Analysis II (FS 2017): VEKTORFELDER UND FLÜSSE

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

12. April 2017

Zusammenfassung

Dieses Manuskript dient der Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Studierende des zweiten Semesters auf den Gebieten der Mathematik, Physik, und der Ingenieur-Wissenschaften an der ETH Zürich. Der erste Abschnitt und der Anhang wiederholen einige Inhalte, die am Ende des ersten Semesters behandelt wurden, welche die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines Anfangswertproblems betreffen. Der Abschnitt 2 führt den Fluss eines Vektorfeldes ein und zeigt, dass eine Lösung, die nur auf einem endlichen Zeitintervall existiert, jede kompakte Teilmenge des Definitionsgebietes des Vektorfeldes verlassen muss. Abschnitt 3 zeigt die stetige Abhängigkeit der Lösungen vom Anfangswert und Abschnitt 4 beweist die Differenzierbarkeit des Flusses.

Inhaltsverzeichnis

1 Existenz und Eindeutigkeit

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Diese Abbildung ist als **Vektorfeld** zu verstehen, das jedem Punkt $x \in U$ einen Geschwindigkeitsvektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Es soll darum gehen, die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

zu verstehen. Hier ist $x_0 \in U$ der **Anfangwert** und die Gleichungen in (1) werden **Anfangswertproblem** genannt. Eine **Lösung** des Anfangswertproblems (1) ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$x : I \to U,$$

definiert auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert x_0 annimmt und dessen Ableitung durch $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für $t \in I$ gegeben ist. Zunächst sei daran erinnert, was aus der Analysis I Vorlesung über lokal Lipschitz stetige Abbildungen und die Lösungen von (1) bekannt ist. Im folgenden bezeichnen wir stets mit

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

die Euklidische Norm eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition 1.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heisst* **lokal Lipschitz stetig** *wenn für jedes $x_0 \in U$ zwei reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ existieren, so dass*

$$B_\varepsilon(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x - x_0\| < \varepsilon \right\} \subset U$$

ist und alle $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$ die Ungleichung

$$\|f(x) - f(y)\| \le c \|x - y\|$$

erfüllen.

Lemma 1.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offenen Teilmenge, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung, und sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ so dass alle $x, y \in K$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x - y\|$ erfüllen.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existieren (nach dem abzählbaren Auswahlaxiom) zwei Folgen $x_i, y_i \in K$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|f(x_i) - f(y_i)\| > i\,\|x_i - y_i\| \tag{2}$$

erfüllt ist. Da K kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert mit

$$x_0 := \lim_{i\to\infty} x_i \in K.$$

Da die Funktion $K \to \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|$ stetig ist und K kompakt ist, existiert nach einem Satz aus Analysis I ein Element $\xi \in K$ so dass

$$C := \|f(\xi)\| \geq \|f(x)\| \qquad \text{für alle } x \in K. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt die Ungleichung

$$\|y_i - x_i\| \leq \frac{\|f(y_i) - f(x_i)\|}{i} \leq \frac{\|f(y_i)\| + \|f(x_i)\|}{i} \leq \frac{2C}{i}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Also gilt $\lim_{i\to\infty}(y_i - x_i) = 0$ und daher konvergiert die Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen x_0.

Da f lokal Lipschitz-stetig ist, existieren reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ und $c > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt:

$$\begin{matrix} \|x - x_0\| < \varepsilon, \\ \|y - x_0\| < \varepsilon \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{matrix} x, y \in U \text{ und} \\ \|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x - y\|. \end{matrix} \tag{4}$$

Da die Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beide gegen x_0 konvergieren, existiert eine natürliche Zahl $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq i_0$ die Ungleichungen

$$i \geq c, \qquad \|x_i - x_0\| < \varepsilon, \qquad \|y_i - x_0\| < \varepsilon$$

erfüllt. Für $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq i_0$ folgt daraus nach (2) die Ungleichung

$$\|f(x_i) - f(y_i)\| > i\,\|x_i - y_i\| \geq c\,\|x_i - y_i\|.$$

Diese steht im Widerspruch zu (4) und damit ist Lemma 1.2 bewiesen. □

Lemma 1.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $K \subset U$ eine kompakte Menge. Dann gilt folgendes.*
(i) *Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge*

$$K_\varepsilon := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{es gibt ein } x \in K \text{ so dass } \|x - y\| \leq \varepsilon \right\}$$

kompakt.
(ii) *Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon \subset U$.*

Beweis. Es gilt $\sup_{y \in K_\varepsilon} \|y\| = \sup_{x \in K} \|x\| + \varepsilon < \infty$ und daher ist K_ε beschränkt. Wir zeigen nun, dass K_ε auch abgeschlossen ist. Sei $y_i \in K_\varepsilon$ eine Folge, die gegen $y \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Dann gibt es eine Folge $x_i \in K$ so dass

$$\|x_i - y_i\| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Da K kompakt ist können wir durch Übergang zu einer Teilfolge ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Folge x_i gegen ein Element $x \in K$ konvergiert. Daraus folgt

$$\|x - y\| = \lim_{i \to \infty} \|x_i - y_i\| \leq \varepsilon.$$

Also ist $y \in K_\varepsilon$. Damit ist gezeigt, dass K_ε abgeschlossen und beschränkt ist. Nach dem Satz von Heine–Borel ist K_ε damit kompakt.

Wir beweisen Teil (ii) indirekt und nehmen an, dass $K_\varepsilon \not\subset U$ ist für jedes $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge

$$y_i \in \mathbb{R}^n \setminus U$$

so dass $y_i \in K_{1/i}$ ist für jedes $i \in \mathbb{N}$. Also existiert eine Folge $x_i \in K$ so dass

$$\|x_i - y_i\| \leq \frac{1}{i}$$

ist für jedes $i \in \mathbb{N}$. Da K kompakt ist, k—'onnen wir durch Übergang zu einer Teilfolge ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folge x_i gegen ein Element $x \in K$ konvergiert. Daraus folgt

$$x = \lim_{i \to \infty} x_i = \lim_{i \to \infty} y_i \notin U,$$

da $\mathbb{R}^n \setminus U$ abgeschlossen ist. Also ist $K \not\subset U$ im Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Damit ist Lemma 1.3 bewiesen. □

Der Schrankensatz für Funktionen mehrerer Variablen besagt, dass jede stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz stetig ist.

Der folgende Satz aus der Analysis I Vorlesung garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems (1) unter der Voraussetzung, dass das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig ist.

Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung, und sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge. Dann gilt folgendes.*

(i) *Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass das Anfangswertproblem (1) für jedes $x_0 \in K$ eine Lösung $x : I \to U$ besitzt.*

(ii) *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und sind $x, y : I \to U$ zwei Lösungen von (1) mit $x_0 \in U$, so gilt $x(t) = y(t)$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Siehe Seite 6. □

Seien f und x_0 wie in Satz 1.4, seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei offenen Intervalle mit $0 \in I \cap J$, und seien $x : I \to U$ und $y : J \to U$ zwei Lösungen von (1). Dann gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$ nach Teil (ii) von Satz 1.4. Daraus folgt, dass die Gleichung (1) auch eine Lösung auf dem Intervall $I \cup J$ besitzt, die durch $x(t)$ für $t \in I$ und durch $y(t)$ für $t \in J$ gegeben ist. Dies führt zu dem Konzept des *maximalen Existenzintervalls* in Definition 2.1.

Lemma 1.5. *Seien $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in U$ wie in Satz 1.4, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, und sei $x : I \to U$ eine stetige Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Abbildung $x : I \to U$ ist eine Lösung von (1)*

(ii) *Die Abbildung $x : I \to U$ erfüllt die Integralgleichung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds \qquad \text{für alle } t \in I. \tag{5}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung. □

Lemma 1.6. *Sei en $a < b$ reelle Zahlen und sei $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b y(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|y(t)\|\,dt \tag{6}$$

Hier bezeichnen wir mit $\|\eta\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}$ die Euklidische Norm eines Vektors $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Seien $y_1(t), \dots, y_n(t)$ die Koordinaten des Vektors $y(t) \in \mathbb{R}^n$ und sei

$$\eta_i := \int_a^b y_i(t)\, dt, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n) \ = \int_a^b y(t)\, dt$ und

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2 &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i \int_a^b y_i(t)\, dt \\ &= \int_1^b \langle \eta, y(t) \rangle \ dt \\ &\leq \int_a^b \|\eta\| \, \|y(t)\| \ dt \\ &= \|\eta\| \int_a^b \|y(t)\| \ dt. \end{aligned}$$

Hier folgt der vierte Schritt aus der Cauchy–Schwarz-Ungleichung für das standard innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^n$. Damit ist die gewünschte Ungleichung (6) bewiesen. □

Beweis von Satz 1.4. Da $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge ist, existiert nach Lemma 1.3 eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass

$$K_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{es gibt ein } x_0 \in K \text{ mit } \|x - x_0\| \leq \varepsilon \right\} \subset U. \tag{7}$$

Da K_ε nach Lemma 1.3 eine kompakte Teilmenge von U ist, existiert nach Lemma 1.2 eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\, \|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in K_\varepsilon. \tag{8}$$

Ausserdem ist die Funktion $K \to \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|$ stetig und daher nach einem Satz aus der Analysis I Vorlesung beschränkt. Definiere

$$M := \sup_{x \in K} \|f(x)\| + c\varepsilon \tag{9}$$

und wähle $\delta > 0$ so klein, dass

$$\delta M < \varepsilon, \qquad \delta c < 1. \tag{10}$$

Sei $x_0 \in K$ gegeben. Wir beweisen nun in fünf Schritten die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $x : [-\delta, \delta] \to U$ des Anfangswertproblems (1).

Schritt 1. *Sei* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\|x - x_0\| \le \varepsilon$*. Dann gilt*

$$x \in U, \qquad \|f(x)\| \le M.$$

Nach (7) gilt $x \in U$, und nach (8) und (9) gilt

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\le \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\| \\ &\le \|f(x_0)\| + c\,\|x - x_0\| \\ &\le \|f(x_0)\| + c\varepsilon \\ &= M. \end{aligned}$$

Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Sei* $x : [-\delta, \delta] \to U$ *eine Lösung von* (1)*. Dann gilt*

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$$

für alle $t \in [-\delta, \delta]$.

Wir beweisen Schritt 2 durch ein Widerspruchsargument und nehmen an, dass eine reelle Zahl $t \in [0, \delta]$ existiert mit $\|x(t) - x_0\| \ge \varepsilon$. Sei

$$\tau := \inf \{ t \in [0, \delta] \mid \|x(t) - x_0\| \ge \varepsilon \}.$$

Dann gilt $0 < \tau \le \delta$ und

$$\|x(t) - x_0\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \in [0, \tau), \tag{11}$$

$$\|x(\tau) - x_0\| = \varepsilon. \tag{12}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x(\tau) - x_0\| &= \left\| \int_0^\tau f(x(t))\,dt \right\| \\ &\le \int_0^\tau \|f(x(t))\|\,dt \\ &\le \tau M \\ &\le \delta M \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Hier folgt der erste Schritt aus Lemma 1.5, der zweite Schritt aus Lemma 1.6, der dritte Schritt aus (11) und Schritt 1, und der letzte Schritt folgt aus (10). Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (12) und damit ist gezeigt, dass $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ ist für alle $t \in [0, \delta]$. Das gleiche Argument kann für $t \in [-\delta, 0]$ verwendet werden und damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *Sei*

$$\mathscr{X} := \left\{ x : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x \textit{ ist stetig und} \\ \|x(t) - x_0\| \le \varepsilon \\ \textit{für alle } t \in [-\delta,\delta] \end{array} \right\} \tag{13}$$

und definiere $d : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \|x - y\|_\infty := \sup_{|t|\le\delta} \|x(t) - y(t)\| \tag{14}$$

für $x, y \in \mathscr{X}$. Dann ist $(\mathscr{X}, d)$ ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum.

Der Raum $\mathscr{X}$ ist nichtleer, da die konstante Funktion $x(t) = x_0$ ein Element von $\mathscr{X}$ ist. Dass die Abbildung $d : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ eine Abstandsfunktion ist, folgt direkt aus den Definitionen. Dass der metrische Raum $(\mathscr{X}, d)$ vollständig ist, folgt daraus, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert und dass der Grenzwert einer gleichmässig konvergenten Folge stetiger Funktionen, nach einem Satz aus der Analysis I Vorlesung, selbst wieder eine stetige Funktion ist. Damit ist Schritt 3 bewiesen.

Schritt 4. *Sei $\mathscr{X}$ durch Gleichung* (13) *in Schritt 3 gegeben und sei $x \in \mathscr{X}$. Definiere die Funktion $\mathscr{F}(x) : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}^n$ durch*

$$(\mathscr{F}(x))(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds \tag{15}$$

für $-\delta \le t \le \delta$. Dann gilt $\mathscr{F}(x) \in \mathscr{X}$.

Für $-\delta \le s \le \delta$ gilt $\|x(s) - x_0\| \le \varepsilon$ und daher $x(s) \in U$ und $\|f(x(s))\| \le M$ nach Schritt 1. Daraus folgt, dass die Funktion $\mathscr{F}(x) : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}^n$ in (15) wohldefiniert ist und für $0 \le t \le \delta$ der Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}(x))(t) - x_0\| &= \left\| \int_0^t f(x(s))\,ds \right\| \\
&\le \int_0^t \|f(x(s))\|\,ds \\
&\le tM \\
&\le \delta M \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

genügt. Hier folgt der zweite Schritt aus Lemma 1.6, und der letzte Schritt aus (10). Ebenso gilt $\|(\mathscr{F}(x))(t) - x_0\| < \varepsilon$ für $-\delta \le t \le 0$. Ausserdem ist die Funktion $\mathscr{F}(x) : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}^n$ stetig und daher gilt $\mathscr{F}(x) \in \mathscr{X}$. Damit ist Schritt 4 bewiesen.

Schritt 5. *Sei $(\mathscr{X}, d)$ der nichtleere vollständige metrische Raum in Schritt 3 und sei $\mathscr{F} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ die Abbildung in Schritt 4. Dann gilt*

$$\|\mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y)\|_\infty \le \delta c \|x - y\|_\infty$$

für alle $x, y \in \mathscr{X}$ und daher ist $\mathscr{F}$ eine Kontraktion.

Seien $x, y \in \mathscr{X}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|(\mathscr{F}(x))(t) - (\mathscr{F}(y))(t)\| &= \left\| \int_0^t \big(f(x(s)) - f(y(s))\big)\, ds \right\| \\
&\le \int_0^t \|f(x(s)) - f(y(s))\|\, ds \\
&\le \int_0^t c\, \|x(s) - y(s)\|\, ds \\
&\le tc \sup_{s \in [0,t]} \|x(s) - y(s)\| \\
&\le \delta c \|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

für $0 \le t \le \delta$. Genauso argumentiert man für $-\delta \le t \le 0$ und daraus folgt die Ungleichung $\|\mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y)\|_\infty \le \delta c \|x - y\|_\infty$. Da $\delta c < 1$ ist, folgt daraus, dass $\mathscr{F} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ eine Kontraktion ist. Damit ist Schritt 5 bewiesen.

Nach Schritt 5 und dem Banachschen Fixpunktsatz A.1 besitzt $\mathscr{F}$ einen eindeutigen Fixpunkt $x = \mathscr{F}(x) \in \mathscr{X}$. Dieser Fixpunkt ist nach (7) eine stetige Funktion $x : [-\delta, \delta] \to U$, welche Gleichung (5) für alle $t \in [-\delta, \delta]$ erfüllt. Also folgt aus Lemma 1.5, dass x eine Lösung von (1) ist. Umgekehrt folgt aus Schritt 2 und Lemma 1.5, dass jede Lösung $x : [-\delta, \delta] \to U$ von (1) ein Fixpunkt von $\mathscr{F}$ ist. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1) auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ für jeden Anfangswert $x_0 \in K$ bewiesen.

Nun sei $x_0 \in U$ gegeben, sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, und seien $x, y : I \to U$ zwei Lösungen von (1). Wir nehmen an, es gäbe ein $t \in I$ mit $x(t) \ne y(t)$. Dann gilt $t \ne 0$. Im Fall $t > 0$ definieren wir

$$t_0 := \sup \{ t \in I \,|\, t > 0 \text{ und } x(s) = y(s) \text{ für alle } s \in [0, 1] \}.$$

Dann gilt $t_0 \in I$ und $t_0 > 0$ und $x(s) = y(s)$ für $0 \le s \le t_0$. Nun folgt aber aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeit mit dem Anfangswert $x(t_0)$, angewendet aus die Lösungen $x(t - t_0)$ und $y(t - t_0)$, dass eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit $t_0 - \delta, t_0 + \delta \in I$ und $x(t_0 + t) = y(t_0 + t)$ für $-\delta \le t \le \delta$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_0. Ebenso erhält man einen Widerspruch im Fall $t < 0$ und damit ist Satz 1.4 bewiesen. □

In Satz 1.4 gilt die Existenzaussage in Teil (i) auch dann, wenn das Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ nur stetig, nicht aber Lipschitz-stetig ist. Allerdings erfordert diese allgemeinere Aussage einen anderen Beweis. Zudem kann bei der Eindeutigkeitsaussage in Teil (ii) auf die Lipschitz-Stetigkeit nicht verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.7. Sei $n = 1$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das stetige Vektorfeld

$$f(x) := \sqrt{|x|} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Dann sind die Funktionen

$$x(t) := 0, \qquad y(t) := \begin{cases} t^2/4, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems (1) mit $x_0 = 0$.

Beispiel 1.8. Für $n = 1$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x} := -x^2 \qquad x(0) = x_0. \tag{17}$$

Ist $x_0 = 0$ so ist $x(t) = 0$ die eindeutige Lösung von (17) und diese existiert auf ganz $\mathbb{R}$. Ist $x_0 \neq 0$ so ist jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von (17) überall ungleich Null, hat daher eine negative Ableitung, und ist daher nach dem Mittelwertsatz strikt monoton fallend. Daraus ergibt sich, dass die Funktion $I \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$ eine differenzierbare Umkehrfunktion $x \mapsto t(x)$ besitzt. Da $\dot{x}(t) = -x(t)^2$ ist für alle t, hat die Umkehrfunktion die Ableitung $dt/dx = -1/x^2$. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung gilt

$$t = t(x) - t(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}.$$

Daher ist die Lösung von (17) im Fall $x_0 > 0$ durch die Formel

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + tx_0}, \qquad -\frac{1}{x_0} < t < \infty \tag{18}$$

gegeben. Diese Lösung lässt sich auf kein grösseres Intervall fortsetzen.

Beispiel 1.9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0 \tag{19}$$

durch die Exponentialmatrix gegeben, das heisst

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

2 Der Fluss eines Vektorfeldes

Von nun an nehmen wir an, dass eine offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben sind.

Definition 2.1. *Sei $x_0 \in U$. Das* **maximale Existenzintervall von** x_0 *(für Gleichung (1)) ist die Menge*

$$I(x_0) := \bigcup \left\{ I \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} I \textit{ ist ein offenes Intervall mit } 0 \in I \\ \textit{und } (1) \textit{ besitzt eine Lösung } x : I \to U \end{array} \right\}. \tag{21}$$

Nach Satz 1.4 ist $I(x_0) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I(x_0)$, Gleichung (1) besitzt eine Lösung $x : I(x_0) \to U$, diese Lösung ist eindeutig, und es existiert keine Lösung von (1) auf einem echt grösseren Intervall.

Definition 2.2. *Sei*

$$\Omega := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times U \,|\, t \in I(x_0)\}. \tag{22}$$

Der **Fluss von** f *ist die Abbildung*

$$\varphi : \Omega \to U,$$

die jedem Paar $(t, x_0) \in \Omega$ die eindeutige Lösung von (1) zum Zeitpunkt t zuordnet, das heisst $\varphi(t, x_0) := x(t)$, wobei $x : I(x_0) \to U$ die eindeutige Lösung von (1) ist. Mit anderen Worten, $\varphi : \Omega \to U$ ist die eindeutige Abbildung die nach t partiell differenzierbar ist und die Gleichungen

$$\partial_t \varphi(t, x) = f(\varphi(t, x)), \qquad \varphi(0, x_0) = x_0 \tag{23}$$

für alle $(t, x) \in \Omega$ und alle $x_0 \in U$ erfüllt.

Beispiel 2.3. Sei $U = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere das lineare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x) := Ax$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und der Fluss $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f ist nach Beispiel 1.9 die Abbildung

$$\varphi(t, x) = e^{At}x.$$

Beispiel 2.4. Sei $n = 1$, $U = \mathbb{R}$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$f(x) := -x^2 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(Siehe Beispiel 1.8.) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$x(t) := \frac{x_0}{1 + tx_0}$$

die eindeutige Lösung von (1) auf dem Intervall

$$I(x_0) = \begin{cases} (-x_0^{-1}, \infty), & \text{für } x_0 > 0, \\ \mathbb{R}, & \text{für } x_0 = 0, \\ (-\infty, -x_0^{-1}), & \text{für } x_0 < 0. \end{cases}$$

Der Fluss von f ist daher durch die Gleichungen

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, tx > -1 \right\}, \qquad \varphi(t, x) = \frac{x}{1 + tx}$$

gegeben.

Lemma 2.5. *Sei $x_0 \in U$ und $t_0 \in I(x_0)$. Dann gilt*

$$I(\varphi(t_0, x_0)) = I(x_0) - t_0 \tag{24}$$

und

$$\varphi(s, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(t_0 + s, x_0) \tag{25}$$

für alle $s \in I(\varphi(t_0, x_0))$.

Beweis. Sei

$$y_0 := \varphi(t_0, x_0)$$

und

$$J := I(x_0) - t_0 = \{t - t_0 \,|\, t \in I(x_0)\} = \{s \in \mathbb{R} \,|\, t_0 + s \in I(x_0)\}.$$

Dann ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $0 \in J$. Definiere $y : J \to \mathbb{R}$ durch

$$y(s) := \varphi(t_0 + s, x_0) \qquad \text{für } s \in J.$$

Dann ist y stetig differenzierbar und es gilt $\dot{y}(s) = f(y(s))$ für alle $s \in J$ und $y(0) = y_0$. Also ist $J \subset I(y_0)$ und $y(s) = \varphi(s, y_0)$ für alle $s \in J$. Damit haben wir die Inklusion

$$I(x_0) - t_0 \subset I(\varphi(t_0, x_0))$$

und die Gleichung (25) für alle $s \in I(x_0) - t_0$ bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, dass die umgekehrte Inklusion gilt, das heisst

$$I(\varphi(t_0, x_0)) \subset I(x_0) - t_0.$$

Dazu bemerken wir, dass nach dem bisher gezeigten folgendes gilt:

$$-t_0 \in I(x_0) - t_0 \subset I(y_0), \qquad \varphi(-t_0, y_0) = \varphi(0, x_0) = x_0.$$

Daher ergibt sich aus dem ersten Teil des Beweises, mit (t_0, x_0) durch $(-t_0, y_0)$ ersetzt, die Inklusion $I(y_0) - (-t_0) \subset I(\varphi(-t_0, y_0))$. Das heisst

$$I(\varphi(t_0, x_0)) + t_0 \subset I(x_0)$$

und daher $I(\varphi(t_0, x_0)) \subset I(x_0) - t_0$. Damit ist Lemma 2.5 bewiesen. □

Satz 2.6. *Sei $x_0 \in U$ so dass*

$$I(x_0) \cap [0, \infty) = [0, b), \qquad 0 < b < \infty.$$

Dann existiert für jede kompakte Menge $K \subset U$ eine reelle Zahl

$$0 \leq t_K < b,$$

so dass die Lösung des Anfangswertproblems (1) *in dem Zeitintervall von t_K bis b ausserhalb der Menge K liegt, das heisst, für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$t_K < t < b \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(t, x_0) \notin K. \tag{26}$$

Beweis. Nach Satz 1.4 existiert eine Zahl $\delta > 0$ so dass

$$(-\delta, \delta) \subset I(x) \qquad \text{für alle } x \in K.$$

Hier können wir $\delta > 0$ so klein wählen, dass $\delta \leq b$ ist. Dann erfüllt die Zahl

$$t_K := b - \delta$$

die Bedingung (26). Ist nämlich t eine reelle Zahl mit

$$b - \delta < t < b$$

so gilt nach Lemma 2.5

$$I(\varphi(t, x_0)) = I(x_0) - t.$$

Daraus folgt

$$I(\varphi(t, x_0)) \cap [0, \infty) = [0, b - t).$$

Da $b - t < \delta$ ist, gilt $(-\delta, \delta) \not\subset I(\varphi(t, x_0))$ und daher kann $\varphi(t, x_0)$ kein Element von K sein. Damit ist Satz 2.6 bewiesen. □

3 Stetigkeit des Flusses

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass der Fluss eines lokal Lipschitz-stetigen Vektorfeldes selbst ebenfalls eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung ist.

Satz 3.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld, und sei $\varphi : \Omega \to U$ der Fluss von f. Dann ist φ lokal Lipschitz-stetig.*

Beweis. Siehe Seite 15. □

Der Beweis erfordert zwei Lemmas zur Vorbereitung.

Lemma 3.2 (Gronwall). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$, seien $A, B \geq 0$, und sei $g : I \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion, so das*

$$g(t) \leq A + B\left|\int_0^t g(s)\,ds\right| \qquad \text{für alle } t \in I. \tag{27}$$

Dann gilt

$$g(t) \leq Ae^{B|t|} \qquad \text{für alle } t \in I. \tag{28}$$

Beweis. Definiere die Funktion $G : I \cap [0, \infty) \to [0, \infty)$ durch

$$G(t) := A + B\int_0^t g(s)\,ds \qquad \text{für } t \in I \text{ mit } t \geq 0.$$

Sie erfüllt die Ungleichung

$$g(t) \leq G(t)$$

und daher

$$\dot{G}(t) = Bg(t) \leq BG(t)$$

für alle $t \in I$ mit $t \geq 0$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-Bt}G(t)\big) = e^{-Bt}\big(\dot{G}(t) - BG(t)\big) \leq 0$$

und daher

$$e^{-Bt}G(t) \leq G(0) = A$$

für alle $t \in I$ mit $t \geq 0$. Also gilt

$$g(t) \leq G(t) \leq Ae^{Bt}$$

für alle $t \in I$ mit $t \geq 0$. Im Fall $t \leq 0$ ergibt sich die gewünschte Ungleichung indem man die Funktion g durch die Funktion $t \mapsto g(-t)$ ersetzt. Damit ist Lemma 3.2 bewiesen. □

Beweis von Satz 3.1. Der Beweis hat drei Schritte. Der erste Schritt verwendet die Notation von Lemma 1.3. Er folgt zwar auch aus Satz 1.4, aber wir erbringen hier dennoch einen davon unabhängigen Beweis dieser Aussagen.

Schritt 1. *Sei $K \subset U$ kompakt und sei $\varepsilon > 0$ so dass $K_\varepsilon \subset U$ ist. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $[-\delta.\delta] \times K \subset \Omega$ und $\varphi([-\delta, \delta] \times K) \subset K_\varepsilon$.*

Nach Lemma 1.3 ist K_ε kompakt und daher ist $K_\varepsilon \to \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|$ eine beschränkte Funktion. Wir beweisen die Aussagen von Schritt 1 mit

$$\delta := \frac{\varepsilon}{M}, \qquad M := \sup_{x \in K_\varepsilon} \|f(x)\|. \tag{29}$$

Sei also $x_0 \in K$. Der Beweis, dass $[0, \delta] \subset I(x_0)$ ist wird indirekt erbracht. Nehmen wir also an dass $[0, \delta] \not\subset I(x_0)$ ist. Dann gilt

$$I(x_0) \cap [0, \infty) = [0, \rho), \qquad 0 < \rho \le \delta.$$

Sei $x : [0, \rho) \to U$ die eindeutige Lösung von (1) auf dem Intervall $[0, \rho)$, das heisst $x(t) := \varphi(t, x_0)$ für $0 \le t < \rho$. Nach Satz 2.6 existiert eine Zahl $t_1 \in (0, \rho)$ mit $x(t_1) \notin K_\varepsilon$. Daher ist

$$T := \sup\left\{t \in [0, \rho) \,\middle|\, x(s) \in K_\varepsilon \text{ für alle } s \in [0, t]\right\} < \rho \le \delta. \tag{30}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x(T) - x_0\| &= \left\| \int_0^T f(x(t))\, dt \right\| \\
&\le \int_0^T \|f(x(t))\|\, dt \\
&\le TM \\
&< \delta M \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $\|x(T) - x_0\| < \varepsilon$ und daher existiert eine Zahl $T < T' < \rho$ so dass die Ungleichung $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, T']$ gilt. Dies steht im Widerspruch zur Definition von T. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme $[0, \delta] \not\subset I(x_0)$ falsch gewesen sein muss. Also gilt $[0, \delta] \subset I(x_0)$ wie behauptet. Genauso zeigt man, dass $x(t) \in K_\varepsilon$ ist für alle $t \in [0, \delta]$. Andernfalls wäre die Zahl T in (30) wieder kleiner als δ und mit derselben Ungleichung ergibt sich daraus ein Widerspruch. Die entsprechenden Aussagen für das Intervall $[-\delta, 0]$ folgen dann, indem man f durch $-f$, $I(x_0)$ durch $-I(x_0)$, und $\varphi(t, x_0)$ durch $\varphi(-t, x_0)$ ersetzt. Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2. *Seien K, ε, δ wie in Schritt 1. Dann ist φ Lipschitz-stetig auf der Menge $[-\delta, \delta] \times K \subset \Omega$.*

Da f lokal Lipschitz-stetig ist, und $K_\varepsilon \subset U$ kompakt ist, existiert nach Lemma 1.2 eine Konstante $c \geq 0$ so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in K_\varepsilon.$$

Asserdem sei die Konstante $M \geq 0$ wie in (29) gewählt. Seien $x_0, y_0 \in K$ und definiere die Abbildungen $x, y : [-\delta, \delta] \to U$ durch

$$x(t) := \varphi(t, x_0), \qquad y(t) := \varphi(t, y_0) \qquad \text{für } t \in [-\delta, \delta].$$

Dann gilt $x(t), y(t) \in K_\varepsilon$ für alle $t \in [-\delta, \delta]$ nach Schritt 1 und daher

$$\|x(s) - x(t)\| = \left\| \int_s^t f(x(r))\, dr \right\| \leq \int_s^t \|f(x(r))\|\, dr \leq M|s - t|$$

für alle $s, t \in [-\delta, \delta]$ mt $s < t$. Ausserdem gilt für alle $t \in [-\delta, \delta]$

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= \left\| x_0 - y_0 + \int_0^t \big(f(x(s)) - f(y(s))\big)\, ds \right\| \\
&= \|x_0 - y_0\| + \left\| \int_0^t \big(f(x(s)) - f(y(s))\big)\, ds \right\| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + \left| \int_0^t \|f(x(s)) - f(y(s))\|\, ds \right| \\
&\leq \|x_0 - y_0\| + c \left| \int_0^t \|x(s) - y(s)\|\, ds \right|
\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gronwall (Lemma 3.2) folgt daraus die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &\leq e^{c|t|} \|x_0 - y_0\| \\
&\leq e^{c\delta} \|x_0 - y_0\|
\end{aligned}$$

für alle $t \in [-\delta, \delta]$. Daraus wiederum folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\varphi(s, x_0) - \varphi(t, y_0)\| &\leq \|x(s) - x(t)\| + \|x(t) - y(t)\| \\
&\leq M\,|s - t| + e^{c\delta} \|x_0 - y_0\|
\end{aligned}$$

für alle $x_0, y_0 \in K$ und alle $s, t \in [-\delta, \delta]$. Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3. *Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$ ist offen und die Abbilldung $\varphi : \Omega \to U$ ist lokal Lipschitz-stetig.*

Sei $(t_0, x_0) \in \Omega$ mit $t_0 \geq 0$ und definiere

$$\Gamma := \left\{ \varphi(t, x_0) \,\middle|\, 0 \leq t \leq t_0 \right\}.$$

Dies ist eine kompakte Teilmenge von U. Daher existiert nach Lemma 1.3 eine Konstante $\varepsilon > 0$ so dass

$$K := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{es gibt ein } x \in \Gamma \text{ so dass } \|x - y\| \leq \varepsilon \right\} \subset U.$$

Ausserdem ist die Menge K kompakt, nach Lemma 1.3, und die Menge

$$V := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{es gibt ein } x \in \Gamma \text{ so dass } \|x - y\| < \varepsilon \right\} = \bigcup_{x \in \Gamma} B_\varepsilon(x)$$

ist offen. Nach Schritt 1 und Schritt 2 existiert eine Konstante $\delta > 0$ so dass $[-\delta, \delta] \times K \subset \Omega$ und φ auf $[-\delta, \delta] \times K$ Lipschitz-stetig ist. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so gross, dass

$$\tau := \frac{t_0}{N} < \delta.$$

Dann ist $[0, \tau] \times V \subset \Omega$ und wir definieren die Abbildung $\varphi_\tau : V \to U$ durch

$$\varphi_\tau(y) := \varphi(\tau, y) \qquad \text{für } y \in V.$$

Diese Abbildung ist stetig nach Schritt 2. Wir definieren nun eine endiche Folge offener Mengen $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_N$ durch

$$\begin{aligned}
V_0 &:= V, \\
V_1 &:= \varphi_\tau^{-1}(V_0) = \{ y \in V \mid \varphi_\tau(y) \in V \} \\
V_2 &:= \varphi_\tau^{-1}(V_1) = \{ y \in V \mid \varphi_\tau(y) \in V,\ \varphi_\tau(\varphi_\tau(y)) \} \\
&\ \ \vdots \\
V_N &:= \varphi_\tau^{-1}(V_{N-1}) = \left\{ y \in V \mid \varphi_\tau^k(y) \in V \text{ für } k = 1, \ldots, N \right\}.
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir mit $\varphi_\tau^k := \varphi_\tau \circ \cdots \circ \varphi_\tau$ die k-fache Komposition der Abbildung $\varphi_\tau : V \to U$ mit sich selbst. Ihr Definitionsgebiet ist genau die Menge V_{k-1}. Die Mengen $V_k \subset U$ sind offen, da $\varphi_\tau : V \to U$ stetig ist. Ausserdem folgt aus Lemma 2.5, dass $\varphi_\tau^k(x_0) = \varphi(k\tau, x_0) \in \Gamma \subset V$ ist für $k = 1, \ldots, N$ und daher gilt $x_0 \in V_k$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Es folgt ebenfalls aus Lemma 2.5, dass für alle $x \in V_N$ folgendes gilt:

$$t_0 = N\tau \in I(x), \qquad \varphi(t_0, x) \in V.$$

Daraus folgt $[-\delta, \delta] \subset I(\varphi(t_0, x))$ für alle $x \in V_N$ und daher, nach Lemma 2.5,

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_N \subset \Omega.$$

Da φ auf $[-\delta, \delta] \times K$ Lipschitz-stetig ist, existiert eine Konstante $c > 0$, so dass alle $s, s' \in [-\delta, \delta]$ und alle $y, y' \in K$ die Ungleichung

$$\|\varphi(s, y) - \varphi(s', y')\| \leq c|s - s'| + c\,\|y - y'\| \tag{31}$$

erfüllen. Für $x, x' \in V_N$ und $t, t' \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ folgt daraus die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x) - \varphi(t', x')\| &= \left\|\varphi(t - t_0, \varphi_\tau^N(x)) - \varphi(t' - t_0, \varphi_\tau^N(x'))\right\| \\ &\leq c|t - t'| + c\left\|\varphi_\tau^N(x) - \varphi_\tau^N(x')\right\| \\ &\leq c|t - t'| + c^{N+1}\,\|x - x'\|\,. \end{aligned}$$

Hier folgt die letzte Ungleichung durch N-malige Anwendung der Ungleichung (31). Damit haben wir gezeigt, dass es für jedes Element $(t_0, x_0) \in \Omega$ mit $t_0 \geq 0$ eine offene Menge $W = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times V_N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $(t_0, x_0) \in W \subset \Omega$ ist und die Restriktion $\varphi|_W : W \to U$ Lipschitz-stetig ist. Für $t_0 < 0$ folgt dieselbe Aussage, indem man f durch $-f$ und $\varphi(t, x)$ durch $\varphi(-t, x)$ ersetzt. Damit sind Schritt 3 und Satz 3.1 bewiesen. □

Bemerkung 3.3. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_t := \left\{x_0 \in U \,\middle|\, t \in I(x_0)\right\}$$

offen nach Satz 3.1. Ausserdem folgt aus Lemma 2.5, dass für jedes $x \in U_t$ gilt, dass $-t \in I(x) - t = I(\varphi(t, x))$ und daher $\varphi(t, x) \in U_{-t}$ ist. Es ist oft nützlich, für den Fluss von f die Notation

$$\varphi_t : U_t \to U_{-t}, \qquad \varphi_t(x) := \varphi(t, x),$$

zu verwenden. Nach Satz 3.1 ist die Abbildung $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}.$$

Ausserdem gilt $U_0 = U$, $\varphi_0 = \mathrm{id} : U \to U$, und

$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t \qquad \text{auf } U_{s+t} \cap \varphi_t^{-1}(U_s)$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ nach Lemma 2.5. Diese Notation vereinfacht sich erheblich, wenn $I(x) = \mathbb{R}$ ist für alle $x \in U$. Dann ist $U_t = U$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

4 Differenzierbarkeit des Flusses

Satz 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^ℓ Vektorfeld mit $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann ist der Fluss $\varphi : \Omega \to U$ von f eine C^ℓ-Abbildung.*

Beweis. Siehe Seite 21. □

Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir zunächst ein Lemma, welches die stetige Differenzierbarkeit des Flusses voraussetzt. Diese Lemma liefert eine Formel für die Ableitung von φ und diese Formel wird dann verwendet, um Satz 4.1 zu beweisen.

Lemma 4.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und sei der Fluss $\varphi : \Omega \to U$ von f eine stetig differenzierbare Abbildung. Seien $x_0 \in U$ und $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $I := I(x_0)$ und definiere die Abbildungen $x : I \to U$ und $\xi : I \to \mathbb{R}^n$ durch*

$$x(t) := \varphi_t(x_0), \qquad \xi(t) := d\varphi_t(x_0)\xi_0 \tag{32}$$

für $t \in I$. Dann sind x und ξ stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)), & x(0) &= x_0, \\ \dot{\xi}(t) &= df(x(t))\xi(t), & \xi(0) &= \xi_0, \end{aligned} \tag{33}$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Die partielle Ableitung $\partial\varphi/\partial t = f \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ existiert nach Definition des Flusses und ist stetig differenzierbar nach Voraussetzung. Ausserdem gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = df(\varphi(t,x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \Omega.$$

Nach dem Satz von Schwarz (über die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen) folgt daraus, dass die Abbildung $\partial\varphi/\partial x_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nach t partiell differenzierbar ist und die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = df(\varphi(t,x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x)$$

für alle $(t,x) \in \Omega$ erfüllt. Ist also $\xi_0 = (\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Funktion $\xi(t) = d\varphi_t(x_0)\xi_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x_0)\xi_{0i}$ stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x_0)\xi_{0i} = \sum_{i=1}^n df(\varphi(t,x_0))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x_0)\xi_{0i} = df(x(t))\xi(t).$$

Damit ist Lemma 4.2 bewiesen. □

Lemma 4.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und sei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t), \qquad \xi(0) = \xi_0, \tag{34}$$

für jedes $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung $\xi : I \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei $T \in I$ mit $T > 0$ und definiere

$$c := 2 \sup_{0\le t\le T} \|A(t)\|\,, \qquad \|A(t)\| := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A(t)\xi\|}{\|\xi\|}.$$

Sei $\mathscr{X} := C([0,T],\mathbb{R}^n)$ der Raum aller stetigen Abbildungen $\xi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Dies ist ein Banachraum mit der Normfunktion

$$\|\xi\|_c := \sup_{0\le t\le T} e^{-ct}\|\xi(t)\| \qquad \text{für } \xi \in \mathscr{X}.$$

Definiere die Abbildung $\mathscr{F} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ durch

$$\mathscr{F}(\xi)(t) := \xi_0 + \int_0^t A(s)\xi(s)\,ds \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Wir beweisen die Ungleichung

$$\|\mathscr{F}(\xi) - \mathscr{F}(\eta)\|_c \le \frac{1}{2}\|\xi-\eta\|_c \qquad \text{für alle } \xi,\eta \in \mathscr{X}. \tag{35}$$

Seien also $\xi,\eta \in \mathscr{X}$ gegeben und sei $t \in [0,T]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}(\xi)(t) - \mathscr{F}(\eta)(t)\| &= \left\|\int_0^t A(s)(\xi(s)-\eta(s))\,ds\right\| \\
&\le \int_0^t \|A(s)\|\,\|\xi(s)-\eta(s)\|\,ds \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t c\,\|\xi(s)-\eta(s)\|\,ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t ce^{cs}e^{-cs}\,\|\xi(s)-\eta(s)\|\,ds \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^t ce^{cs}\,ds\,\|\xi-\eta\|_c \\
&\le \frac{1}{2}e^{ct}\,\|\xi-\eta\|_c
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Daraus folgt die Ungleichung (35) indem man beide Seiten mit e^{-ct} multipliziert und das Supremum über alle $t \in [0,T]$ bildet.

Aus der Ungleichung (35) folgt nach dem Banachschen Fixpunktsatz A.1, dass die Abbildung

$$\mathscr{F} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$$

einen eindeutigen Fixpunkt

$$\xi = \mathscr{F}(\xi)$$

besitzt. Dieser Fixpunkt ist die eindeutige Lösung $\xi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (34) auf dem Intervall $[0, T]$. Da eine solche eindeutige Lösung auf jedem kompakten Teilintervall $[0, T] \subset I$ existiert, existiert sie auch auf $I \cap [0, \infty)$. Die Existenz einer eindeutigen Lösung auf ganz I folgt nun dadurch, dass man die Funktion $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ durch die Funktion $-I \to \mathbb{R}^{n \times n} : t \mapsto -A(-t)$ ersetzt. Damit ist Lemma 4.3 bewiesen. □

Lemma 4.2 zeigt, dass die Linearisierung $\xi(t) := d\varphi_t(x_0)\xi_0$ des Flusses, falls sie existiert, die linearisierte Differentialgleichung (33) löst. Lemma 4.3 zeigt, dass die zweite Gleichung in (33) immer auf dem gesamten Existenzintervall $I = I(x_0)$ eine Lösung $\xi : I \to \mathbb{R}^n$ besitzt. Die Aufgabe im Beweis von Satz 4.1 besteht nun darin, zu zeigen, dass diese Lösung auch tatsächlich durch die Ableitung von φ_t mittels (32) gegeben ist.

Beweis von Satz 4.1. Wir beweisen die Behauptung zunächst für $\ell = 1$. Sei also $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zu zeigen ist, dass der Fluss $\varphi : \Omega \to U$ von f ebenfalls stetig differenzierbar ist. Sei $x_0 \in U$ und $I := I(x_0) \subset \mathbb{R}$. Definiere die Abbildungen

$$x : I \to U, \qquad A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

durch

$$x(t) := \varphi_t(x_0), \qquad A(t) := df(x(t)) \tag{36}$$

für $t \in I$. Nach Lemma 4.3 existiert eine eindeutige, stetig differenzerbare Abbildung $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass

$$\dot{\Phi}(t) := A(t)\Phi(t), \qquad \Phi(0) = \mathbb{1}, \tag{37}$$

für alle $t \in I$. Wir beweisen zunächst, dass, für jedes $t \in I$, die Abbildung $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ and der Stelle $x_0 \in U_t$ differenzierbar ist mit der Jacobi-Matrix

$$d\varphi_t(x_0) = \Phi(t) \qquad \text{für } t \in I. \tag{38}$$

Sei $T \in I$ mit $T > 0$. Dann ist folgendes zu zeigen.

Behauptung 1: *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| < \delta$ gilt, dass $x_0 + \xi_0 \in U_t$ ist und*

$$\|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0\| \leq \varepsilon \|\xi_0\|. \tag{39}$$

Beweis von Behauptung 1. Sei eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen die Konstante $\delta > 0$ in den folgenden vier Schritten.

(a) Nach Satz 3.1 existiert eine Konstante $r > 0$ mit

$$[0,T] \times \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} \subset \Omega.$$

(b) Nach Satz 3.1 existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|\varphi_t(x_0+\xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \leq c\|\xi_0\|, \qquad \|df(x(t))\| \leq c$$

für alle $t \in [0,T]$ und alle $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| \leq r$.

(c) Es existiert eine Konstante $\rho > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \rho$ gilt, dass $x(t) + h \in U$ ist und

$$\|df(x(t)+h) - df(x(t))\| \leq e^{-cT}\varepsilon.$$

Hier verwenden wir die Tatsache dass eine stetige Abbildung auf jeder Kompakten Teilmenge ihres Definitionsgebietes gleichmässig stetig ist.

(d) Wähle $\delta > 0$ so dass $\delta \leq r$ und $c\delta \leq \rho$ ist.

Wir zeigen, dass Behauptung 1 mit diesem δ gilt. Für $t \in [0,T]$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \rho$ sei

$$R(t,h) := f(x(t)+h) - f(x(t)) - df(x(t))h. \tag{40}$$

Dann gilt

$$R(t,h) = \int_0^1 \big(df(x(t)+sh) - df(x(t))\big)h\,ds$$

und daher, nach (c),

$$\|R(t,h)\| \leq \int_0^1 \|df(x(t)+sh) - df(x(t))\|\,\|h\|\,ds \leq e^{-cT}\varepsilon\,\|h\| \tag{41}$$

für alle $t \in [0,T]$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \rho$.

Sei nun $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi_0\| < \delta$ und definiere $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\eta(t) := \varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0) - \Phi(t)\xi_0 \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{42}$$

Dann ist $\eta(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\dot\eta(t) &= f(\varphi_t(x_0 + \xi_0)) - f(\varphi_t(x_0)) - A(t)\Phi(t)\xi_0 \\
&= f(\varphi_t(x_0 + \xi_0)) - f(\varphi_t(x_0)) - A(t)\big(\varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0)\big) + A(t)\eta(t) \\
&= R(t, \varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0)) + A(t)\eta(t).
\end{aligned}$$

Nach (a), (b), und (d) gilt $x_0 + \xi_0 \in U_t$ und

$$\|\varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \le c\,\|\xi_0\| < c\delta \le \rho \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Nach (41) folgt daraus die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|R(t, \varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0))\| &\le e^{-cT}\varepsilon\,\|\varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0)\| \\
&\le ce^{-cT}\varepsilon\,\|\xi_0\|
\end{aligned}$$

für $0 \le t \le T$. Daraus wiederum folgt

$$\begin{aligned}
\|\dot\eta(t)\| &\le \|R(t, \varphi_t(x_0 + \xi_0) - \varphi_t(x_0))\| + \|A(t)\eta(t)\| \\
&\le ce^{-cT}\varepsilon\,\|\xi_0\| + c\,\|\eta(t)\| \\
&\le ce^{-cT}\varepsilon\,\|\xi_0\| + c\int_0^t \|\dot\eta(s)\|\, ds
\end{aligned}$$

für $0 \le t \le T$. Nach Gronwall's Lemma 3.2 gilt daher die Ungleichung

$$\|\dot\eta(t)\| \le ce^{-cT}\varepsilon\,\|\xi_0\|\, e^{ct}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|\eta(t)\| &\le \int_0^t \|\dot\eta(s)\|\, ds \\
&\le e^{-cT}\varepsilon\,\|\xi_0\| \int_0^t ce^{cs}\, ds \\
&\le \varepsilon\,\|\xi_0\|
\end{aligned}$$

für $0 \le t \le T$. Da $\eta(t)$ durch (42) definiert war, ist Behauptung 1 damit bewiesen. Damit haben wir gezeigt, dass φ_t für $t > 0$ differenzierbar ist und der Beweis für $t < 0$ ist analog.

Als nächstes zeigen wir, dass die Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}^{n\times n} : (t,x) \mapsto d\varphi_t(x)$ stetig ist. Sei also $x_0 \in U$ und sei $T \in I(x_0)$ mit $T > 0$. Definiere die Abbildungen $A, \Phi : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$A(t) := df(\varphi_t(x_0)), \qquad \Phi(t) := d\varphi_t(x_0)$$

für $0 \le t \le T$.

Behauptung 2: *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$ gilt, dass $y_0 \in U_t$ ist und*

$$\|d\varphi_t(x_0) - d\varphi_t(y_0)\| < \varepsilon. \tag{43}$$

Beweis von Behauptung 2. Sei eine Konstant $0 < \varepsilon \le 1$ gegeben. Wir wählen die Konstante $\delta > 0$ in den folgenden drei Schritten.

(a) Wähle $c > 0$ so dass mit

$$\|A(t)\| + 1 \le c, \qquad \|\Phi(t)\| \le c \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

(b) Es existiert eine Konstante $\rho > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - \varphi_t(x_0)\| < \rho$ gilt, dass $y \in U$ ist und

$$\|df(y) - df(\varphi_t(x_0))\| < e^{-cT}\varepsilon.$$

(c) Nach Satz 3.1 existiert eine Konstante $\delta > 0$, so dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$ gilt, dass $y_0 \in U_t$ ist und

$$\|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| < \rho.$$

Sei nun $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0 - y_0\| < \delta$ und definiere $B, \Psi : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$B(t) := df(\varphi_t(y_0)), \qquad \Psi(t) := d\varphi_t(y_0)$$

für $0 \le t \le T$. Dann ist Ψ nach dem bisher bewiesenen stetig differenzierbar und es gilt $\dot\Psi(t) = B(t)\Psi(t)$ für $0 \le t \le T$ und $\Psi(0) = \mathbb{1}$. Ausserdem gilt nach (c), dass $\|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| < \rho$ ist für $0 \le t \le T$. Daraus folgt nach (b)

$$\|A(t) - B(t)\| \le e^{-cT}\varepsilon \le 1 \qquad \text{für } 0 \le t \le T$$

und daraus wiederum folgt nach (a)

$$\|B(t)\| \le \|A(t)\| + 1 \le c \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt

$$\begin{array}{rcl}\|\dot\Phi(t) - \dot\Psi(t)\| & = & \|A(t)\Phi(t) - B(t)\Psi(t)\| \\ & \le & \|A(t)\Phi(t) - B(t)\Phi(t)\| + \|B(t)\Phi(t) - B(t)\Psi(t)\| \\ & < & ce^{-cT}\varepsilon + c\,\|\Phi(t) - \Psi(t)\| \\ & \le & ce^{-cT}\varepsilon + c\displaystyle\int_0^T \|\dot\Phi(s) - \dot\Psi(s)\|\,ds\end{array}$$

für $0 \le t \le T$. Nach Gronwall's Lemma 3.2 folgt daraus die Ungleichung $\|\dot\Phi(t) - \dot\Psi(t)\| < e^{-cT}ce^{ct}\varepsilon$ und daraus ergibt sich durch Integration die Ungleichung $\|\Phi(t)-\Psi(t)\| < \varepsilon$ für $0 \le t \le T$. Damit ist Behauptung 2 bewiesen. Wir haben also gezeigt, dass die Abbildung $(t,x) \mapsto d\varphi_t(x)$ für $t \ge 0$ stetig ist und der Beweis für $t \le 0$ ist analog. Damit sind alle partiellen Ableitungen $\partial_t\varphi = f \circ \varphi$ und $\partial\varphi/\partial x_i$ für $i = 1, \dots, n$ stetig, und somit ist $\varphi : \Omega \to U$ stetig differenzierbar.

Wir haben damit Satz 4.1 für $\ell = 1$ bewiesen. Sei nun $\ell \in \mathbb{N}$ und nehmen wir an, der Satz gelte für dieses ℓ (und jedes C^ℓ Vektorfeld auf jeder offenen Teilmenge eines Euklidischen Raumes beliebiger Dimension). Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein $C^{\ell+1}$ Vektorfeld und sei $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ der Fluss von f. Dann ist φ eine C^ℓ-Abbildung nach Induktionsannahme, und es ist zu zeigen, dass φ eine $C^{\ell+1}$-Abbildung ist. Dazu defineren wir die offene Menge

$$\widetilde{U} := U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

und die Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\widetilde{f}(x,\xi) := (f(x), df(x)\xi) \qquad \text{für } x \in U \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ausserdem sei $\widetilde{\Omega} := \Omega \times \mathbb{R}^n$ und sei die Abbildung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{U}$ durch

$$\widetilde{\varphi}(t,x,\xi) := \big(\varphi_t(x), d\varphi_t(x)\xi\big) \qquad \text{für } (t,x) \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$

definiert. Dann ist $\widetilde{f}$ ein C^ℓ Vektorfeld und $\widetilde{\varphi}$ ist der Fluss von $\widetilde{f}$ wie wir oben bewiesen haben. Nach der Induktionsannahme ist $\widetilde{\varphi}$ daher eine C^ℓ-Abbildung. Daraus folgt dass alle partiellen Ableitungen $\partial_t\varphi = f \circ \varphi$ und $\partial\varphi/\partial x_i$ für $i = 1, \dots, n$ C^ℓ-Abbildungen sind, und damit ist gezeigt dass φ eine $C^{\ell+1}$ Abbildung ist.

Dieses Induktionsargument zeigt, dass die Behauptung des Satzes für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. Dass sie auch für $\ell = \infty$ gilt, folgt daraus, dass eine Funktion genau dann glatt ist, wenn sie, für jedes $\ell \in \mathbb{N}$, ℓ mal stetig differenzierbar ist. Damit ist Satz 4.1 bewiesen. □

Korollar 4.4. *Die Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist glatt.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ das durch

$$f(A, B) := (0, AB) \qquad \text{für } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

definierte Vektorfeld. Der Fluss von f ist die durch

$$\varphi(t, A, B) := (A, e^{At}B) \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gegebene Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Da f glatt ist, folgt aus Satz 4.1, dass φ glatt ist. Daher ist auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto \varphi(1, A, \mathbb{1}) = (A, e^A)$$

glatt. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Komposition dieser Abbildung mit der Projektion auf den zweiten Faktor und ist daher ebenfalls glatt. Damit ist Korollar 4.4 bewiesen. □

A Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to X$ eine Abbildung von X auf sich selbst.. Die Abbildung f heisst **Kontraktion**, wenn eine Konstante

$$0 \leq \alpha < 1$$

existiert, so dass die Ungleichung

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \tag{44}$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist. Ein **Fixpunkt von** f ist ein Element $x \in X$, welches die Gleichung $f(x) = x$ erfüllt.

Satz A.1 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei* (X, d) *ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei* $f : X \to X$ *eine Kontraktion. Dann besitzt* f *genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit. Seien $x, y \in X$ Fixpunkte von f. Dann gilt $f(x) = x$ und $f(y) = y$ und daher

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

nach (44). Daraus folgt die Ungleichung

$$(1 - \alpha) d(x, y) \leq 0.$$

Da $\alpha < 1$ ist folgt daraus $d(x, y) = 0$ und daher $x = y$.

Zum Beweis der Existenz wählen wir zunächst ein Element $x_0 \in X$. Ein solches Element existiert, da X nichtleer ist. Nun definieren wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X durch

$$x_1 := f(x_0), \qquad x_{n+1} := f(x_n) \tag{45}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nach (44). Daraus ergibt sich durch Vollständige Induktion die Ungleichung

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n d(x_0, x_1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher, für je zwei ganze Zahlen $0 < n < m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\le \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert also die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein Element $x \in X$, und es gilt

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Also ist x ein Fixpunkt von f und damit ist Satz A.1 bewiesen. $\square$

Literatur

[1] D.A. Salamon, *Analysis I*, Vorlesung an der ETHZ im Herbstsemester 2014.
`http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/math/analysis1`
Videolink: `http://www.video.ethz.ch/lectures/d-math/2014/autumn/401-1261-07L.html`

[2] D.A. Salamon, *Analysis II*, Vorlesung an der ETHZ im Frühjahrssemester 2015.
`http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/math/analysis2/`
Videolink: `http://www.video.ethz.ch/lectures/d-math/2015/spring/401-1262-07L.html`