Analysis II (FS 2017): DIE DETERMINANTE

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

28. Februar 2017

1 Gruppen

Definition 1.1. *Eine* **Gruppe** *ist ein Tripel* $(\mathrm{G}, \cdot, \mathbb{1})$*, bestehend aus einer Menge* G*, einer Abbildung*

$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} : (g, h) \mapsto g \cdot h$$

(der **Gruppenoperation***), und einem Element* $\mathbb{1} \in \mathrm{G}$ *(dem* **neutralen Element***), welche folgende Bedingungen erfüllen.*

(i) *Die Gruppenoperation ist assoziativ, d.h. es gilt* $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ *für alle* $g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{G}$.

(ii) *Es gilt* $\mathbb{1} \cdot g = g \cdot \mathbb{1} = g$ *für alle* $g \in \mathrm{G}$.

(iii) *Für jedes* $g \in \mathrm{G}$ *gibt es ein Element* $h \in \mathrm{G}$ *so dass* $g \cdot h = h \cdot g = \mathbb{1}$.

Das Element h *in (iii) ist eindeutig durch* g *bestimmt. Es heisst* **Inverse von** g *und wird mit* g^{-1} *bezeichnet. Eine Gruppe* $(\mathrm{G}, \cdot, \mathbb{1})$ *heisst* **kommutativ** *(oder* **abelsch***) wenn*

$$g \cdot h = h \cdot g \qquad \forall g, h \in \mathrm{G}.$$

Beispiel 1.2. Die ganzen Zahlen bilden eine Gruppe $\mathbb{Z}$ mit der Addition als Gruppenoperation und der Zahl 0 als neutralem Element. Gleiches gilt für die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen.

Beispiel 1.3. Die von Null verschiedenen rationalen Zahlen bilden eine Gruppe mit der Multiplikation als Gruppenoperation und der Zahl 1 als neutralem Element. Gleiches gilt für die reellen und die komplexen Zahlen.

Beispiel 1.4. Die zwei-elementige Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$ ist eine Gruppe mit der Gruppenoperation $0+0 := 0$, $0+1 := 1$, $1+0 := 1$ und $1+1 := 0$. Die 0 ist das neutrale Element.

Beispiel 1.5. Die zwei-elementige Menge $\{\pm 1\}$ ist eine Gruppe mit der Gruppenoperation $1 \cdot 1 := 1$, $(-1)\cdot(-1) := 1$, $1\cdot(-1) := -1$ und $(-1)\cdot 1 := -1$. Die 1 ist das neutrale Element.

Beispiel 1.6. Die Menge $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ aller komplexen Zahlen vom Betrag eins ist eine Gruppe mit der Multiplikation als Gruppenoperation und der Zahl 1 als neutralem Element.

Beispiel 1.7. Sei X eine Menge. Die bijektiven Abbildungen $f : X \to X$ bilden eine Gruppe mit der Komposition als Gruppenoperation und der Identität als neutralem Element.

Beispiel 1.8. Sei $X := \{1, \ldots, n\}$. Eine **Permutation (von X)** ist eine bijektive Abbildung $\sigma : X \to X$. Die Menge aller Permutationen von X bezeichnen wir mit S_n. Nach Beispiel 1.6 ist S_n eine Gruppe. Für $n \geq 3$ ist diese Gruppe nicht kommutativ.

Definition 1.9. *Seien* G *und* H *zwei Gruppen. (Die beiden Gruppenoperationen bezeichnen wir mit* $\cdot$ *und die beiden neutralen Elemente mit* $\mathbb{1}_{\mathrm{G}}$ *und* $\mathbb{1}_{\mathrm{H}}$*.) Eine Abbildung*

$$\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$$

heisst **Gruppenhomomorphismus** *(oder* **Homomorphismus***) wenn sie für alle* $a, b \in \mathrm{G}$ *die Gleichung*

$$\rho(a \cdot b) = \rho(a) \cdot \rho(b), \qquad \rho(\mathbb{1}_{\mathrm{G}}) = \mathbb{1}_{\mathrm{H}},$$

erfüllt. Ein **Gruppenisomorphismus** *(oder* **Isomorphismus***) ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.*

Beispiel 1.10. Die Abbildung

$$\{0,1\} \to \{\pm 1\} : a \mapsto (-1)^a$$

ist ein Isomorphismus.

Beispiel 1.11. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto \exp(\mathbf{i}t)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beispiel 1.12. Die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

ist ein Isomorphismus von der Additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen. Die Umkehrabbildung

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

ist ebenfalls ein Gruppenisomorphism.

Beispiel 1.13. Sei $(\mathrm{G}, \cdot, \mathbb{1})$ eine Gruppe, X eine Menge, und $\mathcal{G}(X)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen $f : X \to X$. Eine **Gruppenaktion von** G **auf** X ist eine Abbildung

$$\varphi : \mathrm{G} \times X \to X$$

so dass für alle $x \in X$ und alle $a, b \in \mathrm{G}$ die Gleichungen

$$\varphi(a \cdot b, x) = \varphi(a, \varphi(b, x)), \qquad \varphi(\mathbb{1}, x) = x$$

gelten. Ist φ eine solche Gruppenaktion und definieren wir die Abbildungen $\varphi_a : X \to X$ für $a \in \mathrm{G}$ durch

$$\varphi_a(x) := \varphi(a, x) \qquad \text{für } x \in X,$$

so ist φ_a für jedes $a \in \mathrm{G}$ bijektiv (mit Umkehrabbildung $\varphi_{a^{-1}}$) und die Abbildung

$$\mathrm{G} \to \mathcal{G}(X) : a \mapsto \varphi_a$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt

$$\varphi_{a \cdot b} = \varphi_a \circ \varphi_b, \qquad \varphi_{\mathbb{1}} = \mathrm{id},$$

für alle $a, b \in \mathrm{G}$. Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathcal{G}(X)$ eine Gruppenaktion von G auf X.

Beispiel 1.14. Wir ordnen einer Permutation $\sigma \in S_n$ die natürliche Zahl

$$N(\sigma) := \#\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\} \tag{1}$$

zu. Die **Parität** von σ ist definiert durch

$$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{N(\sigma)}. \tag{2}$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Abbildung $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 1.15. *Es gilt* $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$ *und, für alle* $\sigma, \tau \in S_n$*,*

$$\varepsilon(\tau \circ \sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma).$$

Beweis. Wir definieren

$$N(\sigma, \tau) := \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) < \tau(\sigma(j))\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
N(\tau \circ \sigma) &= \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\
&= \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\
&\quad + \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \sigma(i) < \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\
&= \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\} \\
&\quad - \#\{(i,j) \,|\, i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) < \tau(\sigma(j))\} \\
&\quad + \#\{(i,j) \,|\, \sigma(i) < \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\
&\quad - \#\{(i,j) \,|\, i > j,\ \sigma(i) < \sigma(j),\ \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\
&= N(\sigma) + N(\tau) - 2N(\sigma, \tau).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Übung 1.16. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ definieren wir die Permutation $\sigma_{ij} \in S_n$ als die Bijektion welche i und j vertauscht:

$$\sigma_{ij}(\nu) := \begin{cases} \nu, & \text{wenn } \nu \neq i \text{ und } \nu \neq j, \\ i, & \text{wenn } \nu = j, \\ j, & \text{wenn } \nu = i. \end{cases}$$

Eine solche Permutation nennt man **Transposition**. Beweisen Sie, dass jede Transposition Parität -1 hat und dass sich jede Permutation als Komposition von Transpositionen schreiben lässt.

2 Vektorräume

Definition 2.1. *Ein* **reller Vektorraum** *besteht aus einer abelschen Gruppe* $(V, +, 0)$ *und einer Abbildung*

$$\mathbb{R} \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

(der **skalaren Multiplikation***) mit folgenden Eigenschaften.*

(i) *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und* $v \in V$ *gilt*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v, \qquad 1 \cdot v = v.$$

(ii) *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und* $v, w \in V$ *gilt*

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \qquad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$$

Die Elemente von V *nennen wir* **Vektoren***.*

Bemerkung 2.2. Um Verwirrungen zu vermeiden kann es manchmal nützlich sein, für den Nullvektor in V ein anderes Symbol zu verwenden, zum Beispiel 0_V. Mit dieser Bezeichnungsweise gelten die Regeln

$$\lambda \cdot 0_V = 0_V, \qquad 0 \cdot v = 0_V$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$. (Beweisen Sie diese Gleichungen!) Im allgemeinen bezeichnen wir den Nullvektor in V jedoch mit dem gleichen Symbol 0 wie die reelle Zahl Null. Wir werden im folgenden auch oft den Punkt "$\cdot$" weglassen und λv statt $\lambda \cdot v$ schreiben.

Definition 2.3. *Seien* V *und* W *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $T : V \to W$ *heisst* **linear** *wenn sie die Gleichungen*

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2, \qquad T(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot Tv$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $v, v_1, v_2 \in V$ *erfüllt. Eine lineare Abbildung wird auch* **Vektorraumhomomorphismus** *genannt. Ein* **Vektorraumisomorphismus** *(oder einfach* **Isomorphismus***) ist ein bijektiver Vektorraumhomomorphismus.*

Übung 2.4. Ist $T : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung so ist die Umkehrabbildung $T^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear.

Definition 2.5. *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine endliche Folge $v_1, \dots, v_n$ von Vektoren in V heisst* **linear unabhängig** *wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Den Ausdruck $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ nennen wir eine **Linearkombination** *der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Wir nennen die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ein* **(endliches) Erzeugendensystem** *von V wenn sich jeder Vektor in V als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt, das heisst*

$$\forall v \in V \exists \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Eine **endliche Basis** *von V ist ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n$. Ein reeller Vektorraum V heisst* **endlichdimensional** *wenn er eine endliche Basis besitzt und* **unendlichdimensional** *wenn er keine endliche Basis besitzt.*

Bemerkung 2.6. Man kann den Begriff einer Basis auch auf unendliche Systeme $\{v_i\}_{i \in I}$ von Vektoren in V erweitern. Hier ist I eine (möglicherweise unendliche) Menge und $I \to V : i \mapsto v_i$ eine Abbildung. Ein solches System heisst **linear unabhängig** wenn je endlich viele Vektoren $v_{i_1}, \dots, v_{i_N}$ (mit $i_1, \dots, i_N \in I$ paarweise verschieden) linear unabhängig sind. Es heisst **Erzeugendensystem** wenn sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination endlich vieler v_i darstellen lässt. Eine **Basis** ist nun ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Mit diesem verallgemeinerten Begriff lässt sich zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. (Der Beweis beruht auf dem sogenannten *Zorn'schen Lemma* welches sich wiederum aus dem *Auswahlaxiom* herleiten lässt.) Wir werden uns hier jedoch nur für endliche Basen interessieren. (Unendlichdimensionale Vektorräume spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, nicht aber ihre Basen.)

Beispiel 2.7. Der Raum $\mathbb{R}^n$ aller n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ reeller Zahlen ist ein Vektorraum. Die Vektoren $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (mit 1 an der $i$ten Stelle) bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$, welche die **Standardbasis** genannt wird. Ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ hat die Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Bemerkung 2.8. Sei V ein reller Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist die durch

$$Tx := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definierte Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to V$ linear. Die Abbildung T ist genau dann injektiv wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind; sie ist genau dann surjektiv wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V bilden. Also ist T genau dann ein Vektorraum-Isomorphismus wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V bilden. Jeder Vektorraum-Isomorphismus $T : \mathbb{R}^n \to V$ hat diese Form mit $v_i := Te_i$.

Satz 2.9. *Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis $e_1, \dots, e_n$. Seien $v_1, \dots, v_m$ Vektoren in V. Dann gilt folgendes.*

(i) *Ist $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von V so gilt $m = n$.*

(ii) *Bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ ein Erzeugendensystem so gilt $m \geq n$.*

(iii) *Sind die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig so gilt $m \leq n$.*

Die Zahl n heisst **Dimension** *von V und wird mit* $\dim V$ *bezeichnet.*

Beweis. Nach der vorherigen Bemerkung bestimmt die Basis $e_1, \dots, e_n$ von V einen Isomorphismus $T : \mathbb{R}^n \to V$. Daher genügt es, die Behauptungen für den Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ zu beweisen. Seien also $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$.

Schritt 1. *Bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ so ist $m = n$.*

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus den folgenden elementaren Fakten.

(a) Jede von Null verschiedene reelle Zahl bildet eine Basis von $\mathbb{R}$.

(b) Jedes System von mehr als einem Element von $\mathbb{R}$ ist linear abhängig.

Sei nun $n \geq 2$. Wir nehmen and, dass das Resultat für den $\mathbb{R}^{n-1}$ gilt und dass die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Wir schreiben $v_\nu =: (v_{\nu 1}, \dots, v_{\nu n})$ für $\nu = 1, \dots, m$. Da der Vektor e_n sich als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ schreiben lässt, gibt es mindestens ein $\nu \in \{1, \dots, m\}$ so dass $v_{\nu n} \neq 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen dass dies $\nu = m$ ist. Sei

$$w_\nu := v_\nu - \frac{v_{\nu n}}{v_{mn}} v_m, \qquad \nu = 1, \dots, m-1.$$

Dann bilden die Vektoren $w_1, \dots, w_{m-1}, v_m$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und es gilt $w_{\nu n} = 0$ ist für $\nu = 1, \dots, m-1$. Es folgt dass die Vektoren $w_1, \dots, w_{m-1}$

(nach Fortlassen der letzten Koordinate) eine Basis des $\mathbb{R}^{n-1}$ bilden. Nach Induktionsannahme gilt also $m-1=n-1$ und daher $m=n$.

Schritt 2. *Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig so gilt $m \leq n$.*

Wir können aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ durch hinzufügen von höchstens n weiteren Vektoren $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ (die wir aus den Elementen der Standardbasis auswählen) eine Basis $v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ bilden. (Dies folgt durch Induktion: Wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ keine Basis bilden, so gibt es einen Index $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$, so dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}$ linear unabhängig sind. Wenn diese Vektoren immer noch keine Basis bilden, können wir weitere Elemente der Standardbasis hinzufügen ohne die lineare Unabhängigkeit zu verletzen.) Die neue Basis besteht aus $m+k$ Elementen mit $k \geq 0$. Es gilt daher $m+k=n$, nach Schritt 1, und deshalb $m \leq n$.

Schritt 3. *Bilden die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ ein Erzeugendensystem so gilt $m \geq n$.*

Wir erhalten eine Basis des $\mathbb{R}^n$ durch fortlassen von geeigneten Vektoren. Die resultierende Basis hat dann höchstens m Elemente. Also folgt die Behauptung aus Schritt 1. □

3 Die Determinante

Sei V ein reller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\varphi : V^n = V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

heisst **multilinear** wenn φ in jeder Variablen linear ist, das heisst es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}&\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)\\ &= \varphi(v_1, \ldots, v_n) + \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)\end{aligned}$$

und

$$\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \lambda\varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $w_i \in V$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall $n=2$ nennen wir eine solche Abbildung **bilinear**. Im Allgemeinen nennen wir eine multilineare Abbildung $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ auch **n-linear**.

Bemerkung 3.1. Der Raum V^n ist selbst ein Vektorraum. Es macht also auch Sinn, von linearen Abbildungen $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ zu sprechen. Dies ist aber etwas völlig anderes als eine multilineare Abbildung. Betrachten wir zum Beispiel den Fall $V = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$

bilinear, aber nicht linear. Hingegen ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

linear, aber nicht bilinear. (Ist $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ eine multilineare Abbildung so gilt $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ sobald einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gleich Null ist.)

Übung 3.2. Sei V ein reller Vektorraum und sei $\varphi : V^n \to \mathbb{R}$ sowohl linear als auch multilinear. Ist $n \geq 2$, so ist $\varphi \equiv 0$.

Satz 3.3. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine n-lineare Abbildung*

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

genannt **Determinante***, mit folgenden Eigenschaften.*
(i) *Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ und je n Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(a_1, \ldots, a_n).$$

(i) *Ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ so gilt*

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Schreiben wir

$$a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, so ist die Determinante der Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ drch die Formel

$$\det(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \qquad (3)$$

gegeben. Hier bezeichnet $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ die durch (1) *und* (2) *definierte Parität der Permutation $\sigma \in S_n$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass die Abbildung det : $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ durch (3) definiert ist und zeigen, dass sie die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Ist $a_i = e_i$ so gilt

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und damit ist der einzige von Null verschiedene Summand auf der rechten Seite von (3) der zur Permutation $\sigma = \mathrm{id}$ gehörige und damit gilt (ii). Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} \det(a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\tau(i)\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(\tau^{-1}(j))} \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma\circ\tau^{-1}(j)} \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} \\ &= \varepsilon(\tau) \det(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

für $\tau \in S_n$ und $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$. Also erfüllt det auch Bedingung (i).

Wir beweisen die Eindeutigkeit. Sei also det : $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ durch (3) gegeben und sei $\varphi : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige n-lineare Abbildung, welche die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Dann ist die Differenz

$$\psi := \varphi - \det : (R^n)^n \to \mathbb{R}$$

eine n-lineare Abbildung, welche die Bedingungen (i) und $\psi(e_1, \ldots, e_n) = 0$ erfüllt. Seien $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_j \in \mathbb{R}^n$ gegeben für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(a_1, \ldots, a_n) &= \psi\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \psi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Gleichung. $\psi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_n$. Also ist $\psi \equiv 0$ und damit $\varphi \equiv \det$. Damit ist Satz 3.3 bewiesen. □

Eine n-lineare Abbildung $\varphi : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, heisst **alternierende n-Form** (auf V) wenn sie der Bedingung (i) in Satz 3.3 genügt. Es gibt also auf dem $\mathbb{R}^n$ genau eine alternierende n-Form

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

die die Bedingung $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$ erfüllt, und diese heisst **Determinante**. Betrachten wir die n Vektoren $a_i =: (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, n$ als Zeilen einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so können wir die Determinante auch als Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

auf dem Raum der quadratischen Matrizen auffassen.

Beispiel 3.4. Ist $n = 1$ so ist $\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$ und $\det : \mathbb{R}^{1\times 1} \to \mathbb{R}$ is die Identität. Für $n = 2$ haben wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Für $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften der Determinante zusammen.

Satz 3.5. (i) *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt*

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{4}$$

(ii) *Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(\mathbb{1}) = 1. \tag{5}$$

(ii) *Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C). \tag{6}$$

Beweis. Wir beweisen (i). Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^n$ die transponierte Matrix. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det(A).
\end{aligned}$$

Hier folgt die vorletzte Gleichung aus der Umbenennung $\tau := \sigma^{-1}$ und der Tatsache dass $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ ist. Damit haben wir (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Seien $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$ zwei Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Den durch die Einträge der $j$te Zeile der Matrix B definierten Vektor bezeichnen wir mit $b_j := (b_{j1}, \dots, b_{jn}) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt nach (3)

$$\det(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) b_{j_1\tau(1)} \cdots b_{j_n\tau(n)}$$

für $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}$. Nach Definition der Determinante verschwindet dieser Ausdruck sobald zwei der Indizes j_i übereinstimmen. (Siehe Bedingung (i) in Satz 3.3.) Damit erfüllen A und B die Gleichung

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1\tau(1)} \right) \cdots \left(\sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} b_{j_n\tau(n)} \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1j_1} b_{j_1\tau(1)} \cdots a_{nj_n} b_{j_n\tau(n)} \\
&= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) b_{j_1\tau(1)} \cdots b_{j_n\tau(n)} \\
&= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \det(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \det(b_1, \dots, b_n) \\
&= \det(A) \det(B).
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Tatsache, dass in der vierten Zeile nur diejenigen Summanden von Null verschieden sein können für die die Indizes $j_1, \ldots, j_n$ paarweise verschieden sind. In diesem Fall definieren die Indizes eine Permutation $\sigma \in S_n$ durch die Formel $\sigma(i) := j_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit haben wir (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Jeder Summand in der Formel (3) für $\det(A)$ enthält genau einen Faktor aus jeder Zeile und aus jeder Spalte von A. Im Fall der Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

heisst dies dass jeder Summand, der einen Faktor aus dem oberen rechten Block B enthält auch einen Faktor aus dem unteren linken Block enthalten muss und damit verschwindet. Ander gesagt: jede Permutation $\rho \in S_{n+m}$ die ein Element $i \in \{1, \ldots, n\}$ in ein Element $\rho(i) \in \{n+1, \ldots, n+m\}$ abbildet muss auch ein Element $j \in \{n+1, \ldots, n+m\}$ in ein Element $\rho(j) \in \{1, \ldots, n\}$ abbilden. Damit brauchen wir nur Permutationen $\rho \in S_{n+m}$ zu betrachten die die beiden Teilmengen $\{1, \ldots, n\}$ und $\{n+1, \ldots, n+m\}$ auf sich selbst abbilden. Jede solche Permutation hat die Form $\rho = \sigma\#\tau$ für $\sigma \in S_n$ und $\tau \in S_m$, wobei

$$\sigma\#\tau(i) := \sigma(i), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

und

$$\sigma\#\tau(n+j) = n + \tau(j), \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Diese Permutation hat die Parität

$$\varepsilon(\sigma\#\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

Hieraus folgt sofort die dritte Aussage des Satzes, der damit bewiesen ist. □

Übung 3.6. Die Determinante ist durch die Eigenschaften (ii) und (iii) von Satz 3.5 eindeutig bestimmt.

Satz 3.7. *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\det(A) \neq 0$.

(ii) *Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $Ax = 0 \implies x = 0$.*

(iii) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ so dass $Ax = y$.*

Beweis. Nach Satz 2.9 ist ein System von n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ genau dann linear unabhängig wenn es ein Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^n$ ist. Angewandt auf die n Spalten der Matrix A heisst dies, dass (ii) äquivalent zu (iii) ist. Es bleibt also zu zeigen, dass (i) äquivalent zu (ii) ist.

Wir zeigen, dass (ii) aus (i) folgt. Wir argumentieren indirekt und nehmen an dass es einen von Null verschiedenen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt so dass $Ax = 0$ ist. Bezeichnen wir die Spalten der Matrix A mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, so heisst dies

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

Da x ungleich Null ist, gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ so dass $x_i \neq 0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x_1 \neq 0$ ist. Nach Satz 3.5 (i) gilt dann

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(a_1, \dots, a_n) \\
&= \frac{1}{x_1} \det(x_1 a_1, a_2, \dots, a_n) \\
&= \frac{1}{x_1} \det\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, a_2, \dots, a_n \right) \\
&= \frac{1}{x_1} \det(0, a_2, \dots, a_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass (i) aus (ii) folgt. Wenn die Matrix A Bedingung (ii) erfüllt so sind die Spalten $a_1, \dots, a_n$ von A linear unabhängig und bilden damit, nach Satz 2.9, eine Basis. Hieraus folgt, dass die Abbildung $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$T_A(x) := Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, eine bijektive lineare Abbildung ist. Sei $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Umkehrabbildung, das heisst

$$T_A \circ S = S \circ T_A = \mathrm{id}.$$

Dann ist S wiederum eine lineare Abbildung. Also gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass $S = T_B$ ist. Hieraus folgt

$$AB = BA = \mathbb{1} \tag{7}$$

und daher, nach Satz 3.5 (ii), $\det(A)\det(B) = 1$. Also ist $\det(A) \neq 0$. $\square$

Definition 3.8. *Der Beweis von Satz 3.7 zeigt dass es zu jeder* $(n \times n)$*-Matrix* A *mit* $\det(A) \neq 0$ *eine* $(n\times n)$*-Matrix* B *gibt, welche die Gleichung* (7) *erfüllt. Diese Matrix ist durch* A *eindeutig bestimmt; sie heisst* **Inverse von** A*, beziehungsweise* **inverse Matrix von** A*, und wird mit* A^{-1} *bezeichnet. Es gilt*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Bemerkung 3.9. Alle Definitionen und Resultate dieses Kapitels gelten unverändert und mit denselben Beweisen für komplexe Matrizen. Es genügt, überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ zu ersetzen.

Definition 3.10. *Eine komplexe Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *heisst* **Eigenwert** *einer reellen Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, wenn es einen komplexen Vektor* $x \in \mathbb{C}^n$ *gibt so dass*

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0.$$

Nach Satz 3.7 ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ *genau dann ein Eigenwert von* A *wenn gilt*

$$p_A(\lambda) = 0, \qquad p_A(\lambda) := \det(\lambda\mathbb{1} - A).$$

Das Polynom p_A *heisst* **charakteristisches Polynom** *der Matrix* A.

Übung 3.11. Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat den Grad n. **Hinweis:** Gleichung (3) für die Determinante.

Übung 3.12. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

Korollar 3.13. *Die Determinante einer Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist das Produkt ihrer Eigenwerte mit Multiplizität, das heisst, wenn das charakteristische Polynom in der Form*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *geschrieben wird, so gilt*

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Gleichung $\det(A) = (-1)^n p_A(0)$. □

4 Die lineare Gruppe

Die Gruppe der invertierbaren rellen $(n\times n)$-Matrizen heisst **lineare Gruppe** und wird mit

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) := \big\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, \det(A) \neq 0\big\}$$

bezeichnet. Dass dies eine Gruppe ist folgt aus Satz 3.5 und Satz 3.7. Die Gruppenoperation ist Matrix-Multiplikation und das neutrale Element ist die Einheits-Matrix $\mathbb{1}$. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ kann mit der Gruppe der bijektiven linearen Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identifiziert werden; solche Abbildungen werden auch **Automorphismen** des $\mathbb{R}^n$ genannt. Die Korrespondenz ordnet jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ den durch $T_A(x) := Ax$ definierten Automorphismus des $\mathbb{R}^n$ zu. Satz 3.7 zeigt, dass die lineare Abbildung $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genau dann bijektiv ist wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Nach Satz 3.5, ist die Teilmenge

$$\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, \det(A) > 0\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Daher sind $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n\times n}$ (dies sind die Urbilder der offenen Mengen $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $(0,\infty)$ unter der stetigen Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$). Die Restriktion von det auf $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ definiert einen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ auf die von Null verschiedenen reellen Zahlen (siehe Beispiel 2 in Kapitel 1).

Satz 4.1. *Die Gruppe* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ *ist weg-zusammenhängend.*

Beweis. Siehe Seite 19 (auch für die Definition eines weg-zusammenhängenden metrischen Raumes). □

Der hier erbrachte Beweis beruht auf den folgenden drei Lemmata. Er geht auf Thomas Honold zurück und ist direkt aus [1, Seite 36] übernommen.

Lemma 4.2. *Für jede Matrix* $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *existiert ein* $\ell \in \{0,1,\dots,n\}$, *eine Matrix* $U \in \mathrm{GL}^+(n-\ell,\mathbb{R})$ *ohne negative Eigenwerte, eine Matrix*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{R}), \qquad \lambda_i < 0,$$

und eine Matrix $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *so dass* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix}$.

Beweis. Wir beweisen dieses Lemma durch vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr mit $P = 1$ und entweder $\ell = 0$, $U = A$ (im Falle $A > 0$) oder $\ell = 1$, $\Lambda = A$ (im Falle $A < 0$).

Sei nun $n > 1$ und nehmen wir an, die Behauptung sei für alle Matrizen in $\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ bewiesen. Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gegeben. Hat A keine negativen Eigenwerte, so gilt die Behauptung mit $P := \mathbb{1}$, $\ell := 0$, und $U := A$. Hat A einen negativen Eigenwert $\lambda < 0$ so gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0.$$

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irgendeine invertierbare Matrix deren erste Spalte gleich v ist. Dann gibt es eine Matrix $A_0 \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ so dass

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Nach Induktionsannahme gibt es Matrizen $P_0 \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ und Λ_0, U_0 wie in der Behauptung so dass

$$P_0^{-1}A_0P_0 = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & * \\ 0 & U_0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt die Behauptung für A mit

$$P := Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}, \qquad U := U_0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Lemma 4.3. *Für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ gibt es zwei Matrizen $B, C \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ welche keine negativen Eigenwerte haben so dass $A = B^2C$ ist.*

Beweis. Seien $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Lambda \in \mathrm{GL}(\ell, \mathbb{R})$, und $U \in \mathrm{GL}(n-\ell, \mathbb{R})$ wie in Lemma 4.2. Nach Satz 3.5 gilt

$$\det(A) = \det(\Lambda)\det(U) = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell \det(U).$$

Da U keine negativen Eigenwerte hat ist $\det(U) > 0$. Da $\det(A) > 0$ ist, ist also $\ell = 2k$ eine gerade Zahl. Wir definieren

$$S := \begin{pmatrix} H & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix}, \qquad H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat keine negativen Eigenwerte (die Eigenwerte sind $\pm i$ und 1). Ausserdem gilt

$$S^{-2} = S^2 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2k} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix}$$

und damit

$$T := S^{-2}P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2k} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda & * \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat ebenfalls keine negativen Eigenwerte. Also gilt

$$A = P(S^2T)P^{-1} = B^2C,$$

wobei die Matrizen

$$B := PSP^{-1}, \qquad C := PTP^{-1}$$

keine negativen Eigenwerte haben. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 4.4. *Ist* $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ *eine Matrix ohne negative Eigenwerte, so gilt*

$$\det((1-t)\mathbb{1} + tA) > 0$$

für alle $t \in [0,1]$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := \det((1-t)\mathbb{1} + tA).$$

Diese Funktion ist stetig und es gilt $f(0) > 0$ und $f(1) > 0$. Die Behauptung des Lemmas sagt dass $f(t) > 0$ ist für alle $t \in [0,1]$. Wenn dies nicht gilt, gibt es eine Zahl $t \in [0,1]$ mit $f(t) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz, gibt es dann auch eine Zahl $t_0 \in [0,1]$ mit $f(t_0) = 0$. Diese Zahl kann nicht 0 oder 1 sein. Dann ist aber die Zahl

$$\lambda := -\frac{1-t_0}{t_0}$$

ein negativer Eigenwert von A, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Dieser Widerspruch beweist das Lemma. □

Definition 4.5. *Ein Metrischer Raum* (X,d) *heisst* **weg-zusammenhängend**, *wenn für alle* $x_0, x_1 \in X$ *eine stetige Abbildung* $\gamma : [0,1] \to X$ *existiert, welche die Punkte* $\gamma(0) = x_0$ *und* $\gamma(1) = x_1$ *verbindet.*

Beweis von Satz 4.1. Sei $A \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ und wähle $B, C \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ wie in Lemma 4.3. Für $t \in [0, 1]$ definiere

$$A_t := ((1-t)\mathbb{1} + tB)^2((1-t)\mathbb{1} + tC).$$

Dann gilt $A_0 = \mathbb{1}$ und $A_1 = A$. Da die Matrizen B und C keine negativen Eigenwerte haben, folgt aus Lemma 4.4 dass

$$\det(A_t) = \det((1-t)\mathbb{1} + tB)^2 \det((1-t)\mathbb{1} + tC) > 0$$

für alle $t \in [0, 1]$. Also ist die Abbildung $[0, 1] \to \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) : t \mapsto A_t$ ein stetiger Weg der die Matrizen $\mathbb{1}$ und A miteinander verbindet. Damit ist $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ weg-zusammenhängend. □

Übung 4.6. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist die disjunkte Vereinigung der weg-zusammenhängenden Teilmengen $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ und

$$\mathrm{GL}^-(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist selbst nicht weg-zusammenhängend.

Übung 4.7. Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt die Gleichung

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{trace}(A)}, \tag{8}$$

wobei $\mathrm{trace}(A)$ die **Spur** der Matrix A, das heisst de Summe der Diagonaleinträge, ist.

Literatur

[1] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.