.

  Beweis: Definiere $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ durch
  $$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \ge 1 \end{cases}$$
  φ ist eine C^∞-Abbildung. Definiere auch
  $$\varphi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^n}\,\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Es gilt $\varphi_\delta(x) > 0$, wenn $\|x\| < \delta$ und $\varphi_\delta(x) = 0$, wenn $\|x\| \geq \delta$. Nun definiere

$$\tau_i(x) \;:=\; \varphi_\delta \star \sigma_i(x) \;:=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(x-y)\sigma_i(y)\,\mathrm{d}y$$

$\Rightarrow \tau_i$ ist C^∞ und es gilt

$$\begin{aligned} x \in W_i \;&\Rightarrow\; \sigma_i(x) > 0 \;\Rightarrow\; \varphi_\delta(x-y)\sigma_i(y) > 0 \text{ für } y \sim x \\ &\Rightarrow\; \tau_i(x) > 0 \end{aligned}$$

ausserdem

$$\begin{aligned} x \notin V_i \;&\Rightarrow\; B_\delta(x) \cap W_i = \varnothing \;\Rightarrow\; \varphi_\delta(x-y)\sigma_i(y) = 0\,\forall y \in \mathbb{R}^n \\ &\Rightarrow\; \tau_i(x) = 0 \end{aligned}$$

- Aus Schritt 3 folgt $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=0}^{m} \tau_i(x) \;>\; 0$$

$$\rho_i(x) \;:=\; \frac{\tau_i(x)}{\sum_{i=0}^{m} \tau_j(x)}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=0}^{m} \rho_i(x) \;=\; 1$$

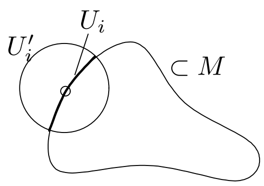
$$\mathrm{supp}\rho_i \;=\; \mathrm{supp}\tau_i \subset \overline{V}_i \qquad \overline{V}_0 \cap K \;=\; \varnothing$$

$\Rightarrow \rho_0(x) = 0 \;\forall x \in K$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x) \;=\; 1 \quad \forall x \in K$$

(QED)

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.



$\{U_i'\}_{i\in I}$ sei eine offene, endliche Überdeckung von M, so dass $U_i := U_i' \cap M$ ein Kartengebiet ist für jedes $i \in I$. Sei $\rho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $i \in I$ eine Partition der Eins, wie in Satz 1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig.
Das *Integral von f über M* ist definiert durch

$$\int\limits_M f\,\mathrm{d}S \;:=\; \sum_{i\in I} \int\limits_{U_i} \rho_i f\,\mathrm{d}S$$

Satz 2: Das Integral von f über M ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung durch Kartengebiete und der Partition der Eins.

Beweis: Sei $\{V_j\}_{j\in J}$ eine beliebige andere Überdeckung von M durch Kartengebiete, $\tau_j : M \to [0,1]$ eine zugehörige Partition der Eins.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j\in J}\int\limits_{V_j} \tau_j f\,\mathrm{d}S &= \sum_{j\in J}\int\limits_{V_j}\left(\sum_{i\in I}\rho_i\right)\tau_i f\,\mathrm{d}S\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int\limits_{U_i\cap V_j}\rho_i\tau_j f\,\mathrm{d}S\\
&= \sum_{i\in I}\int\limits_{U_i}\rho_i\left(\sum_{i\in J}\tau_j\right) f\,\mathrm{d}S\\
&= \sum_{i\in I}\int\limits_{U_i}\rho_i f\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

(QED)

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. $N \subset M$ heisst d-dimensionale Nullmenge, wenn für jede C^1-Parametrisierung $\psi : \Omega \to U$ eines Kartengebietes $U \subset M$ die Menge $\psi^{-1}(U\cap N) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^d$ ist.

Bemerkung: Sei $\psi : \Omega \to U \subset M$ eine Parametrisierung eines Kartengebietes, $N := M \setminus U$ sei eine Nullmenge

$$\Rightarrow \int\limits_M f\,\mathrm{d}S = \int\limits_U f\,\mathrm{d}S$$

Beweis: Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung durch Kartengebiete und $\rho_i : M \to [0,1]$ eine Partition der Eins.

$$\sum_{i\in I}\int\limits_{U_i}\rho_i f\,\mathrm{d}S = \sum_{i\in I}\int\limits_{U_i\setminus N}\rho_i f\,\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \int\limits_M f\,\mathrm{d}S = \int\limits_{U=M\setminus N} f\,\mathrm{d}S$$

(QED)

Beispiel 3: Polarkoorinaten

$$\begin{aligned}
M_r &:= S_r^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}\\
U_r &:= \{x\in M_r \mid x_2 = 0 \Rightarrow x_1 > 0\} \subset M_r\\
\Omega &:= \{\theta\in\mathbb{R}^{n-1} \mid |\theta_1| < \pi,\ |\theta_i| < \frac{\pi}{2},\ i\geq 2\}
\end{aligned}$$

$\psi_r : \Omega \to U_r$ sei ein C^1-Diffeomorphismus und

$$\begin{aligned}
\psi_r(\theta) &:= r\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}\\ \sin\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}\\ \sin\theta_2\cos\theta_3\ldots\cos\theta_{n-1}\\ \vdots\\ \sin\theta_{n-1}\end{pmatrix}\\
g^{\psi_r}(\theta) &:= \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_r(\theta)^T\mathrm{d}\psi_r(\theta))}\\
&= r^{n-1}g(\theta)\\
g(\theta) &= \cos\theta_2\cos^2\theta_3\ldots\cos^{n-2}\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

Beachte: $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R}^n$, sei durch

$$\psi(r,\theta) \;:=\; \psi_r(\theta)$$

definiert. Dann gilt

$$|\det \mathrm{d}\psi(r,\theta)| \;=\; r^{n-1} g(\theta)$$

und damit

1. $f : S_r^{n-1} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{S_r^{n-1}} f \,\mathrm{d}S &= \int\limits_{U_r} f \,\mathrm{d}S \\ &= \int\limits_{\Omega} f(\psi_r(\theta)) g(\theta) r^{n-1} \,\mathrm{d}\theta \\ &= r^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} f(rx) \,\mathrm{d}S(x)\end{aligned}$$

da $M_r \setminus U_r$ eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist.

2. $I = [a,b]$, $A(I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$, $\psi : I \times \Omega \to A(I)$ sei ein C^1-diffeomorphismus und $f : A(I) \to \mathbb{R}$ sei stetig.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int\limits_{A(I)} f(x) \,\mathrm{d}x &\overset{\substack{\text{Kap15}\\ \text{Sa9}}}{=} \int\limits_{I \times \Omega} f(\psi(r,\theta)) \underbrace{|\det \mathrm{d}\psi(r,\theta)|}_{r^{n-1} g(\theta)} \,\mathrm{d}r \mathrm{d}\theta_1 ... \mathrm{d}\theta_{n-1} \\ &= \int\limits_a^b r^{n-1} \left(\int\limits_{\Omega} f(\psi_r(\theta)) g(\theta) \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \\ &= \int\limits_a^b r^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} f(rx) \,\mathrm{d}S(x) \,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{a \le \|x\| \le b\}} f(x) \,\mathrm{d}x &= \int\limits_a^b \int\limits_{S_r^{n-1}} f \,\mathrm{d}S \\ &= \int\limits_a^b r^{n-1} \int\limits_{S^{n-1}} f(rx) \,\mathrm{d}S(x) \,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Beispiel 4: $f(x) = h(\|x\|)$, $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig

$$\Rightarrow \int\limits_{\{a \le \|x\| \le b\}} h(\|x\|) \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b r^{n-1} h(r) \underbrace{\int\limits_{S^{n-1}} 1 \,\mathrm{d}S}_{\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})} \,\mathrm{d}r$$

Mit $\omega_n := \mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$ gilt

$$\int\limits_{\{a \le \|x\| \le b\}} h(\|x\|) \,\mathrm{d}x = \omega_n \int\limits_a^b r^{n-1} h(r) \,\mathrm{d}r$$

Beispiel 5: $h(r) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu_n(B^n) &= \int_{B^n} 1 \,\mathrm{d}x \\
&= \omega_n \int_0^1 r^{n-1} \,\mathrm{d}r \\
\mathrm{Vol}_n(B^n) &= \frac{\omega_n}{n}
\end{aligned}$$

Beispiel 6: $h(r) = e^{-r^2}$

1.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n &= \omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\omega_n}{2} \int_0^\infty r^{n-2} e^{-r^2} 2r \,\mathrm{d}r \\
&\overset{\substack{t=r^2 \\ \mathrm{d}t=2r\mathrm{d}r}}{=} \frac{\omega_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} ... e^{-x_n^2} \,\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \right)^n
\end{aligned}$$

3.

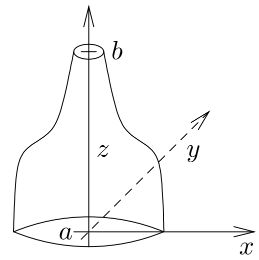
$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{\omega_2}{2} \Gamma(1) \\
&= \pi \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \,\mathrm{d}x &= \pi^{n/2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Gamma(k) &= (k-1)! \\
\omega_{2k} &= \frac{2\pi^k}{(k-1)!} \\
\omega_{2k+1} &= \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)}
\end{aligned}$$

Beispiel 7: Ein Rotationskörper



$$M := \{(x,y,z) \mid a \leq z \leq b,\, x^2+y^2 = f(z)^2\}$$

$f : [a,b] \to (0,\infty)$ sei C^1. Sei F der Flächeninhalt.

Behauptung:

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vol}_2(M) \\ &= \int_M 1 \,\mathrm{d}S \\ &\overset{!}{=} 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte $h : \{(y,z) \mid a \leq z \leq b,\, |y| \leq f(z)\} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(y,z) &= \sqrt{f(z)^2 - y^2} \\ M^+ &= \{(x,y,z) \in M \mid x \geq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \mid x = h(y,z)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F &= \int_{M^+} 1 \,\mathrm{d}S \\ &= \int_a^b \int_{-f(z)}^{f(z)} \sqrt{1 + \|\nabla h(y,z)\|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

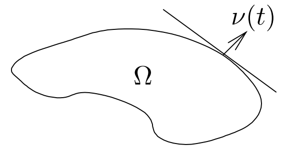
nach Beispiel 2.

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{f(z)^2-y^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{f(z)f'(z)}{\sqrt{f(z)^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \|\nabla h\| = \frac{f(z)^2(1+f'(z))^2}{\sqrt{f(z)^2-y^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} F &= \int_a^b \int_{-f(z)}^{f(z)} \frac{f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}}{\sqrt{f(z)^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2} \int_{-f(z)}^{f(z)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{f(z)^2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}y \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \arcsin(t)\Big|_{-1}^1 \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \pi \int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

16.4 Der Satz von Gauss



Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einem "glatten Rand" und $\partial\Omega$ sei eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. $T_x\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat dim $= n-1$. Definiere $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ durch

- $\nu(x) \perp T_x\partial\Omega$
- $\|\nu(x)\| = 1$
- $\nu(x)$ zeigt "nach aussen", das heisst $x + t\nu(x) \notin \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein. Zum Beispiel sei $h : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine eigentliche C^1-Funktion, $h(x_k)$ beschränkt.
  $\Rightarrow$ x_k hat eine konvergente Teilfolge. Sei $c > 0$ ein regulärer wert von h und definiere

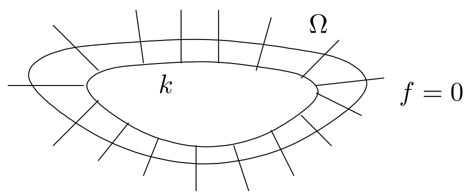
$$\begin{aligned} \Omega &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) < c\} \\ \partial\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = c\} \\ &= h^{-1}(c) \\ \nu(x) &= \frac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|} \end{aligned}$$

Satz 3 (Divergenz-Satz von Gauss): Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ wie oben, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld und $\mathrm{div} f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \int_\Omega \mathrm{div} f = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S$$

Beweis:

- Zum Aufwärmen betrachten wir den Fall $f = 0$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$. o.B.d.A. sei $K \subset \Omega$ eine Kompakte Untermenge und $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$



$\Omega \subset [-R, R]^n$

$$\int_\Omega \mathrm{div} f = \int_{[-R,R]^n} \mathrm{div} f \stackrel{!}{=} 0$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 = f_1(R, x_2, ..., x_n) - f_1(-R, x_2, ..., x_n) = 0$$

- Sei $x_0 \in \partial\Omega$.
  $\Rightarrow$ Da $\partial\Omega$ eine Untermannigfaltigkeit ist $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $\exists C^1$-Diffeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap \partial\Omega) &= \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \\ &= \{y \in \varphi(U) \mid y_n = 0\} \end{aligned}$$

- o.B.d.A.
$$\varphi(U \cap \Omega) = \{y \in \varphi(U) \mid y_n < 0\}$$
- Da $\mathrm{d}\varphi(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht entartet ist $\exists i \in \{1, ..., n\}$, so dass
$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$$
o.B.d.A. sei $i = n$ und damit
$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0) > 0$$
(Falls nötig, können wir x_i und x_n vertauschen und das Vorzeichen von φ_n anschliessend ändern)

Wir wissen $\varphi_n(x_0) = 0$ und
$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0) > 0$$

Notation:
$$\begin{aligned} x &= (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \\ x' &:= (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

$\exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < x_{0,n} < b$, so dass
$$\varphi_n(x_0', a) < 0 < \varphi_n(x_0', b)$$
$(x_0', x_n) \in U \ \forall x_n \in [a, b]$ und
$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_0', x_n) > 0$$

($\star$) Wähle $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, so dass $x_0' \in U'$, $U' \times [a, b] \subset U$ und $\forall x \in U' \times [a, b]$
$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) > 0$$
sowie $\forall x' \in U'$
$$\varphi_n(x', a) < 0 < \varphi_n(x', b)$$

Definiere $U_0 := U' \times [a, b]$.

Annahme:
$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \subset U_0$$
Nach ($\star$) gilt: $\forall x' \in U' \ \exists! x_n =: h(x') \in (a, b)$ mit $\varphi_n(x', x_n) = 0$
$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial\Omega \cap U_0 &= \{(x', h(x')),\ x' \in U'\} \\ \Omega \cap U_0 &= \{(x', x_n) \in U' \times (a, b) \mid x_n < h(x')\} \end{aligned}$$
$h : U' \to (a, b)$ ist eine C^1-Funktion nach dem Satz über implizite Funktionen.
$$\begin{aligned} \nu(x', h(x')) &= (\nu_1(x', h(x')), ..., \nu_n(x', h(x'))) \\ \nu(x', h(x')) &\perp \left(e_i, \frac{\partial h}{\partial x_i}(x')\right) \quad i = 1, ..., n-1 \end{aligned}$$
wobei e_i die kanonischen Einheitsvektoren sind
$$\begin{aligned} \nu_i(x', h(x')) &= -\frac{\partial_i h(x')}{\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}} \\ \nu_n(x', h(x')) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}S &= \int\limits_{U'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x', h(x'))\nu_i(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{U'} \left(f_n(x', h(x')) - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x') \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{!}{=} \int\limits_{\Omega} \mathrm{div} f \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Behauptung:

(1)

$$
\int\limits_{U'} \int\limits_{a}^{h(x')} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x' = -\int\limits_{U'} f_i(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x')\,\mathrm{d}x'
$$

(2)

$$
\int\limits_{U'} \int\limits_{a}^{h(x')} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x' = \int\limits_{U'} f_n(x', h(x'))\,\mathrm{d}x'
$$

Beweis von (2):

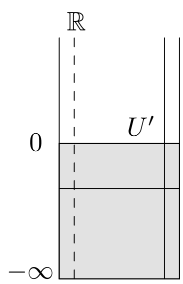
$$
\int\limits_{a}^{b} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n = f_n(x', b) - f_n(x', a)
$$

Beweis von (1): $i < n$

Definiere $\widetilde{f_i} : U' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f_i}(x', x_n) &:= f_i(x', x_n + h(x')) \\
\Rightarrow \frac{\partial \widetilde{f_i}}{\partial x_i}\,(x', x_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x', x_n + h(x')) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x', x_n + h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x')
\end{aligned} \tag{3}
$$

(gilt nach der Kettenregel)



Mit Fubini und dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{U'}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial \widetilde{f_i}}{\partial x_i}(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x' &= 0 \\
&\overset{(3)}{=} \underbrace{\int\limits_{U'}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x', x_n + h(x'))\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x'}_{\text{linke Seite von (1)}} \\
&\quad \underbrace{+ \int\limits_{U'} \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x', x_n + h(x'))\,\mathrm{d}x_n \right)}_{= f_i(x', h(x'))} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x')\,\mathrm{d}x'}_{\text{rechte Seite von (1)}}
\end{aligned}
$$

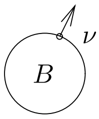
Jeder Punkt von $\overline{\Omega}$ besitzt eine Umgebung U_0, so dass Satz 3 für alle Funktionen f mit supp$f \subset U_0$ gilt. Wir können $\overline{\Omega}$ durch endlich viele solche offene Mengen $U_1, ..., U_m$ überdecken. Nach Satz 1 wähle nun eine Partition $\rho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1] \in C^\infty$, so dass $\forall x \in \overline{\Omega}$

$$
\sum_{i=1}^{m} \rho_i(x) = 1 \qquad \operatorname{supp}\rho_i \subset U_i
$$

$$
\Rightarrow \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_i f) = \int\limits_{\partial\Omega} \rho_i \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}S
$$

$\overset{\sum_{i=1}^m}{\Rightarrow}$ Satz von Gauss. (QED)

Beispiel 8: $\Omega = B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, $\partial\Omega = S^{n-1}$, $f(x) := x$ und damit



$\nu(x) = x$

div$f = n$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int\limits_{B^n} \operatorname{div} f &= n \cdot \operatorname{Vol}_n(B^n) \\
\overset{\text{Sa3}}{\Rightarrow} \int\limits_{B^n} \operatorname{div} f &= \int\limits_{\partial B} \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{S^{n-1}} 1 \\
&= \operatorname{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) \\
&= \omega_n
\end{aligned}
$$

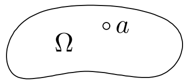
Beispiel 9: $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$

$$
\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle x - a, \nu(x) \rangle}{\|x - a\|^n}\,\mathrm{d}S(x) = \begin{cases} 0 & a \notin \overline{\Omega} \\ \omega_n & a \in \Omega \end{cases}
$$

Beweis:

$$
f(x) := \frac{x - a}{\|x - a\|^n}
$$

div$f(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$

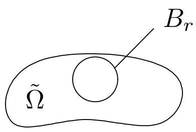


Fall 1: $a \notin \overline{\Omega}$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} \mathrm{div} f = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S$$

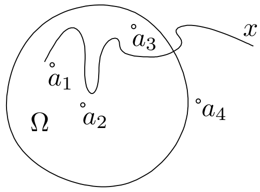
Fall 2: $\widetilde{\Omega} := \Omega \setminus \overline{B}_r(a)$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathrm{div} f = \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S + \int_{\partial B_r(a)} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S$$



$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(a)} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S &= \int_{\partial_r(a)} \left\langle \frac{x-a}{\|x-a\|^n}, \frac{a-x}{\|x-a\|} \right\rangle \mathrm{d}S \\ &= - \int_{\partial B_r(a)} \frac{\langle x-a, x-a \rangle}{\|x-a\|^{n+1}} \, \mathrm{d}S \\ &= -\frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(a)} \mathrm{d}S = -\omega_n \end{aligned}$$

Beispiel 10: $n = 3$. Elektrische Ladungen q_i an der Stelle $a_i \in \mathbb{R}^3$



$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i \, \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|^3}$$

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}S = \underbrace{4\pi}_{\omega_3} \underbrace{\sum_{a_i \in \Omega} q_i}_{\text{Gesamtladung in } \Omega}$$

"Fluss von f durch $\partial\Omega$".

Stichwortverzeichnis