Analysis II (FS 2015): MEHRFACHE INTEGRALE

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

27. April 2015

Zusammenfassung

Das Ziel dieses Manuskriptes ist es, das Riemannsche Integral einer Funktion von mehreren Variablen über einer kompakten Jordanmessbaren Menge zu definieren, sowie die grundlegenden Eigenschaften des Riemannschen Integrals herzuleiten, wie die Linearitaet, den Satz von Fubini, und die Transformationsformel.

Inhaltsverzeichnis

1 Das Riemannsche Integral

Zur Definition des Riemannschen Integrals bedarf es der Einführung einiger Grundbegriffe, wie des Begriffes einer Partition in höheren Dimensionen. Diese erfordert zunächst die Definition des *Abschlusses* und des *Inneren* einer Teilmenge eines metrischen Raumes, die bislang in dieser Vorlesung noch nicht behandelt wurden.

1.1 Abschluss und Inneres

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Das Standardbeispiel ist ein reeller normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ mit der durch

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

für $x, y \in X$ definierten Abstandsfunktion. Jedoch darf (X, d) in diesem Abschnitt ein beliebiger metrischer Raum sein. Für $x \in X$ und $r > 0$ Bezeichnen wir, wie üblich, den Ball vom Radius r mit Mittelpunkt x mit

$$B_r(x) := \{y \in X \,|\, d(x, y) < r\}\,.$$

Gegeben sei eine Teilmenge $A \subset X$. Der **Abschluss von** A ist die Menge

$$\mathrm{cl}(A) := \overline{A} := \{x \in X \,|\, \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

Das **Innere von** A ist die Menge

$$\mathrm{int}(A) := \mathring{A} := \{x \in X \,|\, \exists \varepsilon > 0 \text{ so dass } B_\varepsilon(x) \subset A\}\,.$$

(Die Abkürzungen cl und int stehen für die englischen Begriffe *closure* und *interior*.) Der **Rand von** A ist die Menge

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \\ \text{und } B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

Beispiel 1.1. Sei $X = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen mit der üblichen Abstandsfunktion $d(x, y) = |x - y|$. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und A das halboffene Intervall

$$A := [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}\,.$$

Dann sind der Abschluss, das Innere, und der Rand von A durch $\overline{A} = [a, b]$, $\mathring{A} = (a, b)$, und $\partial A = \{a, b\}$ gegeben.

In jedem metrischen Raum (X, d) ist der Abschluss einer Teilmenge A stets eine abgeschlossene Mange, und das Innere von A ist stets eine offene Menge. Damit ist auch der Rand von A eine abgeschlossene Menge. Die folgende Proposition fasst die wichtigsten Eigenschaften des Abschlusses und des Inneren zusammen.

Proposition 1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.*

(i) *$x \in \overline{A}$ genau dann wenn es eine Folge $x_n \in A$ gibt, die gegen x konvergiert.*

(ii) *$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$, und $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

(iii) *$\overline{A} = A \cup \partial A$ und $\mathring{A} = A \setminus \partial A$.*

(iv) *$\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält.*

(v) *$\mathring{A}$ ist die grösste offene Teilmenge von X, die in A enhalten ist.*

(vi) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\overline{A} = A$ (bzw. $\partial A \subset A$) ist.*

(vii) *A ist offen genau dann, wenn $\mathring{A} = A$ (bzw. $\partial A \cap A = \emptyset$) ist.*

Beweis. Wir beweisen (i). Sei $x_n \in A$ eine Folge die gegen ein Element $x \in X$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Noch Definition der Konvergenz existert eine natüerlichs Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_, x_n) < \varepsilon.$$

Damit gilt $x_n \in B_\varepsilon(x)$ fúr jedes $n \geq n_0$ und daher ist $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt daraus $x \in \overline{A}$. Umgekehrt sei $x \in A$ gegeben. Dann ist $B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Nach dem abzählbaren Auswahlaxiom existiert also eine Folge $x_n \in A$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $d(x, x_n) < 1/n$ ist. Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ und daher $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist. Damit ist (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Nach Definition von Abschluss und Innerem gilt

$$\begin{aligned}
\overline{X \setminus A} &= \{x \in X \,|\, \forall x \in X \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X \,|\, \forall x \in X \text{ gilt } B_\varepsilon(x) \not\subset A\} \\
&= X \setminus \mathring{A}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Damit ist (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Nach Definition von Abschluss und Innerem gilt

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Nach Definition des Randes folgt daraus

$$A \cup \partial A = A \cup (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = A \cup \overline{A} = \overline{A}$$

und

$$A \setminus \partial A = A \setminus (\overline{A} \setminus \mathring{A}) = A \setminus (A \setminus \mathring{A}) = \mathring{A}.$$

Damit ist (iii) bewiesen.

Wir beweisen (iv). Zunächst zeigen wir, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist. Sei also $x_n \in \overline{A}$ eine Folge die gegen ein Element $x \in X$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Definition der Konvergenz existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ ist. Da $x_n \in \overline{A}$ ist, gilt $B_{\varepsilon/2}(x_n) \cap A \neq \emptyset$. Wähle ein Element $a \in B_{\varepsilon/2}(x_n) \cap A$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daraus folgt $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt daraus $x \in \overline{A}$. Damit haben wir gezeigt dass $\overline{A}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist. Sei nun $B \subset X$ eine beliebige abgeschlossene Menge die A enthält. Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{A} \subset B$ ist. Sei also $x \in \overline{A}$. Dann gibt es nach (i) eine Folge $x_n \in A$, die gegen x konvergiert. Also ist x_n eine Folge in B und, da B abgeschlossen ist, folgt daraus, dass ihr Grenzwert x ebenfalls ein Element von B ist. Damit ist (iv) bewiesen.

Die Aussage (v) folgt aus (ii) und (iv). Die Aussage (vi) folgt unmittelbar aus (iii) und (iv). Die Aussage (vii) folgt unmittelbar aus (iii) und (v). Damit ist Proposition 1.2 bewiesen. $\square$

Übung 1.3. In einem metrischen Raum (X, d) bezeichnen wir oft den abgeschlossenen Ball mit Mittelpunkt $x \in X$ und Radius $r > 0$ mit

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Diese Menge ist stets abgeschlossen. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum mit der durch $d(x, y) := \|x - y\|$ definierten Abstandsfunktion, zeigen Sie, dass $\overline{B}_r(x)$ der Abschluss von $B_r(x)$ ist. Finden Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d), eines Punktes $x \in X$, und einer Zahl $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(x)$ nicht der Abschluss von $B_r(x)$ ist, das heisst $\overline{B_r(x)} \subsetneq \overline{B}_r(x)$.

1.2 Das Riemannsche Integral

Partitionen

Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ so dass

$$a_i < b_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Die Menge

$$\begin{aligned} Q &:= Q(a, b) \\ &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \\ &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \end{aligned} \tag{1}$$

heisst **(achsenparalleler) offener Quader**. Die Zahl

$$\mathrm{Vol}_n(Q) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{2}$$

heisst **Volumen von** Q. Es ist hervorzuheben, dass das Volumen damit bislang **nur** für achsenparallele offene Quader definiert ist. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ durch (1) definiert, so ist der Abschluss von Q (bezüglich der Euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$) die Menge

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \\ &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \end{aligned} \tag{3}$$

(Übung: beweisen Sie diese Formel.) Jede solche Menge heisst **(achsenparalleler) abgeschlossener Quader**. Es ist oft nützlich, das **Volumen von** $\overline{Q}$ ebenfalls durch die rechte Seite der Gleichung (2) zu definieren. Allgemeiner, definieren wir

$$\mathrm{Vol}_n(B) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad \text{für} \quad Q \subset B \subset \overline{Q}.$$

Definition 1.4. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Eine* **Partition von** *B ist eine endliche Menge $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ von offenen achsenparallelen Quadern so dass*

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i, \qquad P_i \cap P_j = \emptyset \quad \textit{für} \quad i \neq j.$$

Die Menge der Partionen von B wird mit $\mathscr{P}(B)$ bezeichnet.

Im Fall $n = 1$ kann eine Partition eines kompakten Intervalls $B = [a, b]$ durch eine endliche Folge $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$ repräsentiert werden mit $P_i = (t_{i-1}, t_i)$ (siehe [2]). Ein Beispiel einer Partition im Fall $n = 2$ ist in Abbildung 1 dargestellt. Es ist zu beachten, dass nicht jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine Partition besitzt. Wenn $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Partition besitzt so ist B notwendigerweise kompakt und nichtleer, und auch für nichtleere kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist die Existenz einer Partition eine *seltene* Eigenschaft.

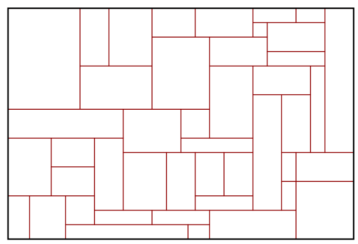

Abbildung 1: Eine Partition eines Rechtecks

Übung 1.5. Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ besitzt keine Partition. Ein abgeschlossenes Dreieck im $\mathbb{R}^2$ besitzt keine Partition.

Lemma 1.6. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ und $Q = \{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$ zwei Partitionen von B. Dann ist auch die Menge*

$$P \wedge Q := \{P_i \cap Q_j \,|\, i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, \ell,\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\} \tag{4}$$

eine Partition von B. Die Menge $\{P_i \cap Q_j \,|\, i = 1, \ldots, k,\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\}$ ist für jedes j eine Partition von $\overline{Q}_j$, und $\{P_i \cap Q_j \,|\, j = 1, \ldots, \ell,\ P_i \cap Q_j \neq \emptyset\}$ ist für jedes i eine Partition von $\overline{P}_i$.

Beweis. Zunächst folgt aus den Definitionen, dass die Menge $P_i \cap Q_j$, wenn sie nichtleer ist, ein offener achsenparalleler Quader ist. Zweitens beweisen wir folgendes.

Behauptung: *Für jedes $x \in \overline{P}_i$ existiert ein j so dass $x \in \overline{P_i \cap Q_j}$.*

Nach Voraussetzung existiert eine Folge $x_\nu \in P_i$, die gegen x konvergiert. Da $P_i \subset B$ ist, gilt $x_\nu \in \overline{Q}_1 \cup \cdots \cup \overline{Q}_\ell$ für alle ν. Es gibt also (mindestens) ein $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ so dass $\overline{Q}_j$ unendlich viele Folgenglieder x_ν enthält. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $x_\nu \in \overline{Q_j}$ ist für alle ν.

Wähle eine Folge $0 < \varepsilon_\nu < 1/\nu$ so dass $B_{\varepsilon_\nu}(x_\nu) \subset P_i$ ist für alle ν. Dann gilt auch $P_{\varepsilon_\nu}(x_\nu) \cap Q_j \neq \emptyset$ für alle ν. Nach dem abzählbaren Auswahlaxiom gibt es also eine Folge $y_\nu \in Q_j$ so dass $\|x_\nu - y_\nu\| < \varepsilon_\nu$ ist für alle ν. Dann gilt $y_\nu \in P_i \cap Q_j$ und $x = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \lim_{\nu\to\infty} y_\nu$. Also ist $x \in \overline{P_i \cap Q_j}$ und damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Behauptung besagt, dass

$$\overline{P}_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{P_i \cap Q_j}$$

ist für alle i. Ebenso gilt $\overline{Q}_j = \bigcup_{i=1}^k \overline{P_i \cap Q_j}$ und

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{P_i \cap Q_j}.$$

Damit ist Lemma 1.6 bewiesen. □

Lemma 1.7. *Sei $Q = Q(a,b) \subset \mathbb{R}^n$ ein offener achsenparalleler Quader und $P = (P_1, \ldots, P_k)$ eine Partition von $B := \overline{Q}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i).$$

Beweis. Der Beweis beruht auf einer Idee von John von Neumann (der von 1921 bis 1923 an der ETH studierte). Für jedes $\varepsilon > 0$ betrachten wir das Gitter

$$\Lambda_\varepsilon := \varepsilon \mathbb{Z}^n$$

und untersuchen die Anzahl der Gitterpunkte die dem offenen Quader Q, beziehungsweise dem abgeschlossene Quader $\overline{Q}$ angehören. Es gilt die folgende Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - \varepsilon) \leq \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \leq \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{Q}) \leq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + \varepsilon). \qquad (5)$$

Zum Beweis von (5) betrachten wir zunächst den Fall $n = 1$. Seien also $a < b$ zwei reelle Zahlen und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\ell, m \in \mathbb{Z}$ so dass

$$(\ell - 1)\varepsilon < a \leq \ell\varepsilon, \qquad m\varepsilon \leq b < (m+1)\varepsilon.$$

Dann gilt $\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a,b] = \{j\varepsilon \,|\, \ell \le j \le m\}$ und daher

$$\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a,b]) = m - \ell + 1 \le \frac{b-a+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Nun wähle $\ell, m \in \mathbb{Z}$ so dass

$$(\ell-1)\varepsilon \le a < \ell\varepsilon, \qquad m\varepsilon < b \le (m+1)\varepsilon.$$

Dann gilt $\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a,b) = \{j\varepsilon \,|\, \ell \le j \le m\}$ und daher

$$\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a,b)) = m - \ell + 1 = (m+1) - (\ell-1) - 1 \ge \frac{b-a-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$b - a - \varepsilon \le \varepsilon\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap (a,b)) \le \varepsilon\#(\varepsilon\mathbb{Z} \cap [a,b]) \le b - a + \varepsilon.$$

Ersetzen wir nun a, b durch a_i, b_i und bilden das Produkt über $i = 1, \dots, n$, so ergibt sich die Ungleichung (5).

Aus (5) folgt durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, dass

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{Q}). \tag{6}$$

Nun gilt offensichtlich

$$\sum_{i=1}^k \#(\Lambda_\varepsilon \cap P_i) \le \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) \le \sum_{i=1}^k \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{P}_i)$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit ε^n und bilden den Limes $\varepsilon \to 0$, so ergibt sich unter dreimaliger Verwendung von (6), dass

$$\begin{aligned}
\sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_i \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap P_i) \\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap Q) = \mathrm{Vol}_n(Q) \\
&\le \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_i \varepsilon^n \#(\Lambda_\varepsilon \cap \overline{P}_i) \\
&= \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung von Lemma 1.7. □

Obersummen und Untersummen

Definition 1.8. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ eine Partition von B. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die* **Obersumme von f und P** *ist die Zahl*

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{k} \Big(\sup_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i). \tag{7}$$

Die **Untersumme von f und P** *ist die Zahl*

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{k} \Big(\inf_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i). \tag{8}$$

Lemma 1.9. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und seien*

$$P = \{P_1, \dots, P_k\}, \qquad Q = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$$

Partitionen von B. Dann gilt

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, P \wedge Q) \le \overline{S}(f, P \wedge Q) \le \overline{S}(f, Q).$$

Beweis. Es folgt aus Definition 1.8 sowie Lemma 1.6 and Lemma 1.7, dass

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) &= \sum_i \Big(\inf_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&= \sum_i \sum_j \Big(\inf_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\le \sum_i \sum_j \Big(\inf_{\overline{P_i \cap Q_j}} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) = \underline{S}(f, P \wedge Q) \\
&\le \sum_i \sum_j \Big(\sup_{\overline{P_i \cap Q_j}} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) = \overline{S}(f, P \wedge Q) \\
&\le \sum_j \sum_i \Big(\sup_{\overline{Q}_j} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&= \sum_j \Big(\sup_{\overline{Q}_j} f\Big) \mathrm{Vol}_n(Q_j) \\
&= \overline{S}(f, Q).
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 1.9 bewiesen. □

Definition des Riemannschen Integrals

Nach Lemma 1.9 erfüllt jede kompakte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$ und jede beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) \leq \inf_{Q \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f, Q). \tag{9}$$

Definition 1.10. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$. Eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heisst* **Riemann-integrierbar***, wenn*

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) = \inf_{Q \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f, Q)$$

ist. Falls $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, so wird die reelle Zahl

$$\int_B f(x) dx_1 \cdots dx_n := \sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f, P) = \inf_{Q \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f, Q) \tag{10}$$

das **(Riemannsche) Integral von f über** *B genannt.*

Beispiel 1.11. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge die eine Partition besitzt. Als erstes Beispiel betrachten wir eine konstante Funktion $f : B \to \mathbb{R}$. Sei also $a \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) = a$ ist für alle $x \in B$. Ist $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Partition von B so gilt $\inf_{\overline{P}_i} f = \sup_{\overline{P}_i} f = a$ für alle i und daher

$$\underline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P) = a \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i).$$

Daraus folgt nach Lemma 1.9, dass alle $P, Q \in \mathscr{P}(B)$ die Ungleichungen $\overline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q) = \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$ erfüllen. Also sind Obersumme und Untersumme von f unabhängig von der Wahl der Partition. Daraus folgt, dass die Konstante Funktion $f \equiv a$ Riemann-integrierbar ist und die Gleichung

$$\int_B a \, dx_1 \cdots dx_n = a \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i)$$

für jede Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ gilt. Das Integral der konstanten Funktion $f \equiv 1$ wird das **(n-dimensionale) Volumen von** B genannt und mit

$$\mathrm{Vol}_n(B) := \int_B 1 \, dx_1 \cdots dx_n = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i) \tag{11}$$

(für $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$) bezeichnet.

Lemma 1.12. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$ und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar.*

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $P \in \mathscr{P}(B)$ mit*

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

Proof. Wir zeigen zunächst dass (i) aus (ii) folgt. Sei also (ii) erfüllt. Dann gilt die Ungleichung

$$\inf_{Q \in \mathscr{P}(P)} \overline{S}(f, Q) < \sup_{P \in \mathscr{P}(P)} \underline{S}(f, P) + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Daraus folgt

$$\inf_{Q \in \mathscr{P}(P)} \overline{S}(f, Q) \leq \sup_{P \in \mathscr{P}(P)} \underline{S}(f, P).$$

Daher folgt aus der Ungleichung (9) dass f Riemann-integrierbar ist.

Wir zeigen dass (ii) aus (i) folgt. Sei also $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und sei

$$c := \int_B f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Definition des Riemannschen Integrals zwei Partitionen $P, Q \in \mathscr{P}(B)$ so dass

$$\underline{S}(f, P) > c - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{S}(f, Q) < c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt nach Lemma 1.9, dass

$$\overline{S}(f, P \wedge Q) - \underline{S}(f, P \wedge Q) \leq \overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

ist. Damit ist Lemma 1.12 bewiesen. □

Mit Hilfe von Lemma 1.12 kann man leicht zeigen, dass jede stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$ Riemann-integrierbar ist. Im nächsten Abschnitt werden wir eine viel allgemeinere Aussage bweisen, welche die Riemannsche Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ bereits dann garantiert, wenn sie ausserhalb einer sogenannten *Jordanschen Nullmenge* stetig ist.

1.3 Jordansche Nullmengen

Definition 1.13. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst* **Jordanschen Nullmenge**, *wenn es für jededs $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ gibt so dass $A \subset \bigcup_{\nu=1}^N W_\nu$ ist und $\sum_{\nu=1}^N \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon$.*

Es folgt direkt aus der Definition, dass jede Jordansche Nullmenge beschränkt ist, dass jede Teilmenge einer Jordanschen Nullmenge ebenfalls eine Jordansche Nullmenge ist, und dass jede endliche Vereinigung Jordanscher Nullmengen selbst wieder eine Jordansche Nullmenge ist.

Lemma 1.14. *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge so ist ihr Abschluss $\overline{A}$ ebenfalls eine Jordansche Nullmenge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle offene Quader $W_1, \dots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ so dass $A \subset \bigcup_{\nu=1}^N W_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^N \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Für $\nu = 1, \dots, N$ wähle einen offenen Quader W'_ν mit $\overline{W}_\nu \subset W'_\nu$ und $\mathrm{Vol}_n(W'_\nu) \leq 2\mathrm{Vol}(W_\nu)$. Dann gilt $\overline{A} \subset \bigcup_{\nu=1}^N \overline{W}_\nu \subset \bigcup_{\nu=1}^N W'_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^N \mathrm{Vol}_n(W'_\nu) \leq 2\sum_{\nu=1}^N \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon$. Damit ist Lemma 1.14 bewiesen. □

Beispiel 1.15. (i) Ist $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine beschränkte Menge und ist $c \in \mathbb{R}$, so ist die Menge $A := B \times \{c\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge. **Beweis:** Wähle $R > 0$ und $\delta > 0$ so dass $B \subset (-R, R)^{n-1}$ und $\delta < \varepsilon/2^n R^{n-1}$. Dann ist die Menge $W := (-R, R)^{n-1} \times (c - \delta, c + \delta)$ ein offener Quader der A enthält und $\mathrm{Vol}_n(W) = (2R)^{n-1} 2\delta < \varepsilon$.

(ii) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler offener Quader. Dann ist ∂Q eine Jordansche Nullmenge nach (i).

(iii) Eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist keine Jordansche Nullmenge. (Jede nichtleere offene offene Menge enthält einen achsenparallelen offenen Quader Q; ist ein solcher Quader in der Vereinigung endlichen vieler offener Quader $W_1, \dots, W_N$ enthalten, so gilt $\sum_{\nu=1}^N \mathrm{Vol}_n(W_\nu) \geq \mathrm{Vol}_n(Q) > 0$ nach dem von Neumannschen Argument im Beweis von Lemma 1.7.)

(iv) Die abzählbare beschränkte Menge $A := \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist keine Jordansche Nullmenge, denn $\overline{A} = [0, 1]$ ist keine Jordansche Nullmenge nach (iii).

(v) Die standard Kantormenge $K \subset [0, 1]$ ist eine Jordansche Nullmenge.

(vi) Die Konstruktion der Kantormenge lässt sich so modifizieren, dass man eine kompakte Menge $K' \subset [0, 1]$ erhält, die keine Jordansche Nullmenge ist. In diesem Fall ist $U := [0, 1] \setminus K'$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ deren Rand $\partial U = K'$ keine Jordansche Nullmenge ist.

Definition 1.16. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Partition von B. Dann ist jeder der offenen Quader P_i ein Produkt offener Intervalle $P_i =: (a_{i1}, b_{i1}) \times (a_{i2}, b_{i2}) \times \cdots \times (a_{in}, b_{in})$ mit $a_{ij} < b_{ij}$. Für $i = 1, \ldots, k$ heisst die Zahl*

$$\delta(P_i) := \max \{b_{i1} - a_{i1}, b_{i2} - a_{i2}, \ldots, b_{in} - a_{in}\}$$

die **maximale Seitenlänge von** P_i. *Die Zahl*

$$\delta(P) := \max_{i=1,\ldots,k} \delta(P_i) = \max_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}} (b_{ij} - a_{ij})$$

heisst **Feinheit der Partition** P.

Übung 1.17. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$. Dann existiert für jedes $\delta_0 > 0$ eine Partition $P \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$.

Lemma 1.18. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$, sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zahl $\delta_0 > 0$ so dass für alle $P \in \mathscr{P}(B)$ gilt*

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Lemma 1.14 ist $\overline{A}$ eine Jordansche Nullmenge. Daher existieren offene Quader $W_1, \ldots, W_N \subset \mathbb{R}^n$ so dass

$$\overline{A} \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} W_\nu, \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon. \tag{12}$$

Schritt 1. *Es existiert eine Zahl $\rho > 0$ so, dass für jedes Element $a \in \overline{A}$ ein $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ existiert, so dass $B_\rho(a) \subset W_\nu$ ist.*

Für jedes $a \in \overline{A}$ gibt es eine Zahl $\nu = \nu(a) \in \{1, \ldots, N\}$ so dass $a \in W_\nu$ ist. Da W_ν eine offene Menge ist, gibt es weiterhin für jedes $a \in A$ eine Zahl $\rho(a) > 0$ mit $B_{2\rho(a)}(a) \subset W_{\nu(a)}$. (Hier wird das Auswahlaxiom nicht benötigt. Wir können einfach $\nu(a)$ als den kleinsten Index in $\{1, \ldots, N\}$ definieren so dass $W_{\nu(a)}$ den Punkt a enthählt und dann $\rho(a)$ als die grösste Zahl mit der Eigenschaft $B_{2\rho(a)}(a) \subset W_{\nu(a)}$.) Nun bilden die Mengen $B_{\rho(a)}(a)$, $a \in \overline{A}$, eine offene Überdeckung der Menge $\overline{A}$ (siehe [3]). Diese ist abgeschlossem und beschränkt, und daher nach dem Satz von Heine–Borel folgenkompakt. Nach [3, Satz 3] gibt es daher endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_m \in \overline{A}$ mit

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\rho(a_i)}(a_i).$$

Für $i = 1, \ldots, m$ führen wir nun die Abkürzungen $\rho_i := \rho(a_i)$ und $\nu_i := \nu(a_i)$ ein. Sei $\rho := \min\{\rho_1, \ldots, \rho_m\} > 0$. Dann gilt $B_{\rho_i+\rho}(a_i) \subset B_{2\rho_i}(a_i) \subset W_{\nu_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei nun $a \in \overline{A}$ gegeben. Dann existiert ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\|a - a_i\| < \rho_i$. Daraus folgt $B_\rho(a) \subset B_{\rho+\rho_i}(a_i) \subset W_{\nu_i}$. Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Sei $\rho > 0$ wie in Schritt 1 und $\delta_0 := \rho/\sqrt{n}$. Sei $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Partition von B mit $\delta(P) < \delta_0$. Dann gilt für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$, dass*

$$\overline{P}_j \cap A \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \nu \in \{1, \ldots \mathbb{N}\} \text{ so dass } \overline{P}_j \subset W_\nu.$$

Sei $a \in \overline{P}_i \cap A$. Nach Schritt 1 existiert ein Element $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ so dass $B_\rho(a) \subset W_\nu$ ist. Da $\delta(P_j) < \delta_0$ ist, gilt für jedes Element $x \in \overline{P}_j$ die Ungleichung

$$\|x - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{n}\delta(P_j) < \sqrt{n}\delta_0 = \rho.$$

Also folgt $\overline{P}_j \subset B_\rho(a) \subset W_\nu$. Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *Die Behauptung von Lemma 1.18 gilt mit $\delta_0 = \rho/\sqrt{n}$.*

Sei $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Partition von B mit $\delta(P) < \delta_0$. Definiere

$$J_A := \left\{ j \in \{1, \ldots, k\} \,|\, \overline{P}_j \cap A \neq \emptyset \right\}$$

und, für $\nu = 1, \ldots, N$,

$$J_\nu := \left\{ j \in \{1, \ldots, k\} \,|\, \overline{P}_j \subset W_\nu \right\}.$$

Dann gilt nach Schritt 2 $J_A \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} J_\nu$. Daraus folgt

$$\sum_{j \in J_A} \mathrm{Vol}_n(P_j) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{j \in J_\nu} \mathrm{Vol}_n(P_j) \right) \leq \sum_{\nu=1}^{N} \mathrm{Vol}_n(W_\nu) < \varepsilon.$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus dem Beweis von Lemma 1.7 (mit von Neumann's Trick). Die letzte Ungleichung folgt aus (12). Damit ist Lemma 1.18 bewiesen. $\square$

Der nächste Satz zeigt, dass jede beschränkte Funktion, die ausserhalb einer Jordanschen Nullmenge stetig ist, Riemann-integrierbar ist.

Satz 1.19. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$, sei $A \subset B$ eine Jordansche Nullmenge, und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

(i) *Ist f auf $B \setminus A$ stetig, dann ist f Riemann-integrierbar.*

(ii) *Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in B \setminus A$ so ist $\int_B f = 0$.*

Beweis. Der Beweis hat zwei Schritte.

Schritt 1. *Ist $f(x) = 0$ für $x \in B \setminus A$ so ist $f \in \mathscr{R}(B)$ und*

$$\int_B f = 0.$$

Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass f nicht identisch verschwindet. Also ist $\|f\| = \sup_B |f| \neq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Lemma 1.18 existiert eine Partition

$$P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$$

so dass

$$\sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}. \tag{13}$$

Dann gilt

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \Big(\sup_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \leq \|f\| \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

und ebenso

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \Big(\inf_{\overline{P}_i} f\Big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \geq -\|f\| \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) \geq -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Damit folgt Schritt 1 aus Satz 1.20.

Schritt 2. *Ist f auf $B \setminus A$ stetig, so ist $f \in \mathscr{R}(B)$.*

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen wiederum an, dass f nicht identisch verschwindet und wählen eine Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ so dass (13) gilt. Betrachte die kompakte Menge

$$K := \bigcup_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \overline{P}_i.$$

Die Restriktion $f|_K : K \to \mathbb{R}$ ist stetig. Nach einem Satz aus der Analysis I Vorlesung (siehe [4, Kapitel VII]) ist $f|_K$ also gleichmässig stetig. Sei

$$V := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i).$$

Wähle $\delta_0 > 0$ so dass für alle $x, y \in K$ gilt

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} |x_\nu - y_\nu| < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2V}$$

Wähler eine Partition $Q = \{Q_1, \ldots, Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(Q) < \delta_0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2V}$$

für alle $j = 1, \ldots, \ell$ und alle $x, y \in Q_j \cap K$, und daher

$$\overline{P}_i \cap A = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f \le \frac{\varepsilon}{2V}$$

für alle i, j. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(f, P \wedge Q) - \underline{S}(f, P \wedge Q) \\
&= \sum_i \sum_j \Bigl(\sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f\Bigr) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\le \sum_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \sum_j \Bigl(\sup_{P_i \cap Q_j} f - \inf_{P_i \cap Q_j} f\Bigr) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad + 2\,\|f\| \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \sum_j \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2V} \sum_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \sum_j \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\qquad + 2\,\|f\| \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \sum_j \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&= \frac{\varepsilon}{2V} \sum_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) + 2\,\|f\| \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&< \frac{\varepsilon}{2V} \sum_i \mathrm{Vol}_n(P_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hier folgt die vorletzte Ungleichung aus (13). Nach Lemma 1.12 ist also f Riemann-integrierbar. Damit sind Schritt 2 und Satz 1.19 bewiesen. $\square$

1.4 Riemannsche Summen

Das Ziel diese Abschnitts ist der Beweis des folgenden zentralen Kriteriums für die Riemannsche Integrierbarkeit. Der Satz zeigt, dass eine beschränkte Funktion genau dann Riemann-integrierbar ist wenn die sogenannten *Riemannschen Summen* konvergieren.

Satz 1.20. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$, sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar und*

$$c = \int_B f(x)dx_1 \cdots dx_n.$$

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $P \in \mathscr{P}(B)$ so dass*

$$c - \varepsilon < \underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P) < c + \varepsilon. \tag{14}$$

(iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_0 > 0$ so dass für jedes $P \in \mathscr{P}(B)$ gilt*

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c - \varepsilon < \underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P) < c + \varepsilon. \tag{15}$$

(iv) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta_0 > 0$ so dass für jede Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ und alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\begin{array}{l} \delta(P) < \delta_0 \\ x_i \in \overline{P}_i \ \forall i \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \left| c - \sum_{i=1}^k f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i) \right| < \varepsilon. \tag{16}$$

Die Zahlen $\sum_{i=1}^k f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i)$ heissen **Riemannsche Summen** *von f.*

Proof. Siehe Seite 19. □

Zum Beweis von Satz 1.20 benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.21. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$, $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $Q \in \mathscr{P}(B)$, und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Zahl $\delta_0 > 0$ so dass für alle $P \in \mathscr{P}(B)$ gilt*

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underline{S}(f, P) \ge \underline{S}(f, Q) - \varepsilon, \\ \overline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, Q) + \varepsilon. \end{array} \tag{17}$$

Beweis. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $Q = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ eine Partition von B. Wähle eine Zahl $\varepsilon > 0$. Definiere

$$M := \sup_{x \in B} |f(x)|\,, \qquad A := \bigcup_{j=1}^{\ell} \partial Q_j.$$

Dann ist A eine Jordansche Nullmenge (siehe Beispiel 1.15). Nach Lemma 1.18 existiert daher eine Zahl $\delta_0 > 0$, so dass für jede Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ von B gilt

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{18}$$

Sei nun $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ eine Partition von B mit $\delta(P) < \delta_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &\leq \underline{S}(f, P \wedge Q) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\inf_{\overline{P}_i \cap \overline{Q}_j} f \Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&= \sum_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\inf_{\overline{P}_i \cap \overline{Q}_j} f \Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\quad + \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\inf_{\overline{P}_i \cap \overline{Q}_j} f \Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \\
&\leq \sum_{\overline{P}_i \cap A = \emptyset} \Big(\inf_{\overline{P}_i} f \Big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&\quad + M \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}_n(P_i \cap Q_j) \right) \\
&\leq \underline{S}(f,P) + 2M \sum_{\overline{P}_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&< \underline{S}(f,P) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\overline{S}(f,P) > \overline{S}(f,Q) - \varepsilon$ zeigt man genauso. Damit ist Lemma 1.21 bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 1.20. Wir zeigen zunächst, dass (iii) und (iv) äquivalent sind. Die Implikation (iii) $\Longrightarrow$ (iv) folgt sofort aus der Ungleichung

$$\underline{S}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i) \leq \overline{S}(f,P)$$

für jede Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ von B und alle $x_i \in \overline{P}_i$. Um die Umkehrung (iv) $\Longrightarrow$ (iii) zu zeigen, geben wor eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wählen $\delta_0 > 0$ so, dass (16) gilt. Da

$$\overline{S}(f,P) = \sup_{x_i \in \overline{P}_i} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i), \qquad \underline{S}(f,P) = \inf_{x_i \in \overline{P}_i} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i),$$

folgt aus (16) die Ungleichung

$$c - \varepsilon \leq \underline{S}(f,P) \leq c \leq \overline{S}(f,P) \leq c + \varepsilon.$$

Damit habe wir gezeigt, dass (iii) und (iv) äquivalent sind.

Wir beweisen (i) $\Longrightarrow$ (iii). Sei also $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, sei

$$c = \int_B f(x)dx_1 \cdots dx_n = \sup_{P \in \mathscr{P}(B)} \underline{S}(f,P) = \inf_{Q \in \mathscr{P}(B)} \overline{S}(f,Q),$$

und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Lemma 1.12 eine Partition $Q \in \mathscr{P}(B)$ mit

$$\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\underline{S}(f,Q) \leq c \leq \overline{S}(f,Q)$ ist, folgen daraus die Ungleichungen

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,Q) \leq c \leq \overline{S}(f,Q) < c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Lemma 1.21 existiert nun eine Zahl $\delta_0 > 0$ so dass für jede Partition $P \in \mathscr{P}(B)$ gilt

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,Q) - \varepsilon/2 > c - \varepsilon, \\ \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q) + \varepsilon/2 < c + \varepsilon. \end{array}$$

Also erfüllt f die Bedingung (iii). Die Implikation (iii) $\Longrightarrow$ (ii) folgt sofort aus Übung 1.17 und (ii) $\Longrightarrow$ (i) folgt sofort aus Lemma 1.9 und der Definition des Riemannschen Integrals. Damit ist Satz 1.20 bewiesen. $\square$

Der Banachraum der integrierbaren Funktionen

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge, die eine Partition besitzt, so dass $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$ ist (siehe Definition 1.4). Wir bezeichnen die Menge der Riemann-integrierbaren Function auf B (siehe Definition 1.10) mit

$$\mathscr{R}(B) := \{f : B \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar}\}.$$

Es ist nützlich, die Abkürzung $\int_B f := \int_B f(x)dx_1 \cdots dx_n$ für $f \in \mathscr{R}(B)$ zu verwenden. Es sei daran erinnert, dass das **Volumen der Menge B** durch die Formel

$$\mathrm{Vol}_n(B) := \int_B 1 = \overline{S}(1, P) = \underline{S}(1, P) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(P_i) \tag{19}$$

für $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ definiert ist; diese Zahl ist unabhängig von P (Siehe Beispiel 1.11). Die Supremumsnorm einer beschränkten Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ wird mit

$$\|f\| := \sup_{x \in B} |f(x)| \tag{20}$$

bezeichnet. Der folgende Satz fasst einige grundlegende Eigenschaften des Riemannschen Integrals zusammen. Insbesondere ist $\mathscr{R}(B)$ nach (i) ein reeller Vektorraum und die Abbildung $\mathscr{R}(B) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_B f$ ist linear ist. Nach (v) ist $\mathscr{R}(B)$ sogar ein Banachraum.

Satz 1.22. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$.*

(i) *Sind $f, g : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen $f + g : B \to \mathbb{R}$ und $\lambda f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_B (f + g) = \int_B f + \int_B g, \qquad \int_B \lambda f = \lambda \int_B f.$$

(ii) *Sind $f, g : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar so sind auch die Funktionen fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$ Riemann-integrierbar.*

(iii) *Sind $f, g \in \mathscr{R}(B)$ und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$, so gilt $\int_B f \leq \int_B g$*

(iv) *Für jedes $f \in \mathscr{R}(B)$ gilt $\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f| \leq \|f\| \,\mathrm{Vol}_n(B)$.*

(v) *Wenn $f_\nu \in \mathscr{R}(B)$, $\nu \in \mathbb{N}$, eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen ist, die gleichmässig gegen $f : B \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_B f = \lim_{\nu \to \infty} \int_B f_\nu$.*

(vi) *$\mathscr{R}(B)$ ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm und das lineare Funktional $\mathscr{R}(B) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_B f$ ist stetig bezüglich dieser Norm.*

Beweis. Wir beweisen (i). Seien $f, g : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$a := \int_B f, \qquad b := \int_B g.$$

Wir beweisen dass die Funktion $h := f+g : B \to \mathbb{R}$ und die Zahl $c := a+b \in \mathbb{R}$ die Bedingung (iv) in Satz 1.20 erfüllen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Satz 1.20 eine Zahl $\delta_0 > 0$, so dass jede Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ und alle Vektoren $x_i \in \overline{P}_i$, die Ungleichungen

$$\left| a - \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| b - \sum_{i=1}^{k} g(x_i)\mathrm{Vol}_n(P_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

erfüllen. Daraus folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\left| a + b - \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) + g(x_i))\mathrm{Vol}_n(P_i) \right| < \varepsilon,$$

ebenfalls für jede Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$ mit $\delta(P) < \delta_0$ und alle Vektoren $x_i \in \overline{P}_i$. Damit haben wir gezeigt, dass $h := f + g$ und $c := a + b$ Bedingung (iv) in Satz 1.20 erfüllen. Also ist $f + g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_B (f + g) = a + b = \int_B f + \int_B g.$$

Ebenso zeigt man, dass, für jedes $f \in \mathscr{R}(B)$ und jede reelle Zahl λ, die Funktion $\lambda f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_B \lambda f = \lambda \int_B f$ ist. Damit ist (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Sei $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ eine Partition von B. Dann gilt für jedes i und alle $x, y \in \overline{P}_i$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(y)g(y) &= f(x)\big(g(x) - g(y)\big) + \big(f(x) - g(y)\big)g(y) \\ &\leq \|f\| \big(g(x) - g(y)\big) + \|g\| \big(f(x) - g(y)\big) \\ &\leq \|f\| \Big(\sup_{\overline{P}_i} g - \inf_{\overline{P}_i} g\Big) + \|g\| \Big(\sup_{\overline{P}_i} f - \inf_{\overline{P}_i} f\Big). \end{aligned}$$

Bilden wir das Supremum über $x, y \in \overline{P}_i$, so ergibt sich für $i = 1, \dots, k$ die Ungleichung

$$\sup_{\overline{P}_i} fg - \inf_{\overline{P}_i} fg \leq \|f\| \Big(\sup_{\overline{P}_i} g - \inf_{\overline{P}_i} g\Big) + \|g\| \Big(\sup_{\overline{P}_i} f - \inf_{\overline{P}_i} f\Big).$$

Daraus folgt

$$\overline{S}(fg,P)-\underline{S}(fg,P)\le \|f\|\bigl(\overline{S}(g,P)-\underline{S}(g,P)\bigr)+\|g\|\bigl(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\bigr).$$

Wir zeigen nun, dass fg Riemann-integrierbar ist. Dazu nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass weder f noch g identisch verschwindet, so dass $\|f\|\neq 0$ und $\|g\|\neq 0$ sind. Sei $\varepsilon>0$ gegeben. Da f und g Riemann-integrierbar sind, existieren nach Lemma 1.12 zwei Partitionen $P,Q\in\mathscr{P}(B)$ so dass

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\le\frac{\varepsilon}{2\|g\|},\qquad \overline{S}(g,Q)-\underline{S}(g,Q)\le\frac{\varepsilon}{2\|f\|}.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt unter Verwendung von Lemma 1.9, dass

$$\begin{aligned}
&\overline{S}(fg,P\wedge Q)-\underline{S}(fg,P\wedge Q)\\
&\le \|f\|\bigl(\overline{S}(g,P\wedge Q)-\underline{S}(g,P\wedge Q)\bigr)+\|g\|\bigl(\overline{S}(f,P\wedge Q)-\underline{S}(f,P\wedge Q)\bigr)\\
&\le \|f\|\bigl(\overline{S}(g,Q)-\underline{S}(g,Q)\bigr)+\|g\|\bigl(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\bigr)\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nach Lemma 1.12, dass fg Riemann-integrierbar ist. Wir zeigen nun, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist. Dazu wählen wir wieder eine Partition $P=\{P_1,\dots,P_k\}$ von B. Dann gilt für jedes i und alle $x,y\in\overline{P}_i$

$$|f(x)|-|f(y)|\le|f(x)-f(y)|\le\sup_{\overline{P}_i}f-\inf_{\overline{P}_i}f.$$

Daraus folgt $\sup_{\overline{P}_i}|f|-\inf_{\overline{P}_i}|f|\le\sup_{\overline{P}_i}f-\inf_{\overline{P}_i}f$ für alle i und daher

$$\overline{S}(|f|,P)-\underline{S}(|f|,P)\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P).$$

Also folgt aus Lemma 1.12, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist. Nun gilt

$$\max\{f,g\}+\min\{f,g\}=f+g,\qquad \max\{f,g\}-\min\{f,g\}=|f-g|.$$

Diese beiden Funktionen sind nach dem bisher gezeigten Riemann-integrierbar. Also folgt aus (i), dass auch die Funktionen $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ Riemann-integrierbar sind. Damit ist (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Sind $f,g\in\mathscr{R}(B)$ und $f\le g$ so gilt $\underline{S}(f,P)\le\underline{S}(g,P)$ für jede Partition $P\in\mathscr{P}(B)$ und daraus folgt sofort $\int_B f\le\int_B g$.

Wir beweisen (iv). Ist $f \in \mathscr{R}(B)$, so sind die Funktionen $-|f|$ und $|f|$ nach (i) und (ii) Riemann-integrierbar. Ausserdem gilt $-|f| \le f \le |f|$. Also folgt aus (iii), dass

$$-\int_B |f| \le \int_B f \le \int_B |f|.$$

Dies ist äquivalent zu $\left|\int_B f\right| \le \int_B |f|$. Ausserdem folgt aus (i) und der Definition von $\mathrm{Vol}_n(B)$, dass das Integral einer konstanten Funktion c durch $\int_B c = c\mathrm{Vol}_n(B)$ gegeben ist. Mit $c = \|f\| \ge |f|$ ergibt sich aus (iii) die Ungleichung $\|f\| \mathrm{Vol}_n(B) = \int_B \|f\| \ge \int_B |f|$. Damit ist (iv) bewiesen.

Wir beweisen (v). Sei also $f_\nu : B \to \mathbb{R}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die gleichmässig gegen $f : B \to \mathbb{R}$ konvergiert. Aus der Definition der gleichmässigen Konvergenz folgt, dass f beschränkt ist und f_ν bezüglich der Supremumsnorm gegen f konvergiert. Insbesondere ist also $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm. Nun definieren wir eine Folge $(c_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ durch

$$c_\nu := \int_B f_\nu, \qquad \nu \in \mathbb{N}.$$

Nach (iv) gilt für alle $\nu, \nu' \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|c_\nu - c_{\nu'}| \le \int_B |f_\nu - f_{\nu'}| \le \|f_\nu - f_{\nu'}\| \mathrm{Vol}_n(B). \tag{21}$$

Daraus folgt, dass $(c_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Da jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert, existiert auch der Grenzwert

$$c := \lim_{\nu\to\infty} c_\nu.$$

Bilden wir in (21) nun den Grenzübergang $\nu' \to \infty$ so erhalten wir die Ungleichung

$$|c_\nu - c| \le \|f_\nu - f\| \mathrm{Vol}_n(B). \tag{22}$$

Wir beweisen, dass f Riemann-integrierbar und $\int_B f = c$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f_ν in der Supremumsnorm gegen f convergiert, existiert eine Zahl $\nu \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|f_\nu - f\| < \frac{\varepsilon}{3\mathrm{Vol}_n(B)}, \qquad |c_\nu - c| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus der ersten und (22). Da $c_\nu = \int_B f_\nu$ ist, existiert nach Satz 1.20 eine Partition $P \in \mathscr{P}(B)$, so dass

$$c_\nu - \frac{\varepsilon}{3} < \underline{S}(f_\nu, P) \leq \overline{S}(f_\nu, P) \leq c_\nu + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Ausserdem folgt aus der Definition von Ober- und Untersumme, dass

$$\begin{aligned} \left|\overline{S}(f_\nu, P) - \overline{S}(f, P)\right| &\leq \|f - f_\nu\| \operatorname{Vol}_n(B) < \frac{\varepsilon}{3}, \\ \left|\underline{S}(f_\nu, P) - \underline{S}(f, P)\right| &\leq \|f - f_\nu\| \operatorname{Vol}_n(B) < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{25}$$

Kombinieren wir die Ungleichungen (23), (24), und (25) so erhalten wir

$$c - \varepsilon < c_\nu - \frac{2\varepsilon}{3} < \underline{S}(f_\nu, P) - \frac{\varepsilon}{3} < \underline{S}(f, P)$$

und

$$\overline{S}(f, P) < \overline{S}(f_\nu, P) + \frac{\varepsilon}{3} < c_\nu + \frac{2\varepsilon}{3} < c + \varepsilon.$$

Also folgt aus Satz 1.20, dass f Riemann-integrierbar und $\int_B f = c$ ist. Damit ist (v) bewiesen.

Wir beweisen (vi). Sei $f_\nu \in \mathscr{R}(B)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supermumsnorm. Die Ungleichung

$$|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| \leq \|f_\nu - f_{\nu'}\|$$

für alle $x \in B$ und alle $\nu, \nu' \in \mathbb{N}$ zeigt, dass die Folge $(f_\nu(x))_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ für jedes $x \in B$ eine Cauchy-Folge ist. Also folgt aus dem Vollständigkeitsaxiom für die reellen Zahlen, dass die Folge $(f_\nu(x))_{\nu \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in B$ konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$f(x) := \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x).$$

Dies definiert eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass die Funktionen-Folge f_ν gleichmässig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f_ν eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremuumsnorm ist, existiert eine natürlich Zahl $\nu_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $\nu, \nu' \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\nu, \nu' \geq \nu_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_\nu - f'_\nu\| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt $|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in B$ und alle $\nu, \nu' \ge \nu_0$. Bilden wir nun den Grenzwert $\nu' \to \infty$ so ergibt sich die Ungleichung

$$|f_\nu(x) - f(x)| = \lim_{\nu' \to \infty} |f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)| \le \varepsilon$$

für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\nu \ge \nu_0$. Diese Ungleichung lässt sich auch in der Form schreiben

$$\nu \in \mathbb{N},\ \nu \ge \nu_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_\nu - f\| \le \varepsilon.$$

Mit anderen Worten, f_ν konvergiert gegen f in der Supremumsnorm, und dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass f_ν gleichmässig gegen f konvergiert. Nun folgt aus (iv), dass f Riemann-integrierbar ist. Also haben wir gezeigt, dass $\mathscr{R}(B)$ mit der Supremumsnorm ein vollständiger normierter Vektorraum, und damit ein Banachraum, ist. Die Stetigkeit des linearen Funktionals

$$\mathscr{R}(B) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_B f$$

folgt sofort aus (iv). Damit ist Satz 1.22 bewiesen. $\square$

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $\mathscr{P}(B) \ne \emptyset$ und sei

$$\mathscr{B}(B) := \{f : B \to \mathbb{R} \,|\, \exists c > 0\ \forall x \in B\ \ |f(x)| \le c\}$$

die Menge der beschränkten Funktionen. Dies ist ein Banachraum mit der Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)|\,.$$

Die Menge $\mathscr{R}(B)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen ist, nach Teil (iv) von Satz 1.22, ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathscr{B}(B)$ und damit selbst wieder ein Banachraum. Weiterhin ist die Menge

$$\mathscr{C}(B) = \{f : B \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$$

aller stetigen Funktionen nach Satz 1.19 ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathscr{R}(B)$ und ist damit ebenfalls ein Banachraum mit der Supremumsnorm (denn der Grenzwert einer gleichmässig konvergierenden Folge stetiger Funktionen ist stetig). Damit haben wir folgende Inklusionen von Banachräumen mit der Supremumsnorm

$$\mathscr{C}(B) \subset \mathscr{R}(B) \subset \mathscr{B}(B).$$

2 Iterierte Integrale

2.1 Der Satz von Fubini

Satz 2.1 (Fubini). *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n := p + q$. Seien $A \subset \mathbb{R}^p$ und $B \subset \mathbb{R}^q$ kompakte Mengen so dass $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ und $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$. Dann ist $\mathscr{P}(A \times B) \neq \emptyset$. Sei $f : A \times B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, so dass, für jedes $x \in A$, die Funktion*

$$f_x : B \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := f(x, y),$$

Riemann-integrierbar ist. Dann ist die Abbildung $A \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_B f_x$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y) dy_1 \cdots dy_q \right) dx_1 \cdots dx_p. \tag{26}$$

Beweis. Definiere $F : A \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_B f_x = \int_B f(x,y) dy_1 \cdots dy_p, \qquad c := \int_{A\times B} f$$

Wir beweisen in zwei Schritten, dass $F \in \mathscr{R}(A)$ und $\int_A F = c$ ist.

Schritt 1. *Seien $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(A)$ und $Q = \{Q_1, \dots, Q_\ell\} \in \mathscr{P}(B)$ zwei Partitionen. Dann ist die Menge*

$$P \times Q := \{P_i \times Q_j \,|\, i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, \ell\}$$

eine Partition von $A \times B$ mit $\delta(P \times Q) = \max\{\delta(P), \delta(Q)\}$ und es gilt

$$\underline{S}(f, P \times Q) \leq \underline{S}(F, P) \leq \overline{S}(F, P) \leq \overline{S}(f, P \times Q).$$

Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $j \in \{1, \dots, \ell\}$ ist die Menge $P_=i \times Q_j$ ein offener Quader in $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ mit Abschluss $\overline{P_i \times Q_j} = \overline{P}_i \times \overline{Q}_j$, maximaler Seitenlänge

$$\delta(P_i \times Q_j) = \max\{\delta(P_i), \delta(Q_j)\},$$

und n-dimensionalem Volumen

$$\mathrm{Vol}_n(P_i \times Q_j) = \mathrm{Vol}_p(P_i)\mathrm{Vol}_q(Q_j).$$

Hieraus folgt, dass die offenen Quader $P_i \times Q_j$ eine Partition $P \times Q$ von $A \times B$ bilden mit Feinheit $\delta(P \times Q) = \max\{\delta(P), \delta(Q)\}$. Ausserdem gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $x \in \overline{P}_i$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} F(x) &\leq \overline{S}(f_x, Q) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\sup_{y \in \overline{Q}_j} f(x, y) \Big) \mathrm{Vol}_q(Q_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\sup_{\overline{P_i \times Q_j}} f \Big) \mathrm{Vol}_q(Q_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Big(\sup_{\overline{P}_i} F \Big) \mathrm{Vol}_p(P_i) \leq \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\sup_{\overline{P_i \times Q_j}} f \Big) \mathrm{Vol}_n(P_i \times Q_j).$$

Bilden wir nun die Summe über alle i so ergibt sich

$$\overline{S}(F, P) \leq \overline{S}(f, P \times Q).$$

Ebenso zeigt man die Ungleichung

$$\underline{S}(F, P) \geq \underline{S}(f, P \times Q).$$

Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Partition $P \in \mathscr{P}(A)$ so dass*

$$c - \varepsilon < \underline{S}(F, P) \leq \overline{S}(F, P) < c + \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 1.20 existiert ein $\delta_0 > 0$ so dass jede Partition $R \in \mathscr{P}(A \times B)$ mit $\delta(R) < \delta_0$ die Ungleichung

$$c - \varepsilon < \underline{S}(f, R) \leq \overline{S}(f, R) < c + \varepsilon$$

erfüllt. Wähle eine Partition $P \in \mathscr{P}(A)$ mit Feinheit $\delta(P) < \delta_0$. Wähle ausserdem eine Partition $Q \in \mathscr{P}(B)$ mit Feinheit $\delta(Q) < \delta_0$. Nach Schritt 1 ist $P \times Q$ eine Partition von $A \times B$ mit Feinheit $\delta(P \times Q) < \delta_0$ und es gilt

$$c - \varepsilon < \underline{S}(f, P \times Q) \leq \underline{S}(F, P) \leq \overline{S}(F, P) \leq \overline{S}(f, P \times Q) < c + \varepsilon.$$

Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Es folgt aus Schritt 2 und Satz 1.20, dass $F : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_A F = c$ ist. Damit ist Satz 2.1 bewiesen. $\square$

Beispiel 2.2. Dieses Beispiel zeigt, dass aus der Integrierbarkeit von f in Satz 2.1 nicht die Integrierbarkeit von f_x für jedes $x \in A$ folgt. Sei

$$A = B = [0,1]$$

und sei $K \subset [0,1]$ die Kantormenge. Dann ist K eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}$ und $K \times [0,1]$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ (Übung). Definere $f : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in K,\ y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig auf $(A \times B) \setminus (K \times B)$ und ist daher nach Satz 1.19 Riemann inegrierbar. Jedoch ist $f_x : B \to \mathbb{R}$ nur für $x \in A \setminus K$ Riemann-integrierbar, nicht aber für $x \in K$.

Beispiel 2.3. Dieses Beispiel zeigt, dass aus der Integrierbarkeit von f_x für jedes $x \in A$ nicht die Integrierbarkeit von f folgt. Sei $A = B = [0,1]$ und definiere $f : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist $f_x : B \to \mathbb{R}$ für jedes $x \in [0,1]$ konstant und daher Riemann-integrierbar. Jedoch ist $\underline{S}(f,P) = 0$ und $\overline{S}(f,P) = 1$ für jede Partition P von $[0,1]^2$. Daher ist f nicht Riemann-integrierbar.

Beispiel 2.4. Seien $A \subset \mathbb{R}^p$ und $B \subset \mathbb{R}^q$ kompakte Mengen mit $\mathscr{P}(A) \neq \emptyset$ und $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$. Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Riemann integierbar. Definiere $h : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x,y) := f(x)g(y).$$

Dann ist $h : A \times B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (Übung). Ausserdem ist die Funktion $h_x := h(x,\cdot) = f(x)g$ für jedes $x \in A$ Riemann-integrierbar. Also folgt aus Satz 2.1 und Satz 1.22 (i), dass

$$\int_{A \times B} h = \left(\int_A f \right) \left(\int_B g \right).$$

Beispiel 2.5. Seien $n \geq 1$ und $m \geq 0$ ganze Zahlen. Definiere

$$f_{n,m} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$$

durch

$$f_{n,m}(x) := \begin{cases} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^m, & \text{falls } x_1 + \cdots + x_n \leq 1, \\ 0, & \text{falls } x_1 + \cdots + x_n > 1. \end{cases} \tag{27}$$

Dann ist $f_{n,m}$ Riemann-integrierbar und

$$\int_{[0,1]^n} f_{n,m} = \frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} = \frac{m!}{(m+n)!}. \tag{28}$$

Zunächst ist $f_{n,m}$ für $m \geq 1$ stetig, und $f_{n,0}$ ist stetig auf dem Komplement der Menge

$$A := \{x \in [0,1]^n \,|\, x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

Dies ist eine Jordansche Nullmenge (Übung). Also ist $f_{n,m}$ nach Satz 1.19 Riemann-integrierbar. Wir verifizieren (28) durch Induktion über n. Zunächst gilt

$$\int_0^1 f_{1,m}(x) = \int_0^1 (1-x)^m \, dx = \int_0^1 t^m \, dt = \frac{1}{m+1}.$$

Wir nehmen nun an, dass $n \geq 2$ und die Formel für $n-1$ bewiesen ist. Dann gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 2.1)

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^n} f_{n,m} &= \int_{[0,1]^{n-1}} \left(\int_0^1 f_{n,m}(x) \, dx_n \right) dx_1, \ldots, dx_{n-1} \\
&= \int_{[0,1]^{n-1}} \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^m dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^{m+1}}{m+1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \frac{1}{m+1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_{n-1,m+1}(x) \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Induktionsannahme.

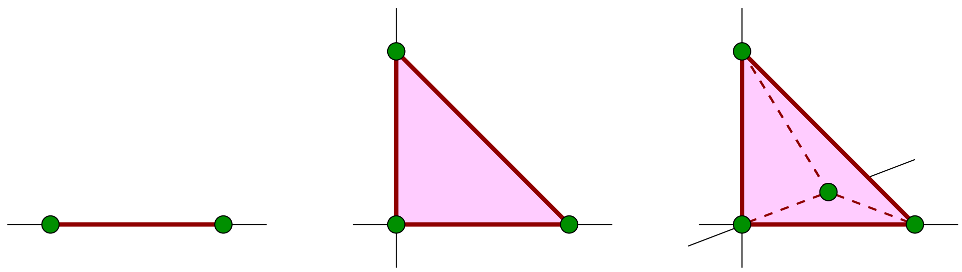

Abbildung 2: Der standard n-Simplex für $n = 1, 2, 3$

Für $m = 0$ kann man die Formel (28) wie folgt geometrisch interpretieren. Der **standard n-Simplex** ist die Menge

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}.$$

Die Funktion $f_{n,0} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ ist die **charakteristische Funktion** dieser Menge, das heisst

$$f_{n,0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \Delta^n, \\ 0, & \text{für } x \notin \Delta^n. \end{cases}$$

Wir könnten also das Integral

$$\int_{[0,1]^n} f_{n,0}(x) dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!}$$

auch interpretieren als das Integral der konstanten Funktion $f(x) = 1$ auf dem n-Simplex Δ^n und ihr Integral als das **Volumen des n-Simplex**. Dies könnte man in der Form

$$\mathrm{Vol}_n(\Delta^n) = \int_{\Delta^n} 1 dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!}$$

schreiben. Mit anderen Worten, der standard n-Simplex hat das Volumen $1/n!$. Jedoch ist hier darauf zu achten, dass wir bislang das Integral einer Funktion nur über Mengen definiert haben, die eine Partition besitzen. Die Menge Δ^n besitzt aber keine Partition. Es ist daher sinnvoll, den Integralbegriff etwas zu erweitern. Das soll im folgenden Abschnitt genauer ausgeführt werden.

2.2 Jordan-messbare Mengen

Definition 2.6. *Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst* **Jordan-messbar** *wenn ihr Rand ∂B eine Jordansche Nullmenge ist.*

Definition 2.7. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener achsenparalleler Quader, der B enthält. Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Die Zahl*

$$\int_B f := \int_Q 1_B(x) f(x)\, dx_1 \cdots dx_n \tag{29}$$

heisst **Integral von f über** B. *Hier bezeichnen wir mit*

$$1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad 1_B(x) := \begin{cases} 1, & \textit{für } x \in B, \\ 0, & \textit{für } x \notin B, \end{cases} \tag{30}$$

die **charakteristische Funktion von** B. *Die reelle Zahl*

$$\mu_n(B) := \mathrm{Vol}_n(B) := \int_B 1 = \int_Q 1_B(x)\, dx_1 \cdots dx_n \tag{31}$$

wird das **Jordanmass von** B *oder das* **Volumen von** B *genannt.*

Bemerkung 2.8. (i) Die Funktion $1_B : Q \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $Q \setminus \partial B$. Da ∂B eine Jordansche Nullmenge ist, ist 1_B nach Satz 1.19 Riemann-integrierbar. Nach Satz 1.22 ist das Produkt $1_B f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

(ii) Das Integral $\int_Q 1_B f$ in (29) ist unabhängig von der Wahl des abgeschlossenen achsenparallelen Quaders Q, der B enthält.

(iii) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge. Dann ist $\partial B = \overline{B}$ eine Jordansche Nullmenge (Lemma 1.14). Daher ist B Jordan-messbar und $\mu_n(B) = 0$.

Beispiel 2.9. (i) Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossene achsenparallele Quader, so ist ∂Q eine Jordansche Nullmenge nach Beispiel 1.15 (ii). Daher ist Q Jordan-messbar. Ausserdem stimmt in diesem Fall die Definition des Volumens in Definition 2.7 mit der in Beispiel 1.11 überein.

(ii) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$. Sei $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ eine Partition von B. Dann ist $\partial B \subset \bigcup_i \partial P_i$. Daher ist B Jordan-messbar und hat das Jordanmass $\mu_n(B) = \int_B 1 = \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(P_i)$. (Siehe Beispiel 1.11.)

(iii) Nach Beispiel 2.5 ist der standard n-Simplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und hat das Jordanmass $\mathrm{Vol}_n(\Delta^n) = \mu_n(\Delta^n) = 1/n!$.

(iv) Die Menge $B := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht Jordan-messbar, da $\partial B = [0,1]$ ist.

Lemma 2.10. *Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zwei Jordan-messbare Mengen, $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine abschlossener achsenparalleler Quader mit $A, B \subset Q$, und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt folgendes.*

(i) *Die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ sind Jordan-messbar.*

(ii) *Es gilt*

$$\int_{A\cup B} f + \int_{A\cap B} f = \int_A f + \int_B f \tag{32}$$

und

$$\mu_n(A \cup B) + \mu_n(A \cap B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) \tag{33}$$

(iii) *Ist $A \subset B$ so gilt $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.*

Beweis. Aussage (i) folgt aus der Tatsache, dass jede der Mengen $\partial(A \cup B)$, $\partial(A \cap B)$, $\partial(A \setminus B)$, $\partial(B \setminus A)$ in der Jordanschen Nullmenge $\partial A \cup \partial B$ enthalten, und damit selbst eine Jordansche Nullmenge ist. Aussage (ii) folgt aus Satz 1.22 (i) und der Tatsache, dass $1_{A\cup B} + 1_{A\cap B} = 1_A + 1_B$ ist. Aussage (iii) folgt aus Satz 1.22 (iii) und der Ungleichung $1_A \leq 1_B$ für $A \subset B$. Damit ist Lemma 2.10 bewiesen. □

Definition 2.11. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heisst* **Riemann-integriebar**, *wenn die erweiterte Funktion*

$$\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in B, \\ 0, & \text{für } x \notin B, \end{cases}$$

über jedem abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, der B enthält, Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heisst die Zahl

$$\int_B f := \int_Q \widetilde{f}(x)\, dx_1 \cdots dx_n$$

das **Integral von f über** *B. Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $f : B \to \mathbb{R}$ wird mit $\mathscr{R}(B)$ bezeichnet.*

Bemerkung 2.12. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge. Dann ist jede beschränkte stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dies folgt aus Satz 1.19 und der Tatsache, dass die erweiterte Funktion $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ in Definition 2.11 auf $Q \setminus \partial B$ stetig ist.

Mit dieser Definition haben wir das Riemannsche Integral auf Funktionen, die auf beliebigen Jordan-messbare Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind, erweitert. Insbesondere ist jede beschränkte stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ nach Satz 1.19 und Definition 2.11 Riemann-integrierbar. Ausserdem bleiben alle Aussagen von Satz 1.22 gültig für Jordan-messbare Mengen B. Darüber hinaus lässt sich der Satz von Fubini wie folgt verallgemeinern.

Korollar 2.13 (**Fubini**)**.** *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n := p + q$. Seien $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene achsenparallele Quader.*

(i) *Sei $B \subset P \times Q$ eine Jordan-messbare Menge, so dass, für jedes $x \in P$, die Menge*

$$B_x := \{y \in \mathbb{R}^q \,|\, (x, y) \in B\} \subset Q$$

Jordan-messbar ist. Dann ist die Funktion $P \to \mathbb{R} : x \mapsto \mu_q(B_x)$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\mu_n(B) = \int_P \mu_q(B_x)\, dx_1 \cdots dx_p.$$

(ii) *Sei $B \subset P \times Q$ wie in (i). Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, so dass die Funktion*

$$f_x : B_x \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := f(x, y),$$

für jedes $x \in P$ Riemann-integrierbar ist. Dann ist die Funktion $P \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{B_x} f_x$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_B f = \int_P \left(\int_{B_x} f_x \right) dx_1 \cdots dx_p.$$

Beweis. Wir beweisen (ii). Definiere $\widetilde{f} : P \times Q \to \mathbb{R}$ durch $\widetilde{f}(x, y) := f(x, y)$ für $(x, y) \in B$ und $\widetilde{f}(x, y) := 0$ für $(x, y) \in (P \times Q) \setminus B$. Für $x \in P$ definiere $\widetilde{f}_x : Q \to \mathbb{R}$ durch $\widetilde{f}_x(y) := f_x(y)$ für $y \in B_x$ und $\widetilde{f}_x(y) := 0$ für $y \in Q \setminus B_x$. Dann gilt $\widetilde{f}_x(y) = \widetilde{f}(x, y)$ für alle $x \in P$, $y \in Q$. Nach Voraussetzung und Definition 2.11 sind die Funktionen $\widetilde{f} : P \times Q \to \mathbb{R}$ und $\widetilde{f}_x : Q \to \mathbb{R}$ (für $x \in P$) Riemann integrierbar, und es gilt

$$\int_B f = \int_{P \times Q} \widetilde{f}, \qquad \int_{B_x} f_x = \int_Q \widetilde{f}_x.$$

Also folgt (ii) aus Satz 2.1. Aussage (i) folgt aus (ii) mit $f \equiv 1$. Damit ist Korollar 2.13 bewiesen. □

Beispiel 2.14. Dieses Beispiel zeigt, dass aus der Jordan-Messbarkeit von B in Korollar 2.13 (i) nicht die Jordan-Messbarkeit von B_x für jedes $x \in P$ folgt. Sei $P = Q = [0,1]$ und sei $K \subset [0,1]$ die Kantormenge. Definere $B \subset [0,1]^2$ durch $B := \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x \in K \implies y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $\partial B = K \times [0,1]$ und daher ist B Jordan-messbar (siehe Beispiel 2.2). Jedoch ist $B_x \subset [0,1]$ nur für $x \in [0,1] \setminus K$ Jordan-messbar, nicht aber für $x \in K$.

Beispiel 2.15. Dieses Beispiel zeigt, dass aus der Jordan-Messbarkeit von B_x für jedes $x \in P$ nicht die Jordan-Messbarkeit von B folgt. Sei $P = Q = [0,1]$ und $B := ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1]$. Dann ist B_x für jedes $x \in [0,1]$ entweder die leere Menge oder gleich $[0,1]$, und ist daher Jordan-messbar. Jedoch ist $\partial B = [0,1]^2$ und daher ist B nicht Jordan-messbar.

Beispiel 2.16. Die kompakte Menge $B := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le s \le t \le 1\}$ ist das oberhalb der Diagonalen gelegene Dreieck im Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$. Diese Menge ist Jordan-messbar und jede stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 1.19 Riemann-integrierbar. Nach Korollar 2.13 gilt

$$\int_B f = \int_0^1 \left(\int_0^t f(s,t)\, ds \right) dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 f(s,t)\, dt \right) ds$$

für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : B \to \mathbb{R}$.

Beispiel 2.17. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $h > 0$. Der **Zylinder über** B **mit Höhe** h ist die Menge $Z_B := B \times [0,h]$. Diese Menge ist Jordan-messbar und hat das Volumen $\mu_{n+1}(Z_B) = h\mu_n(B)$.

Beispiel 2.18. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $\lambda > 0$. Dann ist die Menge $\lambda B := \{\lambda x \,|\, x \in B\}$ Jordan-messbar und $\mu_n(\lambda B) = \lambda^n \mu_n(B)$. Die Jordan-Messbarkeit von λB folgt daraus, dass $\partial(\lambda B) = \lambda \partial B$ ist.

Beispiel 2.19. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $h > 0$. Der **Kegel über** B **mit Höhe** h ist die Menge

$$K_B := \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le h,\, x \in (1 - y/h)\, B\}.$$

Diese Menge ist Jordan-messbar. Das ist jedoch gar nicht so leicht zu beweisen und wir werden uns dieser Frage in Satz 2.25 zuwenden. Wenn man die Jordan-Messbarkeit des Kegels K_B akzeptiert, ergibt sich für das Volumen, nach Korollar 2.13 (i) und Beispiel 2.18, die Formel

$$\mathrm{Vol}_n(K_B) = \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^n \mu_n(B) = \frac{h}{n+1}\mu_n(B) = \frac{\mathrm{Vol}(Z_B)}{n+1}.$$

Charakterisierung Jordan-messbarer Mengen

Wie Beispiel 2.19 illustriert, ist es eine wichtige Frage, wie man Jordan-messbare Mengen erkennen kann. Mit dieser Frage beschäftigt sich dieser und der nächste Abschnitt. Eine kompakte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heisst **Quadergebäude** wenn sie entweder leer ist oder sich als Vereinigung endlich vieler achsenparalleler abgeschlossener Quader (mit positivem Volumen) schreiben lässt. Das heisst, eine nichtleere Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Quadergebäude, wenn $\mathscr{P}(B) \neq \emptyset$ ist.

Satz 2.20. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $b \geq 0$ eine reelle Zahl. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener achsenparallelen Quader, der B enthält. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *B ist Jordan-messbar und $\mu_n(B) = b$.*

(ii) *Die charakteristische Funktion $1_B : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und es gilt $\int_Q 1_B = b$.*

(iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$B_0 \subset B \subset B_1, \qquad b - \varepsilon < \mathrm{Vol}_n(B_0) \leq \mathrm{Vol}_n(B_1) < b + \varepsilon.$$

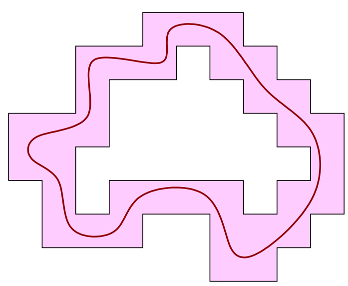

Abbildung 3: Jordan-messbare Mengen

Bemerkung 2.21. Die Quadergebäude B_0, B_1 in (iii) können so gewählt werden dass alle Ecken Vektoren der Form $x = (2^{-m}k_1, \ldots, 2^{-m}k_n)$ sind mit $m \in \mathbb{N}$ und $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.

Beweis von Satz 2.20. Die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii) folgt sofort aus Satz 1.19 und der Definition des Jordanschen Masses.

Wir beweisen (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener achsenparalleler Quader, der B enthält. Nach Voraussetzung ist die charakteristische

Funktion $1_B : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es ist $\int_Q 1_B = b$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 1.20 existiert eine Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$ so dass

$$b - \varepsilon < \underline{S}(1_B, P) \leq \overline{S}(1_B, P) < b + \varepsilon.$$

Definiere

$$J_0 := \left\{ j \in \{1, \dots, k\} \,|\, \overline{P}_j \subset B \right\}, \quad J_1 := \left\{ j \in \{1, \dots, k\} \,|\, \overline{P}_j \cap B \neq \emptyset \right\}.$$

(Man beachte, dass J_0 auch die leere Menge sein kann.) Dann sind die Mengen $B_0 := \bigcup_{j \in J_0} \overline{P}_j$ und $B_1 := \bigcup_{j \in J_1} \overline{P}_j$ Quadergebäude mit $B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$b - \varepsilon < \underline{S}(1_B, P) = \mathrm{Vol}_n(B_0) \leq \mathrm{Vol}_n(B_1) = \overline{S}(1_B, P) < b + \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass (iii) aus (ii) folgt.

Wir beweisen (iii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (iii) existieren zwei Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $B_0 \subset B \subset B_1$ und

$$b - \frac{\varepsilon}{4} < \mathrm{Vol}_n(B_0) \leq \mathrm{Vol}_n(B_1) < b + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Definiere

$$A := B_1 \setminus \mathring{B}_0 = \overline{B_1 \setminus B_0}.$$

Dann ist $\partial B \subset A$. Da B_0 ein Quadergebäude ist, stimmt der Rand des Inneren $\mathring{B}_0$ mit dem Rand von B_0 überein. Daher ist $\mathring{B}_0$ Jordan-messbar und es ist $\mu_n(\mathring{B}_0) = \mu_n(B_0) = \mathrm{Vol}_n(B_0)$. Nach Lemma 2.10 ist A eine Jordan-messbare Menge und es gilt

$$\int_{B_1} 1_A = \mu_n(A) = \mu_n(B_1) - \mu_n(B_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also existiert eine Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B_1)$ mit $\overline{S}(1_A, P) < \varepsilon/2$. Sei $J := \left\{ j \in \{1, \dots, k\} \,|\, \overline{P}_i \cap A \neq \emptyset \right\}$. Für $j \in J$ wähle einen offenen Quader $W_j \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{P_j} \subset W_j$ und $\mathrm{Vol}_n(W_j) < 2\mathrm{Vol}_n(P_j)$. Dann gilt $\partial B \subset \bigcup_{j \in J} W_j$ und

$$\sum_{j \in J} \mathrm{Vol}_n(W_j) < 2 \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}_n(P_j) = 2\overline{S}(1_A, P) < \varepsilon.$$

Daamit haben wir gezeigt, dass ∂B eine Jordansche Nullmenge ist. Also ist B Jordan-messbar. Die Gleichung $\mu_n(B) = b$ folgt nun unmittelbar aus (iii). Damit ist Satz 2.20 bewiesen. □

Korollar 2.22. *Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn sie Jordan-messbar ist und $\mu_n(B) = 0$ ist.*

Beweis. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge mit $\mu_n(B) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.20 existiert ein Quadergebäude $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $B \subset B_1$ und $\mathrm{Vol}_n(B_1) < \varepsilon/2$. Wähle eine Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathscr{P}(B_1)$. Dann gilt $B \subset B_1 = \bigcup_{i=1}^k \overline{P}_i$ und $\sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(P_i) = \mathrm{Vol}_n(B_1) < \varepsilon/2$. Wähle offene achsenparallelen Quader W_i mit $\overline{P}_i \subset W_i$ und $\mathrm{Vol}_n(W_i) \le 2\mathrm{Vol}_n(P_i)$. Dann gilt $B \subset \bigcup_i W_i$ und $\sum_i \mathrm{Vol}_n(W_i) < \varepsilon$. Also ist B eine Jordansche Nullmenge.

Ist B eine Jordansche Nullmenge, so ist nach Lemma 1.14 auch $\overline{B}$ eine Jordansche Nullmenge. Daraus folgt, dass $\partial B \subset \overline{B}$ eine Jordansche Nullmenge ist. Ausserdem folgt aus Satz 1.19 (ii), dass $\mu_n(B) = \int_Q 1_B = 0$ ist (für jeden abgeschlossenen Quader Q, der B enthält). Damit ist Korollar 2.22 bewiesen. □

Korollar 2.23. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann integrierbare Funktion, so dass $f(x) \ge 0$ ist für alle $x \in B$. Dann ist die Menge*

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, x \in B,\, 0 \le y \le f(x)\}$$

Jordan-messbar und hat das Jordanmass

$$\mu_{n+1}(C) = \int_B f.$$

Beweis. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener achsenparalleler Quader, der B enthält. Definiere $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ durch $\widetilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in B$ und $\widetilde{f}(x) := 0$ für $x \in Q \setminus B$. Dann ist $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und $c := \int_Q \widetilde{f} = \int_B f$. Nach Satz 1.20 existiert eine Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\} \in \mathscr{P}(Q)$ mit

$$c - \varepsilon < \underline{S}\big(\widetilde{f}, P\big) \le \overline{S}\big(\widetilde{f}, P\big) < c + \varepsilon/2.$$

Definiere

$$C_0 := \bigcup_{\inf_{\overline{P}_i} f > 0} \overline{P}_i \times \big[0, \inf_{\overline{P}_i} f\big], \qquad C_1 := \bigcup_{i=1}^k \overline{P}_i \times \big[0, \sup_{\overline{P}_i} f + \varepsilon/2\mathrm{Vol}_n(Q)\big].$$

Dann sind C_0 und C_1 zwei Quadergebäude in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $C_0 \subset C \subset C_1$ und

$$c - \varepsilon < \underline{S}\big(\widetilde{f}, P\big) = \mathrm{Vol}_{n+1}(C_0) \le \mathrm{Vol}_{n+1}(C_1) = \overline{S}\big(\widetilde{f}, P\big) + \varepsilon/2 < c + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt aus Satz 2.20, dass C Jordan-messbar und $\mu_{n+1}(C) = c$ ist. Damit ist Korollar 2.23 bewiesen. □

Korollar 2.24. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $n := p + q$. Seien $A \subset \mathbb{R}^p$ und $B \subset \mathbb{R}^q$ Jordan-messbar. Dann ist $A \times B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und es gilt*

$$\mu_n(A \times B) = \mu_p(A)\mu_q(B).$$

Beweis. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass das Produkt einer Jordanschen Nullmenge in $\mathbb{R}^p$ mit einer beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^q$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. In diesem Fall folgt die Behauptung aus Korollar 2.22. Wir dürfen also annehmen, dass weder A noch B eine Jordansche Nullmenge ist. Dann gilt

$$a := \mu_p(A) > 0, \qquad b := \mu_q(B) > 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\varepsilon < \min\{a, b, 1\}$ ist. Nach Satz 2.20 existieren Quadergebäude $A_0, A_1 \subset \mathbb{R}^p$ und $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^q$ mit

$$A_0 \subset A \subset A_1, \qquad B_0 \subset B \subset B_1$$

und

$$\begin{aligned} a - \frac{\varepsilon}{2b} &< \mathrm{Vol}_p(A_0) \leq \mathrm{Vol}_p(A_1) < a + \frac{\varepsilon}{2(b+1)}, \\ b - \frac{\varepsilon}{2a} &< \mathrm{Vol}_p(B_0) \leq \mathrm{Vol}_p(B_1) < b + \frac{\varepsilon}{2(a+1)}. \end{aligned}$$

Dann sind $A_0 \times B_0$ und $A_1 \times B_1$ Quadergebäude in $\mathbb{R}^n$ mit

$$A_0 \times B_0 \subset A \times B \subset A_1 \times B_1$$

und

$$\mu_n(A_0 \times B_0) = \mu_p(A_0)\mu_q(B_0) > \left(a - \frac{\varepsilon}{2b}\right)\left(b - \frac{\varepsilon}{2a}\right) > ab - \varepsilon.$$

und

$$\mu_n(A_1 \times B_1) = \mu_p(A_1)\mu_q(B_1) < \left(a + \frac{\varepsilon}{2(b+1)}\right)\left(b + \frac{\varepsilon}{2(a+1)}\right) \leq ab + \varepsilon.$$

Nach Satz 2.20 ist also $A \times B$ eine Jordan-messbare Menge mit Jordanmass $\mu_n(A \times B) = ab$. Damit ist Korollar 2.24 bewiesen. $\square$

2.3 Mehr über Jordansche Nullmengen

Satz 2.25. **(i)** *Sei $A \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ eine kompakte Menge und sei*

$$A^y := \{x \in \mathbb{R}^p \,|\, (x,y) \in A\}$$

eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^p$ für alle $y \in \mathbb{R}^q$. Dann ist A eine Jordansche Nullmenge.

(ii) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei $A \subset U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Dann ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Jordansche Nullmenge.*

(ii) *Ist $V \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, sei $B \subset V$ eine kompakte Teilmenge, und sei $g : V \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung mit $d < n$. Dann ist $g(B)$ eine Jordansche Nullmenge.*

Beweis. Wir beweisen (i). Seien $E \subset \mathbb{R}^p$ und $F \subset \mathbb{R}^q$ zwei achsenparallele abgeschlossene Quader so dass

$$A \subset \mathring{E} \times \mathring{F}$$

ist und sei $V := \mathrm{Vol}_q(F) > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und definiere

$$B := \{y \in F \,|\, A^y \neq \emptyset\}.$$

Dann ist B eine kompakte Teilmenge von $\mathring{F}$ und für jedes $y \in B$ existiert eine Partition

$$P(y) = \left\{P_1(y), \dots, P_{k(y)}(y)\right\} \in \mathscr{P}(E)$$

so dass

$$\sum_{i \in I(y)} \mathrm{Vol}_p(P_i(y)) < \frac{\varepsilon}{V}, \qquad I(y) := \left\{i \in \{1, \dots, k(y)\} \,\middle|\, \overline{P_i(y)} \cap A^y \neq \emptyset\right\}.$$

Für $y \in B$ definiere

$$J(y) := \{1, \dots, k(y)\} \setminus I(y) = \left\{i \in \{1, \dots, k(y)\} \,\middle|\, \overline{P_i(y)} \cap A^y = \emptyset\right\}$$

und

$$U(y) := \left\{y' \in \mathbb{R}^q \,\middle|\, A^{y'} \cap \overline{P_i(y)} = \emptyset \text{ für alle } i \in J(y)\right\}.$$

Dann ist $U(y)$ für jedes $y \in B$ eine offene Menge die y enthält. Daher existiert für jedes $y \in B$ ein $r(y) > 0$ mit $B_{2r(y)}(y) \subset U(y) \cap \mathring{F}$.

Mit dieser Konstruktion bilden die offenen Bälle $B_{r(y)}(y)$ mit $y \in B$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge B. Nach [3, Satz 3] existieren daher endlich viele Elemente $y_1, \ldots, y_N \in B$ mit

$$B \subset \bigcup_{\nu=1}^{N} B_{r(y_\nu)}(y_\nu).$$

Sei nun $Q = \{Q_1, \ldots, Q_\ell\} \in \mathscr{P}(F)$ eine Partition mit der Feinheit

$$\delta(Q) < \min_{\nu=1,\ldots,N} \frac{r(y_\nu)}{\sqrt{q}}.$$

Dann existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit $\overline{Q}_j \cap B \neq \emptyset$ ein $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\overline{Q}_j \subset U(y_\nu)$. (Ist nämlich $\eta \in \overline{Q}_j \cap B$, so existiert ein $\nu \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\eta \in B_{r(y_\nu)}(y_\nu)$ und es folgt daraus, dass $\overline{Q}_j \subset B_{r(y_\nu)}(\eta) \subset B_{2r(y_\nu)}(y_\nu) \subset U(y_\nu)$ ist.) Sei nun

$$J := \left\{ j \in \{1, \ldots, \ell\} \,\middle|\, \overline{Q}_j \cap B \neq \emptyset \right\}$$

unbd wähle eine Abbildung

$$J \to \{1, \ldots, N\} : j \mapsto \nu(j)$$

so dass $\overline{Q}_j \subset U(y_{\nu(j)})$ ist für alle $j \in J$. Dann gilt

$$A^y \subset \bigcup_{i \in I(y_{\nu(j)})} \overline{P_i(y_{\nu(j)})} \qquad \text{für alle } j \in J \text{ und alle } y \in \overline{Q}_j$$

und daher

$$A \subset \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I(y_{\nu(j)})} \overline{P_i(y_{\nu(j)})} \times \overline{Q}_j.$$

Also ist die Menge A in der Vereinigung endlich vieler abgeschlossen Quader enthalten mit dem Gesamtvolumen

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I(y_{\nu(j)})} \mathrm{Vol}_{p+q}\left(P_i(y_{\nu(j)}) \times Q_j\right) &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I(y_{\nu(j)})} \mathrm{Vol}_p\left(P_i(y_{\nu(j)})\right) \mathrm{Vol}_q\left(Q_j\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{V} \sum_{j \in J} \mathrm{Vol}_q\left(Q_j\right) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist A eine Jordansche Nullmenge.

Wir beweisen (ii). Da f lokal Lipschitz stetig is die Restriktion von f auf jede komakte Teilmenge von U Lipschitz-stetig. Also ist $f|_A : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, d.h. es existiert ein $c > 0$ so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x, y \in A \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(y)\| \le c\,\|x - y\|\,.$$

Hier verwenden wir die Euklidische Norm. Ein **abgeschlossener Würfel** in $\mathbb{R}^n$ ist ein eine Teilmenge der Form

$$Q = [a_1, a_1 + s] \times [a_2, a_2 + s] \times \cdots \times [a_n, a_n + s]$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $s > 0$. Die Zahl s heisst **Seitenlänge des Würfels** Q. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da A eine Jordansche Nullmenge ist, existieren endlich viele abgeschlossene Würfel $Q_1, \ldots, Q_\ell \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} Q_j, \qquad \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{Vol}_n(Q_j) \le \frac{\varepsilon}{(3c\sqrt{n})^n}.$$

Sei $s_j > 0$ die Seitenlänge des Würfels Q_j. Dann ist $\mathrm{Vol}_n(Q_j) = s_j^n$ und es gilt $\|x - y\| \le \sqrt{n} s_j$ für alle $x, y \in Q_j$. Daraus folgt

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\sqrt{n} s_j \qquad \text{für alle } x, y \in Q_j \cap A.$$

Daher existieren offene Würfel $W_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, \ell$, mit der Seitenlänge $t_j := 3c\sqrt{n} s_j$ so dass $f(Q_j \cap A) \subset W_j$ für alle j. Da $A \subset \bigcup_j Q_j$ ist, folgt daraus $f(A) \subset \bigcup_j W_j$ und

$$\sum_j \mathrm{Vol}_n(W_j) = \sum_j (3c\sqrt{n} s_j)^n = (3c\sqrt{n})^n \sum_j \mathrm{Vol}_n(Q_j) < \varepsilon.$$

Also ist $f(A)$ eine Jordansche Nullmenge und damit ist (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Sei $V \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, sei $B \subset V$ kompakt, und sei $g : V \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Definiere die Mengen $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$U := V \times \mathbb{R}^{n-d}, \qquad A := B \times \{0\}, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) := g(x_1, \ldots, x_d).$$

Dann ist U offen, $A \subset U$ ist eine kompakte Jordansche Nullmenge, und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist lokal Lipschitz-stetig. Also ist $g(B) = f(A)$ nach Teil (ii) eine Jordansche Nullmenge. Damit ist Satz 2.25 bewiesen. □

Beispiel 2.26. Die Voraussetzung, dass A kompakt ist, kann in Teil (i) von Satz 2.25 nicht weggelassen werden. Die Menge

$$A := \left\{(x,y) = 2^{-m}(k,\ell) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\, k,\ell \in \{1,3,\dots,2^m-1\}\right\}$$

erfüllt $\overline{A} = \partial A = [0,1]^2$ und ist daher keine Jordansche Nullmenge, obwohl $A^y \subset [0,1]$ eine endliche Menge ist für jedes $y \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.27. Die Voraussetzung, dass g lokal Lipschitz stetig ist, kann in Teil (iii) von Satz 2.25 nicht weggelassen werden. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit $g([0,1]) = [0,1]^2$ (*space filling curve*), dann ist $g([0,1])$ keine Jordansche Nullmenge.

Beispiel 2.28. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum mit $d = \dim E < n$ und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist jede kompakte Teilmenge des affinen Unterraumes $a + E$ eine Jordansche Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. **Beweis:** Sei $e_1, \dots, e_d$ eine Basis von E und definiere $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ durch $g(x_1, \dots, x_d) := a + \sum_{i=1}^d x_i e_i$. Diese Abbildung ist glatt und $g(\mathbb{R}^d) = a + E$. Da $B := g^{-1}(K)$ kompakt ist, ist $K = g(B)$ nach Teil (iii) von Satz 2.25 eine Jordansche Nullmenge.

Beispiel 2.29. Der standard n-Simplex $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0,\, \sum_i x_i \leq 1\}$ ist nach Beispiel 2.28 Jordan-messbar. (Siehe auch Beispiel 2.5.)

Beispiel 2.30. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, sei $h > 0$, und sei $K_B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq h,\, x \in (1 - \frac{y}{h})B\}$ der Kegel über B wie in Beispiel 2.19. Dann ist $\partial K_B = K_{\partial B} \cup (\overline{B} \times \{0\})$ nach Teil (i) von Satz 2.25 eine Jordansche Nullmenge. Also ist K_B Jordan-messbar.

Beispiel 2.31. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit der Dimension $d = \dim M < n$ und sei $A \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist A eine Jordansche Nullmenge. **Beweis:** Für jeden Punkt $x \in A$ existieren zwei offene Mengen $U_x, V_x \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $\phi_x : U_x \to V_x$, so dass $x \in U_x$ und $\phi_x(U_x \cap M) = V_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ ist. Wähle kompakte Umgebungen $K_x \subset U_x$ von x, eine für jedes $x \in A$. Für jedes $x \in A$ ist dann die Menge $L_x := \phi_x(K_x \cap M)$ kompakt und, nach Beispiel 2.28, eine Jordansche Nullmenge; daher ist auch $K_x \cap M = \phi_x^{-1}(L_x)$ eine Jordansche Nullmenge, nach Teil (iii) von Satz 2.25. Die Mengen $\mathring{K}_x$, $x \in A$, bilden eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, existieren nach [3, Satz 3] endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_\ell \in A$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^\ell \mathring{K}_{x_j}$. Also ist A die endliche Vereinigung der Jordanschen Nullmengen $K_{x_j} \cap A$, $j = 1, \dots, \ell$, und ist deshalb ebenfalls eine Jordansche Nullmenge.

Beispiel 2.32. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ auch die Menge

$$f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in K\}$$

kompakt ist. Äquivalent dazu ist die Bedingung, dass für jede Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\sup_\nu |f(x_\nu)| < \infty \quad \Longrightarrow \quad (x_\nu) \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge.} \tag{34}$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar und eigentlich. Sei $c > 0$ ein regulärer Wert von f. Dann ist die Menge

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$$

kompakt. Ihr Rand ist die Menge

$$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

Da c ein regulärer Wert von f ist, folgt aus einem Satz in Analysis II, Kapitel XI, dass ∂B eine C^1-Untermanngfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$ ist. Da f eigentlich ist, ist ∂B kompakt. Also ist ∂B nach Beispiel 2.31 eine Jordansche Nullmenge. Daher ist B Jordan-messbar.

Beispiel 2.33. Der Einheitsball

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

ist Jordan-messbar. Dies folgt aus Beispiel 2.32 mit $f(x) = \|x\|^2$ und $c = 1$.

3 Die Transformationsformel

3.1 Verallgemeinerte Riemannsche Summen

In diesem vorbereitenden Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff einer Partition, indem wir Quadergebäude, ebenso wie Quader, durch Jordan-messbare Mengen ersetzen. Wir zeigen dann, dass für Riemann-integrierbare Funktionen die entsprechenden verallgemeinerten Riemannschen Summen immer noch gegen das Integral konvergieren. Dieser verallgemeinerte Konvergenzsatz wird für den Beweis der Transformationsformel nützlich sein.

Definition 3.1. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge. Eine* **Jordan-Partition von** *B ist eine endliche Menge $Z = \{B_1, \dots, B_k\}$ von kompakten Jordan-messbaren Mengen $B_i \subset B$, so dass $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ ist und, für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$,*

$$i \neq j \qquad \Longrightarrow \qquad B_i \cap B_j \text{ ist eine Jordansche Nullmenge.}$$

Die Menge aller Jordan-Partitionen von B wird mit $\mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.2. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-messbare Menge und sei $f \in \mathscr{R}(B)$. Sei $Z = \{B_1, \dots, B_k\}$ eine Jordan-Partition von B. Dann gilt

$$\int_B f = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f, \qquad \mu_n(B) = \sum_{i=1}^k \mu_n(B_i).$$

Die erste Gleichung folgt aus Lemma 2.10 per vollständiger Induktion, und die zweite Gleichung folgt aus der ersten mit $f \equiv 1$.

Im folgenden bezeichnen wir mit $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definierte Abstandsfunktion. Der **Durchmesser einer Teilmenge** $B \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Metrik ist definiert durch

$$\delta(B) := \sup_{x,y \in B} d_\infty(x, y).$$

Der Durchmesser von B ist genau dann endlich wenn B beschränkt ist. Der **Abstand zweier nichtleerer Teilmengen** $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$d_\infty(A, B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d_\infty(x, y). \tag{35}$$

Es ist darauf zu achten, dass der Abstand $d_\infty(A, B)$ durchaus Null sein kann, ohne dass die Mengen A und B sich auch nur schneiden, geschweige denn übereinstimmen.

Definition 3.3. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge. Die* **Feinheit** *einer Jordan-Partition $Z = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ ist die Zahl*

$$\delta(Z) = \max_j \delta(B_j). \tag{36}$$

Dies ist der maximale Durchmesser der Mengen B_j bezüglich der Metric d_∞.

Lemma 3.4. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $\Gamma \subset B$ eine Jordansche Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine Zahl $\delta_0 > 0$, so dass für jede Jordan–Partition $Z = \{B_1, \ldots, B_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ gilt*

$$\delta(Z) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{d_\infty(B_i,\Gamma)\leq\delta_0} \mu_n(B_i) < \varepsilon.$$

Beweis. Wähle offene Quader $W_1, \ldots, W_N \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\overline{\Gamma} \subset \bigcup_{\nu=1}^N W_\nu, \qquad \sum_{\nu=1}^N \mu_n(W_\nu) < \varepsilon.$$

Man kann dann wie in Schritt 1 im Beweis von Lemma 1.18 zeigen, dass eine Zahl $\rho > 0$ existiert, so dass für jeden Punkt $x \in \overline{\Gamma}$, der Ball vom Radius ρ mit Mittelpunkt x bezüglich der Metrik d_∞ ganz in einer der Mengen $W_1, \ldots, W_N$ enthalten ist, d.h. $\exists\, \rho > 0\ \forall\, x \in \overline{\Gamma}\ \exists\, \nu \in \{1, \ldots, N\}\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x, \xi) < \rho \qquad \Longrightarrow \qquad \xi \in W_\nu. \tag{37}$$

Sei nun $Z = \{B_1, \ldots, B_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ mit $\delta(Z) < \rho/2$. Definiere

$$\begin{aligned} J_\Gamma &:= \left\{ j \in \{1, \ldots, k\} \,\middle|\, d_\infty(B_j, \overline{\Gamma}) \leq \rho/2 \right\}, \\ J_\nu &:= \{ j \in \{1, \ldots, k\} \,|\, B_j \subset W_\nu \}, \qquad \nu = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$J_\Gamma \subset \bigcup_{\nu=1}^N J_\nu. \tag{38}$$

Sei nämlich $j \in J_\Gamma$. Dann existieren zwei Elemente $x \in \overline{\Gamma}$ und $y \in B_j$, so dass $d_\infty(x, y) \leq \rho/2$ ist. (Hier verwenden wir die Tatsache, dass $\overline{\Gamma}$ und B_j kompakte Mengen sind.) Für dieses x existiert nun ein $\nu \in \{1, \ldots, N\}$, so dass (37) gilt. Daraus folgt $B_j \subset W_\nu$, denn für $\xi \in B_j$ gilt die Ungleichung $d_\infty(x, \xi) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, \xi) < \rho/2 + \delta(B_j) < \rho$ und daher ist $\xi \in W_\nu$. Daraus folgt $j \in J_\nu$. Damit ist (38) bewiesen. Aus (38) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J_\Gamma} \mu_n(B_j) &\leq \sum_{\nu=1}^N \sum_{j\in J_\nu} \mu_n(B_j) = \sum_{\nu=1}^N \mu_n\left(\bigcup_{j\in J_\nu} B_j \right) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^N \mu_n(W_\nu) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 3.4 bewiesen. □

Sei nun $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge und $Z = \{B_1, \dots, B_k\}$ eine Jordan-Partition von B. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Genau wie in Definition 1.8 definieren wir die **Obersumme** und die **Untersumme** von f und Z durch

$$\overline{S}(f, Z) := \sum_{j=1}^{k} \bigl(\sup_{B_j} f\bigr) \mu_n(B_j), \qquad \underline{S}(f, Z) := \sum_{j=1}^{k} \bigl(\inf_{B_j} f\bigr) \mu_n(B_j).$$

Ebenso wie in Lemma 1.9 beweist man die Ungleichung

$$\sup_{Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)} \underline{S}(f, Z) \le \inf_{Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)} \overline{S}(f, Z). \tag{39}$$

Der nächste Satz zeigt, dass eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn in (39) Gleichheit herrscht.

Satz 3.5. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar und $c = \int_B f$.*

(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$, so dass gilt*

$$c - \varepsilon < \underline{S}(f, Z) \le \overline{S}(f, Z) < c + \varepsilon.$$

(iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass für jedes $Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ gilt*

$$\delta(Z) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c - \varepsilon < \underline{S}(f, Z) \le \overline{S}(f, Z) < c + \varepsilon. \tag{40}$$

(iv) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta_0 > 0$ so dass für jede Jordan-Partition $P = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ und alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\begin{matrix} \delta(Z) < \delta_0 \\ x_i \in B_i \ \forall i \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \left| c - \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \mu_n(B_i) \right| < \varepsilon. \tag{41}$$

Die Zahlen $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \mu_n(B_i)$ heissen **Riemannsche Summen** *von f.*

Proof. Siehe Seite 48 $\square$

Zum Beweis von Satz 3.5 benötigen wir das folgende Lemma welches die Ober- und Untersummen von f und Z mit den Ober- und Untersummen aus Definition 1.8 vergleicht.

Lemma 3.6. *Seien B, f, c wie in Satz 1.20 und sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener achsenparalleler Quader, der B enthält. Definiere $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ durch*

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in B, \\ 0, & \text{für } x \notin B. \end{cases}$$

Sei $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Partition von Q und definiere Z_P und $\varepsilon_P > 0$ durch

$$Z_P := \{B_1, \ldots, B_k\}, \qquad B_i := \overline{P}_i \cap B,$$

und

$$\varepsilon_P := \sum_{\overline{P}_i \cap \partial B \neq \emptyset} \mathrm{Vol}_n(P_i).$$

Dann ist $Z_P \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ und es gilt

$$\left|\overline{S}(\widetilde{f}, P) - \overline{S}(f, Z)\right| \leq 2 \|f\| \varepsilon_P, \qquad \left|\underline{S}(\widetilde{f}, P) - \underline{S}(f, Z)\right| \leq 2 \|f\| \varepsilon_P. \quad (42)$$

Hier bezeichnet $\|f\| := \sup_B |f|$ die Supremumsnorm of f.

Beweis. Definiere die Indexmengen

$$I_0 := \left\{i \in \{1, \ldots, k\} \,\middle|\, \overline{P}_i \subset \mathring{B}\right\}, \qquad I_1 := \left\{i \in \{1, \ldots, k\} \,\middle|\, \overline{P}_i \cap \partial B \neq \emptyset\right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\widetilde{f}, P) &= \sum_{i=1}^{k} \big(\sup_{\overline{P}_i} \widetilde{f}\big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&= \sum_{i \in I_0} \big(\sup_{B_i} f\big) \mu_n(B_i) + \sum_{i \in I_1} \big(\sup_{\overline{P}_i} \widetilde{f}\big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \big(\sup_{B_i} f\big) \mu_n(B_i) - \sum_{i \in I_1} \big(\sup_{B_i} f\big) \mu_n(B_i) + \sum_{i \in I_1} \big(\sup_{\overline{P}_i} \widetilde{f}\big) \mathrm{Vol}_n(P_i) \\
&= \overline{S}(f, Z_P) - \sum_{i \in I_1} \big(\sup_{B_i} f\big) \mu_n(B_i) + \sum_{i \in I_1} \big(\sup_{\overline{P}_i} \widetilde{f}\big) \mathrm{Vol}_n(P_i).
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden sind im Betrag kleiner als $\varepsilon_P \|f\|$. Daraus folgt die erste Ungleichung in (42). Die zweite Ungleichung beweist man genauaso. Damit ist Lemma 3.6 bewiesen. $\square$

Beweis von Satz 3.5. Wir beweisen (i) $\Longrightarrow$ (ii). Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit and, dass f nicht identisch verschwindet. Seien Q und $\widetilde{f}$ wie in Lemma 3.6. Wähle eine Partition $P \in \mathscr{P}(Q)$, so dass

$$\varepsilon_P < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|}, \qquad c - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(\widetilde{f}, P) \leq \overline{S}(\widetilde{f}, P) < c + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Existenz einer solchen Partition folgt aus Lemma 1.18 und Satz 1.20. Nach Lemma 3.6 folgt daraus

$$\overline{S}(f, Z_P) \leq \overline{S}(\widetilde{f}, P) + 2\,\|f\|\,\varepsilon_P < c + \frac{\varepsilon}{2} + 2\,\|f\|\,\varepsilon_P < c + \varepsilon,$$

$$\underline{S}(f, Z_P) \geq \underline{S}(\widetilde{f}, P) - 2\,\|f\|\,\varepsilon_P > c - \frac{\varepsilon}{2} - 2\,\|f\|\,\varepsilon_P > c - \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass (ii) aus (i) folgt.

Wir beweisen (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (ii) existiert eine Jordan-Partition $Y = \{A_1, \ldots, A_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ mit

$$c - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, Y) \leq \overline{S}(f, Y) < c + \varepsilon/2.$$

Dann ist

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{k} \partial A_i$$

eine Jordansche Nullmenge. Also existiert nach Lemma 3.4 ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle $Z = \{B_1, \ldots, B_\ell\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ gilt

$$\delta(Z) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{d_\infty(B_j, \Gamma) \leq \delta_0} \mu_n(B_j) < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|}.$$

Behauptung. *Sei $Z = \{B_1, \ldots, B_\ell\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ mit $\delta(Z) < \delta_0$ und sei $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit $d_\infty(B_j, \Gamma) > \delta_0$. Dann existiert ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit*

$$B_j \subset A_i.$$

Da $B_j \subset B = \bigcup_i A_i$ ist, existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Sei $a \in A_i \cap B_j$. Dann ist $d_\infty(a, \partial A_i) > \delta_0$ und daher

$$B_j \subset \overline{B}_{\delta_0}(a; d_\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(a, x) \leq \delta_0\} \subset A_i.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun $Z = \{B_1, \dots, B_\ell\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ mit $\delta(Z) < \delta_0$. Definiere

$$J_0 := \{j \in \{1, \dots, \ell\} \,|\, d_\infty(B_j, \Gamma) \leq \delta_0\}\,,$$
$$J_1 := \{j \in \{1, \dots, \ell\} \,|\, d_\infty(B_j, \Gamma) > \delta_0\}\,.$$

Ausserdem sei

$$Y \wedge Z := \{A_i \cap B_j \,|\, i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, \ell\}\,.$$

Dann ist $Y \wedge Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ und

$$\begin{aligned}
c - \frac{\varepsilon}{2} &< \underline{S}(f, Y) \\
&\leq \underline{S}(f, Y \wedge Z) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \big(\inf_{A_i \cap B_j} f\big) \mu_n(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j \in J_0} \sum_{i=1}^{k} \big(\inf_{A_i \cap B_j} f\big) \mu_n(A_i \cap B_j) + \sum_{j \in J_1} \sum_{i=1}^{k} \big(\inf_{A_i \cap B_j} f\big) \mu_n(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j \in J_0} \sum_{i=1}^{k} \big(\inf_{A_i \cap B_j} f\big) \mu_n(A_i \cap B_j) + \sum_{j \in J_1} \big(\inf_{B_j} f\big) \mu_n(B_j) \\
&= \sum_{j \in J_0} \sum_{i=1}^{k} \big(\inf_{A_i \cap B_j} f\big) \mu_n(A_i \cap B_j) - \sum_{j \in J_0} \big(\inf_{B_j} f\big) \mu_n(B_j) + \underline{S}(f, Z) \\
&\leq 2\,\|f\| \sum_{j \in J_0} \mu_n(B_j) + \underline{S}(f, Z) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \underline{S}(f, Z).
\end{aligned}$$

Hier haben wir im fünften Schritt die Behauptung verwendet. Damit gilt

$$\underline{S}(f, Z) > c - \varepsilon$$

und ebenso

$$\overline{S}(f, Z) < c + \varepsilon$$

für jedes $Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ mit $\delta(Z) < \delta_0$. Damit haben wir gezeigt, dass (iii) aus (ii) folgt.

Wir beweisen (iii) $\Longrightarrow$ (i). Seien Z und $\widetilde{f}$ wie in Lemma 3.6. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f nicht identisch verschwindet. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (iii) existiert eine Konstante $\delta_0 > 0$ so dass für alle $Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ gilt

$$\delta(Z) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, Z) \leq \overline{S}(f, Z) < c + \varepsilon/2.$$

Nach Lemma 1.18 können wir δ_0 so klein wählen, dass für alle $P \in \mathscr{P}(Q)$ gilt

$$\delta(P) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_P < \frac{\varepsilon}{4\,\|f\|}.$$

Sei nun $P \in \mathscr{P}(Q)$ mit $\delta(P) < \delta_0$. Sei $Z_P \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ wie in Lemma 3.6. Dann gilt $\delta(Z_P) < \delta_0$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} c - \varepsilon &< c - \varepsilon/2 - 2\,\|f\|\,\varepsilon_P \\ &< \underline{S}(f, Z_P) - 2\,\|f\|\,\varepsilon_P \\ &\leq \underline{S}(\widetilde{f}, P) \\ &\leq \overline{S}(\widetilde{f}, P) \\ &\leq \overline{S}(f, Z_P) + 2\,\|f\|\,\varepsilon_P \\ &< c + \varepsilon/2 + 2\,\|f\|\,\varepsilon_P \\ &< c + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt aus Satz 1.20, dass $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_Q \widetilde{f} = c$ ist. Daraus folgt nach Definition, dass $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_B f = c$ ist.

Damit haben wir gezeigt, dass die Aussagen (i), (ii) und (iii) zueinander äquivalent sind. Die Äquivalenz der Aussagen (iii) und (iv) beweist man genau wie in Satz 1.20. Damit ist Satz 3.5 bewiesen. □

Übung 3.7. (i) Jede beschränkte zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Jordan-messbar.

(ii) Es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$, die nicht Jordan-messbar ist. **Hinweis:** Modifizieren Sie die Konstruktion der Kantormenge.

(ii) Es gibt eine kompakte zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die nicht Jordan-messbar ist.

3.2 Lineare Transformationen

Satz 3.8. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare und $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $\Phi B + v := \{\Phi x + v \mid x \in B\}$ Jordan-messbar und hat das Jordanmass*

$$\mu_n(\Phi B + v) = |\det(\Phi)|\, \mu_n(B).$$

Proof. Siehe Seite 52. □

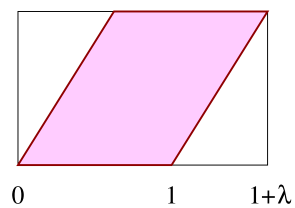

Abbildung 4: Die Scherung eines Quadrats

Beispiel 3.9. Sei $\lambda > 0$ und

$$B := [0,1]^2, \qquad \Phi := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A := \Phi B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\, \lambda y \le x \le \lambda y + 1\}$. (Siehe Abbildung 4.) Für $y \in [0,1]$ sei $A^y := \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\} = [\lambda y, \lambda y + 1]$. Dann ist A^y Jordan-messbar und $\mu_1(A^y) = 1$ für jedes $y \in [0,1]$. Ausserdem ist $\partial A = \Phi \partial B$ nach Satz 2.25 eine Jordansche Nullmenge und daher ist A Jordan-messbar. Also gilt nach Korollar 2.13

$$\mu_2(B\Phi) = \int_0^1 \mu_1(A^y)\, dy = 1 = |\det(\Phi)|\, \mu_2(B).$$

Beispiel 3.10. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Der Ellipsoid

$$E(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \le 1 \right\}$$

ist das Bild des Einheitsballes $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1\}$ unter der Diagonalmatrix $\Phi := \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Nach Satz 3.8 ist $E(a_1, \ldots, a_n)$ also Jordan-messbar und hat das Volumen

$$\mathrm{Vol}_n(E(a_1, \ldots, a_n)) = a_1 \cdots a_n \mathrm{Vol}_n(B).$$

Hier haben wir die Formel $\det(\Phi) = a_1 \cdots a_n$ verwendet. Wir werden später eine Formel für das Volumen des Einheitsballes $B \subset \mathbb{R}^n$ herleiten.

Beweis von Satz 3.8. Der Beweis hat sieben Schritte.

Schritt 1. *Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(\Phi) = 0$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Dann ist $\Phi B + v$ eine Jordansche Nullmenge.*

Die Bildmenge $E := \operatorname{im}\Phi = \{\Phi x \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$ von Φ ist eine linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $d := \dim E < n$ und $\Phi(B)$ ist eine beschänkte Teilmenge von E. Also ist $\Phi(B)$ nach Beispiel 2.28 eine Jordansche Nullmenge.

Schritt 2. *Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $\Phi B + v$ Jordan-messbar.*

Ist $\det(\Phi) = 0$, so folgt die Jordan-Messbarkeit von $\Phi B + v$ aus Schritt 1. Ist $\det(\Phi) \neq 0$ so ist die durch $\phi(x) := \Phi x + v$ definierte Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Daher ist der Rand der Menge $\Phi B + v = \phi(B)$ die Menge $\partial(\Phi B+v) = \phi(\partial B) = \Phi\partial B+v$. Nach Satz 2.25 ist dies eine Jordansche Nullmenge. Daher ist $\Phi B + v$ Jordan-messbar.

Schritt 3. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, und sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $s \geq 0$. Dann gilt $\mu_n(sB + v) = s^n\mu_n(B)$.*

Ist B ein offener oder abgeschlossener Quader, so folgt die Behauptung unmittelbar aus den Definitionen. Ist B ein Quadergebäude, wähle eine Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\} \in \mathscr{P}(B)$. Dann ist $\mu_n(B) = \sum_{i=1}^k \mu_n(P_i)$, nach Beispiel 2.9 (ii). Ausserdem ist

$$sP + v := \{sP_1 + v, \dots, sP_k + v\}$$

eine Partition von $sB + v$. Daraus folgt die Behauptung für Quadergebäude.

Sei nun $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Jordan-messbare Menge und $b := \mu_n(B)$. Ist $s = 0$ so ist $sB+v = \{v\}$ eine Jordansche Nullmenge und erfüllt daher die Behauptung von Schritt 3. Sei also $s > 0$ und wähle eine Konstante $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Satz 2.20 zwei Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$B_0 \subset B \subset B_1, \qquad b - \frac{\varepsilon}{s^n} < \mu_n(B_0) \leq \mu_n(B_1) < b + \frac{\varepsilon}{s^n}.$$

Daraus folgt $sB_0 + v \subset sB + v \subset sB_1 + v$und

$$s^n b - \varepsilon < \mu_n(sB_0 + v) \leq \mu_n(sB_1 + v) < s^n b + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung aus Satz 2.20.

Schritt 4. *Sei $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $W_0 := [0,1]^n$ der abgeschlossene Einheitswürfel. Definiere die Zahl $\lambda(\Phi) \geq 0$ durch*

$$\lambda(\Phi) := \mu_n(\Phi W_0).$$

Dann gilt

$$\mu_n(\Phi B + v) = \lambda(\Phi)\mu_n(B) \tag{43}$$

für jede Jordan-messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^n$.

Dass ΦB für jede Jordan-messbare Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $s > 0$ und

$$B := [a_1, a_1 + s] \times \cdots \times [a_n, a_n + s] = sW_0 + a.$$

Dann ist $\mu_n(B) = s^n$ und daher folgt aus Schritt 3, dass

$$\mu_n(\Phi B) = \mu_n(s\Phi W_0 + sa) = s^n \mu_n(\Phi W_0) = \lambda(\Phi)\mu_n(B).$$

Damit ist Schritt 4 für abgeschlossene Würfel bewiesen.

Sei nun $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Quadergebäude, das eine Partition $P = \{P_1, \dots, P_k\}$ besitzt, so dass $\overline{P}_i$ für jedes i ein abgeschlossener Würfel ist. Dann bilden die Mengen $\Phi\overline{P}_i + v$, $i = 1, \dots, k$, eine Jordan-Partition von $\Phi B + v$. Nach dem bisher bewiesenen und Bemerkung 3.2 gilt daher

$$\mu_n(\Phi B + v) = \sum_{i=1}^{k} \mu_n(\Phi\overline{P}_i + v) = \lambda(\Phi) \sum_{i=1}^{k} \mu_n(P_i) = \lambda(\Phi)\mu_n(B).$$

Damit ist Schritt 4 für jedes Quadergebäude, das eine Partition aus Würfeln besitzt, bewiesen.

Sei nun $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Jordan-messbare Menge und $b := \mu_n(B)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Satz 2.20 zwei Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$, so dass $B_0 \subset B \subset B_1$ ist und

$$b - \varepsilon \leq \mu_n(B_0) \leq \mu_n(B_1) \leq b + \varepsilon.$$

Nach Bemerkung 2.21 können B_0 und B_1 so gewählt werden, dass sie Partitionen aus Würfeln besitzen. Damit folgt aus dem bisher bewiesenen, dass

$$\lambda(\Phi)(b - \varepsilon) \leq \mu_n(\Phi B_0 + v) \leq \mu_n(\Phi B_1 + v) \leq \lambda(\Phi)(b + \varepsilon).$$

Daraus folgt $\lambda(\Phi)(b - \varepsilon) \leq \mu_n(\Phi B + v) \leq \lambda(\Phi)(b + \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ und daher $\mu_n(\Phi B + v) = \lambda(\Phi)b$. Damit ist Schritt 4 bewiesen.

Schritt 5. *Die in Schritt 4 definierte Funktion* $\lambda : \mathbb{R}^{n\times n} \to [0,\infty)$ *hat folgende Eigenschaften.*

(a) *Ist* $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $\det(\Phi) = 0$ *so gilt* $\lambda(\Phi) = 0$.

(b) *Für alle* $s \geq 0$ *gilt* $\lambda(s\mathbb{1}) = s^n$.

(c) *Für alle* $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt* $\lambda(\Phi\Psi) = \lambda(\Phi)\lambda(\Psi)$.

Ist $\det(\Phi) = 0$, so ist ΦW_0 nach Schritt 1 eine Jordansche Nullmenge. Also gilt nach Korollar 2.22

$$\lambda(\Phi) = \mu_n(\Phi W_0) = 0$$

Ist $s \geq 0$, so gilt nach Schritt 3

$$\lambda(s\mathbb{1}) = \mu_n(sW_0) = s^n.$$

Sind $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt nach Schritt 4

$$\lambda(\Phi\Psi) = \mu_n(\Phi\Psi W_0) = \lambda(\Phi)\mu_n(\Psi W_0) = \lambda(\Phi)\lambda(\Psi).$$

Damit ist Schritt 5 bewiesen.

Schritt 6. *Für jede Elementarmatrix* $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt* $\lambda(\Phi) = |\det(\Phi)|$.

Eine Elementarmatrix ist entweder eine Permutationsmatrix, oder eine Diagonalmatrix, oder eine Scherung. Eine Permutationsmatrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat Einträge Null und Eins, mit genau einer Eins in jeder Zeile und jeder Spalte. Eine solche Matrix repräsentiert eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form

$$\Phi x = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Permutation (also eine bijektive Abbildung) ist. Sie hat die Determinante $\det(\Phi) = \pm 1$ und bildet den Einheitswürfel W_0 bijektiv auf sich selbst ab. Daher gilt

$$\lambda(\Phi) = \mu_n(\Phi W_0) = \mu_n(W_0) = 1 = |\det(\Phi)|\,.$$

Ist $\Phi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, so gilt $\det(\Phi) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ und

$$\Phi W_0 = I_1 \times \cdots \times I_n, \qquad I_i := \begin{cases} [0, \lambda_i], & \text{falls } \lambda_i \geq 0, \\ [\lambda_i, 0], & \text{falls } \lambda_i < 0. \end{cases}$$

Das Intervall I_i hat also die Länge $|\lambda_i|$ und daraus folgt

$$\lambda(\Phi) = \mu_n(\Phi W_0) = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |\det(\Phi)|\,.$$

Eine Scherung ist eine Matrix der Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda > 0$. Diese Matrix hat Determinante Eins und das Bild des Einheitswürfels ist die Menge

$$\Phi W_0 = \{(x_1 + \lambda x_2, x_2, \ldots, x_n) \,|\, 0 \leq x_i \leq 1\} = P \times Q$$

mit

$$P := \{(x_1 + \lambda x_2, x_2) \,|\, 0 \leq x_i \leq 1\}, \qquad Q := [0,1]^{n-2}.$$

Nach Beispiel 3.9 gilt $\mu_2(P) = 1$. Also folgt aus Korollar 2.24 die Gleichung

$$\lambda(\Phi) = \mu_n(P \times Q) = \mu_2(P)\mu_{n-2}(Q) = 1 = |\det(\Phi)|.$$

Damit ist Schritt 6 bewiesen.

Schritt 7. *Für jede Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\lambda(\Phi) = |\det(\Phi)|$.*

Nach einem Satz aus der Linearen Algebra lässt sich jede Matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Produkt

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_\ell$$

von Elementarmatrizen schreiben. Da die Determinante eines Produktes quadratischer Matrizen gleich dem Produkt der Determinanten ist (ebenfalls nach einem Satz aus der Linearen Algebra), folgt aus Schritt 5 und Schritt 6 die Gleichung

$$\lambda(\Phi) = \prod_{i=1}^{\ell} \lambda(\Phi_i) = \prod_{i=1}^{\ell} |\det(\Phi_i)| = |\det(\Phi)|.$$

Damit ist Schritt 7 bewiesen. Die Behauptung von Satz 3.8 folgt aus Schritt 2, Schritt 4 und Schritt 7. □

3.3 Nichtlineare Transformationen

Es folgt der Hauptsatz diese Kapitels.

Satz 3.11 (**Transformationsformel**). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $A \subset U$ eine kompakte Jordan-messbare Menge und $N \subset A$ eine Jordansche Nullmenge. Wir setzen voraus, dass die Restriktion

$$\phi|_{A \setminus N} : A \setminus N \to \mathbb{R}^n$$

injektiv ist und die folgende Bedingung erfüllt

$$\det(d\phi(x)) \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in A \setminus N.$$

Dann ist die Menge $B := \phi(A) \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Ist $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, so ist auch $f \circ \phi : A \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und es gilt die Gleichung

$$\int_B f(y)\, dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(\phi(x))\, |\det(d\phi(x))|\; dx_1 \cdots dx_n. \tag{44}$$

Proof. Siehe Seite 59. □

Zum Beweis von Satz 3.11 benötigen wir die folgenden beiden Lemmas.

Lemma 3.12. *Seien $N \subset A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz 3.11. Dann ist $B := \phi(A)$ Jordan-messbar.*

Beweis. Wir beweisen, dass $\partial B \subset \phi(\partial A \cup N)$ ist. Zunächst ist B das stetige Bild einer komakten Menge und ist daher kompakt und damit auch abgeschlossen. Ausserdem folgt aus dem Satz über Inverse Funktionen in [4, Kapitel XI], dass $\phi(A \setminus (\partial A \cup N))$ eine offene Menge ist. Also folgt aus Proposition 1.2 (v), dass $\phi(A \setminus (\partial A \cup N)) \subset \mathring{B}$ ist. Daraus wiederum folgt

$$\partial B = \overline{B} \setminus \mathring{B} = B \setminus \mathring{B} \subset \phi(A) \setminus \phi(A \setminus (\partial A \cup N)) \subset \phi(\partial A \cup N).$$

Nach Satz 2.25 ist $\phi(\partial A \cup N)$ eine Jordansche Nullmenge. Daher ist ∂B ebenfalls eine Jordansche Nullmenge und damit ist Lemma 3.12 bewiesen. □

Lemma 3.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offenen Menge und $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass* $\det(d\phi(x)) \neq 0$ *is für alle $x \in K$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante* $\delta > 0$, *so dass folgendes gilt. Ist* $0 < s < \delta$ *und* $a \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$W := [a_1 - s, a_1 + s] \times \cdots \times [a_n - s, a_n + s] \subset K, \tag{45}$$

dann gilt

$$\Big| \mu_n(\phi(W)) - |\det(d\phi(a))| \, \mu_n(W) \Big| \leq \varepsilon \mu_n(W). \tag{46}$$

Beweis. Wir erinnern zunächst an die Definition der Normen

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \,, \qquad \|\Phi\|_\infty := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Phi x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \tag{47}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das ist die Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ in (45) der abgeschlossene Ball $W = \overline{B}_s(a; d_\infty)$ vom Radius s mit Mittelpunkt a bezüglich der Abstandsfunktion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty$. Nach Voraussetzung sind die Abbildungen

$$K \to \mathbb{R} : x \mapsto \left\| d\phi(x)^{-1} \right\|_\infty, \qquad K \to \mathbb{R} : x \mapsto |\det(d\phi(x))|$$

stetig. Da K kompakt ist, sind diese Funktionen beschränkt. Daher gibt es also eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\left\| d\phi(x)^{-1} \right\|_\infty \leq c, \qquad |\det(d\phi(x))| \leq c \qquad \text{für alle } x \in K. \tag{48}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\rho > 0$ so klein, dass

$$1 - \frac{\varepsilon}{c} < (1 - \rho)^n < (1 + \rho)^n < 1 + \frac{\varepsilon}{c}. \tag{49}$$

Wähle $\delta > 0$ so klein, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x, y \in K, \;\; \|x - y\|_\infty < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|d\phi(x) - d\phi(y)\| < \frac{\rho}{c}. \tag{50}$$

Eine solche Konstant existiert, da die Abbildung $d\phi : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ auf der kompakten Menge $K \subset U$ gleichmässig stetig ist. Wir beweisen, dass die Behauptung von Lemma 3.13 mit dieser Konstanten δ erfüllt ist.

Seien also $a \in \mathbb{R}^n$ und $0 < s < \delta$ gegeben, so dass

$$W := \overline{B}_s(a; d_\infty) \subset K$$

ist. Dann gilt $\|a - x\| < \delta$ für alle $x \in W$ und daraus folgt nach (50) mit $\Phi := d\phi(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Ungleichung

$$\|d\phi(x) - \Phi\| < \frac{\rho}{c} \leq \frac{\rho}{\|\Phi^{-1}\|_\infty} \qquad \text{für alle } x \in W.$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus (48) mit $x = a$. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\psi : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \psi(x) := \Phi^{-1}\phi(x).$$

Dann gilt $d\psi(x) = \Phi^{-1}d\phi(x)$ und

$$\|d\psi(x) - \mathbb{1}\|_\infty = \left\|\Phi^{-1}(d\phi(x) - \Phi)\right\|_\infty \leq \left\|\Phi^{-1}\right\|_\infty \|d\phi(x) - \Phi\|_\infty < \rho$$

für alle $x \in W$. Nach einem Lemma in [4, Kapitel XI] (das für den Beweis des Satzes über inverse Funktionen die zentrale Rolle spielt) folgt daraus

$$(1 - \rho)\Phi(W - a) \subset \phi(W) - \phi(a) \subset (1 + \rho)\Phi(W + a).$$

Nach Lemma 3.12 ist $\phi(W) - \phi(a)$ Jordan-messbar und nach Satz 3.8 gilt

$$\begin{aligned}(1 - \rho)^n |\det(\Phi)| \mu_n(W) &= \mu_n((1 - \rho)\Phi(W - a)) \\ &\leq \mu_n(\phi(W)) \\ &\leq \mu_n((1 + \rho)\Phi(W + a)) \\ &= (1 + \rho)^n |\det(\Phi)| \mu_n(W).\end{aligned}$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}&\Big|\mu_n(\phi(W)) - |\det(\Phi)| \mu_n(W)\Big| \\ &\leq \max\{1 - (1 - \rho)^n, (1 + \rho)^n - 1\} |\det(\Phi)| \mu_n(W) \\ &\leq \max\{1 - (1 - \rho)^n, (1 + \rho)^n - 1\} c\mu_n(W) \\ &\leq \varepsilon\mu_n(W).\end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus (48) und die dritte aus (49). Damit ist Lemma 3.13 bewiesen. □

Beweis von Satz 3.11. Der Beweis hat drei Schritte.

Schritt 1. *Ist $N = \emptyset$ und $A \subset U$ ein Quadergebäude, das eine Partition aus Würfeln besitzt, so gilt*

$$\mu_n(\phi(A)) = \int_A |\det(d\phi(x))| \, dx_1 \cdots dx_n. \tag{51}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $\delta > 0$ so, dass die Behauptung von Lemma 3.13 für $K = A$ gilt. Die Funktion $A \to \mathbb{R} : x \mapsto |\det(d\phi(x))|$ ist stetig und daher Riemann-integrierbar (siehe Bemerkung 2.12). Nach Satz 1.20 existiert also eine Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von A so dass $\overline{P}_i$ für jedes i ein abgeschlossener Würfel ist und die für alle $x_i \in \overline{P}_i$ die Ungleichung

$$\left| \int_A |d\phi(x)| \, dx_1 \cdots dx_n - \sum_{i=1}^k |d\phi(x_i)| \, \mu_n(P_i) \right| < \varepsilon \tag{52}$$

erfüllt. Darüber hinaus können wir P so wählen, dass $\delta(P) < \delta_0$ ist. Sei nun $x_i \in P_i$ der Mittelpunkt von P_i. Dann gilt nach Wahl von δ_0 die Ungleichung

$$\left| \mu_n(\phi(P_i)) - |\det(d\phi(x_i))| \, \mu_n(P_i) \right| < \varepsilon \mu_n(P_i), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{53}$$

Nun ist $\bigcup_i \partial P_i$ eine Jordansche Nullmenge. Nach Satz Satz 2.25 ist damit auch $\phi(\bigcup_i \partial P_i)$ eine Jordansche Nullmenge. Ausserdem is $\partial\phi(P_i) \subset \phi(\partial P_i)$ für alle i (siehe den Beweis von Lemma 3.12). Damit ist $\bigcup_i \partial\phi(P_i)$ eine Jordansche Nullmenge und daher gilt, nach Lemma 2.10, $\mu_n(\phi(A)) = \sum_{i=1}^k \mu_n(\phi(P_i))$. Kombinieren wir dies mit den Ungleichungen (52) und (53), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left| \mu_n(\phi(A)) - \int_A |\det(d\phi)| \right| &= \left| \sum_{i=1}^k \mu_n(\phi(P_i)) - \int_A |\det(d\phi)| \right| \\
&\le \sum_{i=1}^k \left| \mu_n(\phi(P_i)) - |\det(d\phi(x_i))| \, \mu_n(P_i) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{i=1}^k |\det(d\phi(x_i))| \, \mu_n(P_i) - \int_A |\det(d\phi)| \right| \\
&\le (\mu_n(A) + 1)\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt Schritt 1 aus Satz 2.20.

Schritt 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.11 gilt* (51).

Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$, dass

$$\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty \le c\,\|x - x'\|_\infty \qquad \text{für alle } x, x' \in A. \tag{54}$$

Eine solche Konstante $c > 0$ existiert nach dem Schrankensatz in [4, Kapitel X]. Wähle eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|\det(d\phi(x))| \le C \qquad \text{für alle } x \in A. \tag{55}$$

Wähle zwei Quadergebäude $A_0, A_1 \subset \mathbb{R}^n$, die Partitionen aus Würfeln besitzen und folgende Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} A_0 \subset A \setminus N, \qquad & \mu_n(A) - \varepsilon < \mu_n(A_0), \\ A \setminus A_0 \subset A_1, \qquad & \mu_n(A_1) < \mu_n(A \setminus A_0) + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{56}$$

Solche Quadergebäude existieren nach Satz 2.20.

Wähle eine Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von A_1, so dass $\overline{P}_i$ für jedes i ein abgeschlossener Würfel ist. Sei s_i die Seitenlänge von P_i. Dann gilt $\|x - x'\| \le s_i$ für alle $x, x' \in \overline{P}_i$. Daraus folgt nach (54) die Ungleichung

$$\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty \le cs_i \qquad \text{für alle } x, x' \in \overline{P}_i \cap A.$$

Daher existiert für jedes i ein abgeschlossener Würfel $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $2cs_i$, so dass $\phi(\overline{P}_i \cap A) \subset Q_i$ und $\mathrm{Vol}_n(Q_i) = (2cs_i)^n$ ist. Ausserdem gilt

$$\phi(A) \setminus \phi(A_0) \subset \phi(A \setminus A_0) \subset \phi\left(\bigcup_i (\overline{P}_i \cap A)\right) \subset \bigcup_i Q_i$$

und daher

$$\mu_n(\phi(A) \setminus \phi(A_0)) \le \sum_{i=1}^k \mu_n(Q_i) = (2c)^n \sum_{i=1}^k s_i^n = (2c)^n \mu_n(A_1) < 2(2c)^n \varepsilon.$$

Ausserdem gilt nach Schritt 1, sowie (55) und (56), dass

$$\mu_n(\phi(A_0)) = \int_{A_0} |\det(d\phi)|\,, \qquad \int_{A \setminus A_0} |\det(d\phi)| \le C\mu_n(A \setminus A_0) \le C\varepsilon$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left|\mu_n(\phi(A)) - \int_A |\det(d\phi)|\right| &\le \mu_n(\phi(A) \setminus \phi(A_0)) + \int_{A \setminus A_0} |\det(d\phi)| \\ &\le (2(2c)^n + C)\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt daraus die Behauptung von Schritt 2.

Schritt 3. *Wir beweisen Satz 3.11.*

Seien $N \subset A \subset U$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $f : B = \phi(A) \to \mathbb{R}$ wie in den Voraussetzungen von Satz 3.11. Die Supremumsnorm von f wird mit

$$\|f\| := \sup_{y \in B} |f(y)|$$

bezeichnet. Ausserdem verwenden wir die Notation (47).

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $A \subset U$ kompakt und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, ist die Restriktion $\phi|_A : A \to \mathbb{R}^n$ nach dem Schrankensatz in [4, Kapitel X] Lipschitz-stetig. Daher existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|\phi(x) - \phi(x')\|_\infty \le c \|x - x'\|_\infty \qquad \text{für alle } x, x' \in A. \tag{57}$$

Da $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, existiert nach Satz 3.5 eine Konstante $\delta_0 > 0$, so dass für jede Jordan-Partition $Z = \{B_1, \dots, B_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ und alle $y_1, \dots y_k \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{array}{l} \delta(Z) < c\delta_0, \\ y_i \in B_i \ \forall\, i \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_B f - \sum_{i=1}^k f(y_i)\mu_n(B_i) \right| < \frac{\varepsilon}{1 + \|f\| \, \mu_n(A)}. \tag{58}$$

Da die Funktion $A \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(d\phi(x))$ gleichmässig stetig ist können wir δ_0 so klein wählen, dass gilt

$$\begin{array}{l} x, x' \in A, \\ \|x - x'\|_\infty < \delta_0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad |\det(d\phi(x)) - \det(d\phi(x'))| < \frac{\varepsilon}{1 + \|f\| \, \mu_n(A)}. \tag{59}$$

Sei nun $Y = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(A)$ eine Jordan-Partition von A mit

$$\delta(Y) = \max_{i=1,\dots,k} \delta(A_i) < \delta_0.$$

Da $\phi|_{A \setminus N}$ injektiv ist, gilt $\phi(A_i) \cap \phi(A_j) \subset \phi((A_i \cap A_j) \cup N)$. Nach Satz 2.25 folgt daraus, dass $\phi(A_i) \cap \phi(A_j)$ für $i \ne j$ eine Jordansche Nullmenge ist. Damit ist die Menge

$$Z := \{B_1, \dots, B_k\}, \qquad B_i := \phi(A_i),$$

eine Jordan-Partition von $B = \phi(A)$. Ausserdem gilt $\|x - x'\|_\infty < \delta_0$ für alle i und alle $x, x' \in A_i$. Nach (57) folgt daraus $\|y - y'\|_\infty < c\delta_0$ für alle i und alle $y, y' \in B_i$. Das heisst, die Jordan-Partition $Z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Jord}}(B)$ erfüllt die

Ungleichung $\delta(Z) < c\delta_0$. Damit erfüllt Z die Voraussetzung von (58). Mit $x_i \in A_i$ und $y_i := \phi(x_i)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left|\int_B f - \sum_{i=1}^k f(\phi(x_i))\left|\det(d\phi(x_i))\right|\mu_n(A_i)\right| \\
&\le \left|\int_B f - \sum_{i=1}^k f(y_i)\mu_n(B_i)\right| \\
&\quad + \|f\| \sum_{i=1}^k \left|\mu_n(\phi(A_i)) - \left|\det(d\phi(x_i))\right|\mu_n(A_i)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{1+\|f\|\,\mu_n(A)} + \|f\| \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \left||d\phi(x)| - |d\phi(x_i))|\right| \, dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{1+\|f\|\,\mu_n(A)} + \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon\,\|f\|\,\mu_n(A_i)}{1+\|f\|\,\mu_n(A)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Ungleichung aus (58) und die dritte aus (59). Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt Gleichung (44) aus Satz 3.5. Damit ist Satz 3.11 bewiesen. □

Literatur

[1] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.

[2] Dietmar Salamon, *Das Riemannsche Integral*, Vorlesungsnotizen, Analysis I, ETH Zürich, November 2014. `http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana1-int.pdf`

[3] Dietmar Salamon, *Kompakte metrische Räume und der Satz von Arzéla–Ascoli*, Vorlesungsnotizen, Analysis I, ETH Zürich, November 2014.
`http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana1-cpct.pdf`

[4] Dietmar Salamon, Vorlesung, Analysis I, ETH Zürich, Herbstsemester 2014.
`http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/math/analysis1`
Videolink: `http://www.multimedia.ethz.ch/lectures/math/2014/autumn/401-1261-07L`