Analysis II (FS 2015): DIFFERENTIALFORMEN UND DER SATZ VON STOKES

Dietmar A. Salamon
ETH-Zürich

18. Mai 2015

1 Alternierende Formen

In diesem Abschnitt sind X, Y, Z ein reelle Vektorräume. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit S_k die Gruppe der Permutationen, das heisst der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$. Die Parität einer Permutation $\sigma \in S_k$ ist die Zahl

$$\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\nu(\sigma)}, \qquad \nu(\sigma) := \{(i,j) \,|\, 1 \le i < j \le k,\, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Die Parität definiert einen Gruppenhomomorphismus $\varepsilon : S_k \to \{\pm 1\}$.

Definition 1.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine multi-lineare Abbildung $\omega : X^k \to \mathbb{R}$ heisst* **alternierende k-Form** *wenn sie für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i < j$ und alle $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ die Bedingung*

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_j, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_i, \xi_{j+1}, \dots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

erfüllt. Eine **alternierende 0-Form** *auf X ist per Definition eine reelle Zahl. Wir bezeichnen die Menge der alternierenden k-Formen auf X mit $\Lambda^k X^*$. Für $k = 0$ ist $\Lambda^0 X^* := \mathbb{R}$ und für $k = 1$ ist $\Lambda^1 X^* = X^*$ der Dualraum von X.*

Übung 1.2. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda^k X^*$ ein reller Vektorraum.

Übung 1.3. Eine multi-lineare Abbildung $\omega : X^k \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine alternierende k-Form ist wenn sie der Bedingung

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$$

für jede Permutation $\sigma \in S_k$ und alle Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ genügt. **Hinweis:** Jede Permutation lässt sich als Komposition von Transpositionen schreiben.

Übung 1.4. Sei $\omega \in \Lambda^k X^*$ und seien $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$ linear abhängig. Dann gilt $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$. Insbesondere folgt daraus dass $\Lambda^k X^* = \{0\}$ ist für $k > \dim X$.

Beispiel 1.5. Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Für ein geordnetes k-Tupel

$$I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k, \qquad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n,$$

definieren wir die Abbildung $dx_I : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$dx_I(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) := \det\left((\xi_{\mu i_\nu})_{\mu,\nu=1}^k \right)$$

für $\xi_\mu = (\xi_{\mu 1}, \ldots, \xi_{\mu n}) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = 1, \ldots, k$. Es folgt aus den Eigenschaften der Determinante, dass dx_I in der Tat eine alternierende k-Form auf $\mathbb{R}^n$ ist (siehe [3]). Für $k = 1$ und $I = i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die $i$te Koordinate, das heisst

$$dx_i(\xi) = \xi_i, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge der geordneten k-Tupel in $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{I}_k(n) := \left\{ I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \right\}.$$

Die Anzahl der geordneten k-Tupel in $\{1, \ldots, n\}$ ist

$$\#\mathcal{I}_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lemma 1.6. *Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. Die alternierenden Formen dx_I für $I \in \mathcal{I}_k(n)$ bilden eine Basis von $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Insbesondere gilt*

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{k}.$$

Die letztere Formel gilt auch für $k = 0$.

Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $I, J \in \mathcal{I}_k(n)$ mit $J = (j_1, \ldots, j_k)$ dass

$$dx_I(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{falls } I = J, \\ 0, & \text{falls } I \ne J. \end{cases} \tag{1}$$

Sei nun $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ gegeben ebenso wie eine Abbildung $\mathcal{I}_k(n) \to \mathbb{R} : I \mapsto a_I$. Dann gilt

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} a_I dx_I \quad \iff \quad a_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \; \forall I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n). \tag{2}$$

Um dies zu zeigen wählen wir ein k-Tupel $J = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{I}_k(n)$ und werten die k-Formen ω und $\sum_I a_I dx_I$ auf den Vektoren $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ aus. Aufgrund von (1) erhalten wir für beide k-Formen genau dann die gleiche Antwort wenn $\omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = a_J$ ist. Andererseits stimmen zwei k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ genau dann überein wenn sie auf jedem k-Tupel von Basisvektoren übereinstimmen. Damit haben wir (2) gezeigt. Es folgt sofort aus (2) dass die k-Formen dx_I eine Basis on $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ bilden. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Das äussere Produkt

Definition 1.7. *Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$. Das* **äussere Produkt** *von $\alpha \in \Lambda^k X^*$ und $\beta \in \Lambda^\ell X^*$ ist die alternierende $(k+\ell)$-Form $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+\ell} X^*$, die durch*

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \ldots, \xi_{k+\ell}) := \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} \varepsilon(\sigma)\alpha(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)})\beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k+\ell)})$$

für $\xi_1, \ldots, \xi_{k+\ell} \in X$ definiert ist. Hier bezeichnen wir mit

$$S_{k,\ell} := \{\sigma \in S_{k+\ell} \,|\, \sigma(1) < \cdots < \sigma(k),\, \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)\}$$

die Menge der (k,ℓ)-"shuffles". Für $c \in \Lambda^0 X^* = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k X^*$ definieren wir $c \wedge \omega := c\omega$.

Beispiel 1.8. Seien $\alpha, \beta \in \Lambda^1 X^*$ und $\omega \in \Lambda^2 X^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) &= \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi), \\ (\alpha \wedge \omega)(\xi, \eta, \zeta) &= \alpha(\xi)\omega(\eta, \zeta) + \alpha(\eta)\omega(\zeta, \xi) + \alpha(\zeta)\omega(\xi, \eta)\end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta, \zeta \in X$.

Lemma 1.9. *Seien $k, \ell, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
(i) *Die Abbildung $\Lambda^k X^* \times \Lambda^\ell X^* \to \Lambda^{k+\ell} X^* : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ ist bi-linear.*
(ii) *Für $\alpha \in \Lambda^k X^*$ und $\beta \in \Lambda^\ell X^*$ gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{k\ell} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) *Für $\alpha \in \Lambda^k X^*$, $\beta \in \Lambda^\ell X^*$, und $\gamma \in \Lambda^m X^*$ gilt*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

(iv) *Für $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$ gilt*

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen sofort aus der Definition des äusseren Produkts. Für den Beweis von (iii) definieren wir

$$S_{k,\ell,m} := \left\{ \sigma \in S_{k+\ell+m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell), \\ \sigma(k+\ell+1) < \cdots < \sigma(k+\ell+m) \end{array} \right\}.$$

Dann sind $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(\xi_1, \ldots, \xi_{k+\ell+m})$ und $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))(\xi_1, \ldots, \xi_{k+\ell+m})$ beide gleich dem Ausdruck

$$\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\alpha(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)})\beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k+\ell)})\gamma(\xi_{\sigma(k+\ell+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(k+\ell+m)}),$$

wobei die Summe über alle $\sigma \in S_{k,\ell,m}$ läuft. Hieraus folgt die Assoziativität des äusseren Produkts.

Iterieren wir die Formel im Beweis von (iii) so ergibt sich mit vollständiger Induktion die Gleichung

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \alpha_1(\xi_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_k(\xi_{\sigma(k)}) \\ &= \det \Big(\big(\alpha_\nu(\xi_\mu) \big)_{\mu,\nu=1}^k \Big)\end{aligned}$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X^*$ und $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$. Mit $X = \mathbb{R}^n$ und $\alpha_\nu = dx_{i_\nu}$ folgt hieraus die Aussage (iv). Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Übung 1.10. Sei $X = \mathbb{R}^{2n}$ mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ und

$$\omega := dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*.$$

Dann ist das n-fache äussere Produkt von ω mit sich selbst durch die Formel

$$\omega^{\wedge n} = (-1)^{n(n-1)/2}\, n! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

gegeben.

Zurückholen (pullback)

Definition 1.11. *Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \Lambda^k Y^*$. Die* **durch A zurückgeholte alternierende k-Form** *$A^*\omega \in \Lambda^k X^*$ ist definiert durch*

$$(A^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(A\xi_1, \dots, A\xi_k)$$

für $\xi_1, \dots, \xi_k \in X$.

Lemma 1.12. *Seien $A : X \to Y$ und $B : Y \to Z$ lineare Abbildungen.*

(i) *Die Abbildung $\Lambda^k Y^* \to \Lambda^k X^* : \omega \mapsto A^*\omega$ ist linear.*

(ii) *Für $\omega \in \Lambda^k Z^*$ gilt*

$$(B \circ A)^*\omega = A^* B^* \omega.$$

(iii) *Für $\alpha \in \Lambda^k Y^*$ und $\beta \in \Lambda^\ell Y^*$ gilt*

$$A^*(\alpha \wedge \beta) = (A^*\alpha) \wedge (A^*\beta).$$

(iv) *Seien $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$, und*

$$A = (a_{ji})_{i=1,\dots n}^{j=1,\dots p} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

(verstanden als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^p$). Wir bezeichnen die Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und die auf $\mathbb{R}^p$ mit $y = (y_1, \dots, y_p)$. Dann gilt für $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{I}_k(p)$ dass

$$A^* dy_J = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} \det(A_{JI}) dx_I$$

wobei $A_{JI} := (a_{j_\nu i_\mu})_{\mu,\nu=1}^k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ für $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$.

Beweis. Die Aussagen (i), (ii), (iii) folgen sofort aus den Definitionen. Zum Beweis von (iv) bezeichnen wir mit $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und wählen ein k-Tupel $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A^* dy_J)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) &= dy_J(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_k}) \\ &= \det\left(\left((Ae_{i_\mu})_{j_\nu}\right)_{\mu,\nu=1}^k\right) \\ &= \det(A_{JI}).\end{aligned}$$

Hier folgt die letzte Gleichung aus der Tatsache, dass die $j$te Koordinate des Vektors Ae_i der Eintrag $a_{ji} = (Ae_i)_j$ der Matrix A ist ($i$te Spalte und $j$te Zeile). Damit folgt die Behauptung aus (2). □

2 Differentialformen

In diesem Abschnitt sind $n, p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$, $W \subset \mathbb{R}^q$ nichtleere offene Mengen. Die Elemente von U werden mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ und die von V mit $y = (y_1, \dots, y_p) \in V$ bezeichnet.

Definition 2.1. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Eine* **Differentialform auf U vom Grade k** *ist eine glatte (d.h. C^∞) Abbildung $\omega : U \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ so dass die Abbildung*

$$(\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R} : (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto \omega(x; \xi_1, \dots, \xi_k)$$

für jedes $x \in U$ eine alternierende k-Form ist.

Ist $\omega : U \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ eine Differentialform so bezeichnen wir die durch $x \in U$ bestimmte alternierende k-Form mit $\omega_x \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, das heisst

$$\omega_x(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(x; \xi_1, \dots, \xi_k)$$

für $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$. In dieser Schreibweise können wir eine Differentialform vom Grade k auch als glatte Abbildung $U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* : x \mapsto \omega_x$ verstehen. Nach Lemma 1.6 können wir nun die alternierende k-Form ω_x in der Basis $\{dx_I\}_{I \in \mathcal{I}_k(n)}$ darstellen. Das heisst, es gibt glatte Funktionen $a_I : U \to \mathbb{R}$, eine für jedes k-Tupel $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$, so dass für alle $x \in U$ gilt:

$$\omega_x = \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} a_I(x) dx_I. \tag{3}$$

Der Beweis von Lemma 1.6 zeigt auch, dass die Koeffizienten sich in der Form $a_I(x) = \omega_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ schreiben lassen. Die Menge der Differentialformen auf U vom Grade k bezeichnen wir mit

$$\Omega^k(U) := C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*).$$

Dies ist ein (unendlich dimensionaler) reller Vektorraum. Manchmal bezeichnen wir die Elemente von $\Omega^k(U)$ kurz als *k-Formen*. Hierbei ist jedoch auf den Unterschied zwischen einer alternierenden k-Form (einem Element von $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$) und einer k-Form als Differentialform (einem Element von $\Omega^k(U)$) zu achten.

Zurückholen (pullback)

Definition 2.2. *Sei $f : U \to V$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^k(V)$. Die* **durch f zurückgeholte Differentialform** *$f^*\omega \in \Omega^k(U)$ ist definiert durch*

$$(f^*\omega)(x;\xi_1,\dots,\xi_k) := \omega(f(x);df(x)\xi_1,\dots,df(x)\xi_k)$$

für $x \in U$ und $\xi_1,\dots,\xi_k \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.3. *Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ glatte Abbildungen.*
(i) *Die Abbildung $\Omega^k(V) \to \Omega^k(U) : \omega \mapsto f^*\omega$ ist linear.*
(ii) *Für $\omega \in \Omega^k(W)$ gilt*

$$(g \circ f)^*\omega = f^*g^*\omega.$$

(iii) *Für $\alpha \in \Omega^k(V)$ und $\beta \in \Omega^\ell(V)$ gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

(iv) *Ist $\omega = \sum_{J \in \mathcal{I}_k(p)} b_J dy_J \in \Omega^k(V)$ mit $b_J \in C^\infty(V)$ so gilt*

$$f^*\omega = \sum_{J \in \mathcal{I}_k(p)} \sum_{I \in \mathcal{I}_k(n)} (b_J \circ f) \det\left(\frac{\partial f_J}{\partial x_I}\right) dx_I, \tag{4}$$

wobei

$$\frac{\partial f_J}{\partial x_I} := \left(\frac{\partial f_{j_\nu}}{\partial x_{i_\mu}}\right)_{\nu,\mu=1}^k \in \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{R}^{k\times k})$$

für $I = (i_1,\dots,i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$ und $J = (j_1,\dots,j_k) \in \mathcal{I}_k(p)$.

Beweis. Die Aussagen (i), (ii), (iii) folgen sofort aus den Definitionen und (iv) folgt aus Lemma 1.12 (iv). □

Beispiel 2.4. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (x, y) und $U = \mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (r, θ). Sei $f : U \to V$ die Abbildung

$$f(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Also ist $x = f_1(r,\theta) = r\cos(\theta)$ und $y = f_2(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Die Formel (4) für das Zurückholen durch f ergibt

$$f^*dx = \frac{\partial f_1}{\partial r}dr + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}d\theta = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta$$

und

$$f^*dy = \frac{\partial f_2}{\partial r}dr + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}d\theta = \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta.$$

Hieraus folgt nach Lemma 2.3 (iii) dass

$$f^*(dx \wedge dy) = rdr \wedge d\theta.$$

Wir haben dabei verwendet dass $d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$. Dies stimmt überein mit der Gleichung $det(df(r,\theta)) = r$.

Das Differential

Definition 2.5. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\omega \in \Omega^k(U)$. Das* **Differential von** ω *ist die Differentialform $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$, die durch*

$$d\omega(x;\xi_0,\ldots,\xi_k) := \sum_{i=0}^{k}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^i \xi_{i\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x_\nu}(x;\xi_0,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_k) \tag{5}$$

für $x \in U$ und $\xi_0,\ldots,\xi_k \in \mathbb{R}^n$ definiert ist. Die resultierende Abbildung

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$

ist ein linearer Differentialoperator erster Ordnung.

Bemerkung 2.6. Eine 0-Form auf U ist eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Das Differential $df \in \Omega^1(U)$ einer solchen 0-Form $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ ist nach Definition 2.5 die durch

$$df(x;\xi) := \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x)$$

für $x \in U$ und $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ definierte 1-Form. Also ist $(df)_x = df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ in der Tat die Ableitung von f an der Stelle $x \in U$ wie wir sie kennen. In etwas anderer Schreibweise haben wir

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

Angewendet auf die Funktion $U \to \mathbb{R} : x = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_i$ rechtfertigt dies nachträglich die Bezeichnung dx_i für die Projektion auf die $i$te Koordinate.

Satz 2.7. **(i)** *Ist $\omega = \sum_{I\in\mathcal{I}_k(n)} a_I dx_I$ mit $a_I \in C^\infty(U)$ so gilt*

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{I\in\mathcal{I}_k(n)}\frac{\partial a_I}{\partial x_\nu}dx_\nu \wedge dx_I = \sum_{I\in\mathcal{I}_k(n)} da_I \wedge dx_I. \tag{6}$$

(ii) *Für $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^\ell(U)$ gilt*

$$d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge(d\beta)$$

(iii) *Für jedes $\omega \in \Omega^k(U)$ gilt*

$$d(d\omega) = 0.$$

(iv) *Ist $f : U \to V$ eine glatte Abbildung so gilt für alle $\omega \in \Omega^k(V)$ dass*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Formeln (5) und (6) für $d\omega$ übereinstimmen. Ist $\omega = \sum_I a_I dx_I$ so erhalten wir für $x \in U$ und $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d\omega(x; \xi_0, \dots, \xi_k) =& \sum_{i=0}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^i \xi_{i\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(x; \xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\ =& \sum_{i=0}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_I (-1)^i \xi_{i\nu} \frac{\partial a_I}{\partial x_\nu} dx_I(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \\ =& \sum_{\nu=1}^{n} \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial x_\nu} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \xi_{i\nu} dx_I(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) \right) \\ =& \sum_{\nu=1}^{n} \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial x_\nu} (dx_\nu \wedge dx_I)(\xi_0, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen.

Wir beweisen (ii). Da $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ein linearer Operator ist, genügt es, die Leibnitz-Regel für $\alpha = a\, dx_I$ und $\beta = b\, dx_J$ zu zeigen, wobei $a, b : U \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen sind und $I \in \mathcal{I}_k(n)$, $J \in \mathcal{I}_\ell(n)$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) =& d(ab\, dx_I \wedge dx_J) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial (ab)}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ =& \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} b\, dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{\nu=1}^{n} a \frac{\partial b}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \wedge dx_J \\ =& \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_I \right) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_J \right) \\ =& d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Hier haben wir in der zweiten und letzten Gleichung die Formel (6) verwendet. Damit ist (ii) bewiesen.

Wir beweisen (iii). Für eine 0-Form $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ gilt

$$\begin{aligned} d(df) =& d \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu \right) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \\ =& \sum_{\mu<\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \right) dx_\mu \wedge dx_\nu = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt, nach Definition, $d(dx_I) = 0$ für jedes k-Tupel $I \in \mathcal{I}_k(n)$. Für $\omega = \sum_I a_I dx_I$ ergibt sich daher aus (i) und (ii) dass

$$d(d\omega) = d \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = \sum_I d(da_I) \wedge dx_I = 0.$$

Damit ist (iii) bewiesen.

Wir beweisen (iv). Ist $g \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ so ist $f^*g = g \circ f$ und daher ist die Formel

$$f^*(dg) = d(f^*g) \tag{7}$$

eine Umformulierung der Kettenregel. Mit $g(y) = y_j$ gilt insbesondere

$$f^*dy_j = df_j$$

für $j = 1, \ldots, p$. Daraus folgt für $J = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{I}_k(p)$

$$f^*dy_J = df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_k}.$$

Wenden wir nun die Leibnitz-Regel in (ii) auf diese Formel an so ergibt sich (mit vollständiger Induktion)

$$d(f^*dy_J) = 0. \tag{8}$$

Für eine k-Form $\omega = \sum_{J\in\mathcal{I}_k(p)} b_J dy_J$ mit $b_J \in C^\infty(V)$ gilt daher

$$\begin{aligned}
d(f^*\omega) &= d\left(\sum_{J\in\mathcal{I}_k(p)} (f^*b_J)(f^*dy_J)\right) \\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}_k(p)} (d(f^*b_J)) \wedge (f^*dy_J) \\
&= \sum_{J\in\mathcal{I}_k(p)} (f^*(db_J)) \wedge (f^*dy_J) \\
&= f^*\left(\sum_{J\in\mathcal{I}_k(p)} (db_J) \wedge dy_J\right) \\
&= f^*(d\omega)
\end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichung aus (8) und der Leibnitz-Regel in (ii), die dritte aus (7), die vierte aus Lemma 2.3 (ii), und die letzte aus (6). Damit ist der Satz bewiesen. □

Nach Satz 2.7 haben wir eine endliche Folge von linearen Operatoren

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U)$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild eines jeden Operators enthalten ist im Kern des darauf folgenden. Wir nennen eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(U)$ **geschlossen** wenn $d\omega = 0$ ist und **exakt** wenn es eine $(k-1)$-Form $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ gibt so dass $d\alpha = \omega$ ist. Jede exakte k-Form ist also geschlosssen. Wir werden aber sehen dass eine geschlossene k-Form nicht unbedingt exakt sein muss. Die Übung 2.8 wird jedoch zeigen, dass für sternförmige Gebiete U jede geschlossene k-Form mit $k \geq 1$ notwendigerweise auch exakt ist.

Differentialformen in der Dimension drei

Wir betrachten den 3-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten x, y, z. Dann ist

$$\Lambda^0(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}, \qquad \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3, \qquad \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3, \qquad \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}.$$

Der Isomorphismus $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Basis dx, dy, dz und der Isomorphismus $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$ durch die Basis $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $\mathrm{Vekt}(U) := C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ der Raum der glatten Vektorfelder auf U. Die einem Vektorfeld $v = (a, b, c) : U \to \mathbb{R}^3$ zugeordnete 1-Form und 2-Form sind

$$\alpha_v := a\,dx + b\,dy + c\,dz, \qquad \omega_v := a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy. \tag{9}$$

Dies ergibt Isomorphismen $\mathrm{Vekt}(U) \to \Omega^1(U)$ und $\mathrm{Vekt}(U) \to \Omega^2(U)$. Das Differential der 1-Form α_v ist

$$d\alpha_v = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Diese 2-Form wird wiederum mit dem Vektorfeld

$$\mathrm{rot}(v) := \begin{pmatrix} \partial c/\partial y - \partial b/\partial z \\ \partial a/\partial z - \partial c/\partial x \\ \partial b/\partial x - \partial a/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \nabla \times v$$

identifiziert. Hier verwenden wir das Kreuzprodukt und rechnen formal mit dem Ausdruck $\nabla := (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ wie mit einem Vektor. Ebenso erhalten wir

$$d\omega_v = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot v)\, dx \wedge dy \wedge dz,$$

wobei mit $\nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle$ formal das standard innere Produkt gemeint ist. Zusammenfassend ergibt sich

$$df = \alpha_{\mathrm{grad}(f)}, \qquad d\alpha_v = \omega_{\mathrm{rot}(v)}, \qquad d\omega_v = \mathrm{div}(v)\, dx \wedge dy \wedge dz \tag{10}$$

für $f \in C^\infty(U)$ und $v \in \mathrm{Vekt}(U)$ mit

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f, \qquad \mathrm{rot}(v) = \nabla \times v, \qquad \mathrm{div}(v) = \nabla \cdot v$$

Es folgt nun aus Satz 2.7 (oder auch durch direktes Nachrechnen) dass

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0, \qquad \mathrm{div}(\mathrm{rot}(v)) = 0 \tag{11}$$

für $f \in C^\infty(U)$ und $v \in \mathrm{Vekt}(U)$. Ausserdem gilt

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{12}$$

Dies ist der **Laplace-Operator**.

Übungen

Übung 2.8 (**Lemma von Poincaré).** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig** (das heisst wenn $x \in U$ ist dann ist auch $tx \in U$ für jedes $t \in [0,1]$). Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega^k(U)$ eine geschlossene k-Form. Dann ist ω exakt. **Hinweis:** Definiere $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ durch

$$\alpha(x; \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) := \int_0^1 \omega(tx; x, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) t^{k-1}\, dt$$

für $x \in U$ und $\xi_1, \dots \xi_{k-1} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $d\alpha = \omega$.

Übung 2.9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, und $\omega_v \in \Omega^{n-1}(U)$ gegeben durch

$$\omega_v(x; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) := \det(v(x), \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

für $x \in U$ und $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n, \tag{13}$$

$$d\omega_v = \operatorname{div}(v)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \tag{14}$$

Übung 2.10. Der $*$-Operator $* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ ist durch

$$*dx_I := \varepsilon(\sigma) dx_{*I}$$

für $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k(n)$ definiert, wobei $*I = (j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathcal{I}_{n-k}(n)$ so gewählt ist, dass $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\}$, und die Permutation $\sigma \in S_n$ durch $\sigma(\nu) = i_\nu$ für $\nu = 1, \dots, k$ und $\sigma(\nu) = j_{\nu-k}$ für $\nu = k+1, \dots, n$ definiert ist. Da der $*$-Operator linear ist, ist er durch die Bilder der Basisvektoren dx_I eindeutig bestimmt. Er hat folgende Eigenschaften.

(i) Für jedes $I \in \mathcal{I}_k(n)$ gilt

$$**\, dx_I = (-1)^{k(n-k)} dx_I, \qquad dx_I \wedge *dx_I = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ausserdem ist $dx_I \wedge *dx_J = 0$ für $I, J \in \mathcal{I}_k(n)$ mit $I \neq J$.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, und

$$\alpha_v := \sum_{i=1}^n v_i(x)\, dx_i \in \Omega^1(U).$$

Dann gilt $*\alpha_v = \omega_v$ und $d(*\alpha_v) = \operatorname{div}(v)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (siehe Übung 2.9). Für jede glatte Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$*\, d * df = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

(iii) Für $n = 3$ gilt

$$*dx = dy \wedge dz, \qquad *dy = dz \wedge dx, \qquad *dz = dx \wedge dy.$$

Ausserdem gilt $*\omega_v = \alpha_v$ und $*d\alpha_v = \alpha_{\operatorname{rot}(v)}$ für jedes Vektorfeld v auf $\mathbb{R}^3$.

3 Orientierung

Unser Ziel ist es, Differentialformen vom Grade d über Untermannigfaltigkeiten der Dimension d zu integrieren. Dabei spielt der Begriff der Orientierung eine zentrale Rolle. Den Ausgangspunkt bildet folgende Definition.

Orientierte Vektorräume

Sei X ein d-dimensionaler reller Vektorraum. Zwei geordnetet Basen

$$e_1, \dots, e_d, \qquad \widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_d$$

haben **die gleiche Orientierung** wenn die $(d \times d)$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$, die durch die Formel

$$\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \dots, d,$$

definiert ist, positive Determinante hat. Der Begriff "gleiche Orientierung" definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von X mit genau zwei Äquivalenzklassen. Eine **Orientierung** von X ist die Wahl einer dieser Äquivalenzklassen von Basen. Ist eine Orientierung von X gegeben so nennen wir die Basen in dieser ausgewählten Äquivalenzklasse **positiv** und die anderen Basen **negativ**. Ein **orientierter Vektorraum** ist ein endlichdimensionaler reller Vektorraum zusammen mit einer Orientierung.

Eine Orientierung von X wird also durch eine Basis bestimmt. Die positiven (bzw. negativen) Basen sind dann jene die aus dieser Basis durch eine Transformation mit positiver (bzw. negativer) Determinante hervorgehen. Vertauschen wir zum Beispiel zwei Elemente einer positiven Basis so erhalten wir eine negative Basis. Die **Standardorientierung** des $\mathbb{R}^d$ wird durch die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bestimmt. Ist $\Phi : X \to Y$ ein Vektorraumisomorphismus zwischen zwei orientierten Vektorräumen, so nennen wir ihn **orientierungserhaltend** wenn er positive Basen von X in positive Basen von Y überführt und **orientierungsumkehrend** wenn er positive Basen von X in negative Basen von Y überführt. Ein orientierungserhaltender Isomorphismus überführt natüerlich auch negative Basen von X in negative Basen von Y und ein orientierungsumkehrender Isomorphismus überführt negative Basen von X in positive Basen von Y. Mit anderen Worten, stellen wir die lineare Abbildung Φ als Matrix bezüglich zweier positiver Basen von X und Y dar, so ist Φ orientierungserhaltend genau dann wenn die Determinante dieser Matrix positiv ist, und orientierungsumkehrend genau dann wenn die Determinante dieser Matrix negativ ist.

Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun diesen Begriff der Orientierung auf d-dimensionale glatte (C^∞) Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ übertragen. Zur Erinnerung diskutieren wir nochmals die zugrundeliegenden Begriffe.

Gegeben seien natürliche Zahlen d, n mit $0 \le d \le n$. Eine Teilmenge

$$M \subset \mathbb{R}^n$$

heisst **d-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^n$ wenn es für jeden Punkt $p_0 \in M$ eine M-offene Teilmenge $U_0 \subset M$ gibt, die p_0 enthält und zu einer offenen Teilmenge $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ C^∞-diffeomorph ist. Einen solchen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi_0 : U_0 \to V_0$ nennen wir eine **Karte** von M, die M-offene Menge U_0 nennen wir ein **Kartengebiet** von M, und die Umkehrabbildung $\psi_0 := \varphi_0^{-1} : V_0 \to U_0$ nenen wir eine **glatte Parametrisierung** des Kartengebiets.

Bei dieser Formulierung sind verschiedene Dinge zu beachten. Zunächst einmal ist die Teilmenge $U_0 \subset M$, von der hier die Rede ist, **keine** offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (ausser im Fall $d = n$) sondern sie ist lediglich offen bezüglich der **Relativtopologie** von M. Wie wir in der Vorlesung bewiesen haben, heisst das, dass es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U \cap M = U_0$ ist. Wenn wir also von einer glatten Abbildung $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^d$ sprechen, so ist zu beachten was damit gemeint ist, nämlich, dass eine glatte Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $U \cap M = U_0$ ist und die Einschränkung von φ auf $U \cap M = U_0$ mit φ_0 übereinstimmt. Eine Karte $\varphi_0 : U_0 \to V_0$ ist also in diesem Sinne eine glatte Abbildung, die zusätzlich noch bijektiv ist und eine glatte Umkehrabbildung besitzt, eben die genannte Parametrisierung $\psi_0 : V_0 \to U_0$ des Kartengebiets. Diese Umkehrabbildung ist natürlich glatt im üblichen Sinne, da V_0 ja tatsächlich eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist und wir ψ_0 als Abbildung von V_0 nach $\mathbb{R}^n$ betrachten können (und dabei vorübergehend igonorieren, dass die Werte von ψ_0 in $U_0 \subset M$ enthalten sind).

Kehren wir nun zurück zu unserer Untermannigfaltigkeit M, so können wir also M (nach Definition) durch Kartengebiete U_α (mit Indizes α in einer Menge A) überdecken und können dazu noch glatte Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ wählen. Ein solches System von Karten $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ heisst **Atlas** von M. Ist M kompakt so folgt aus der Charakterisierung der Kompaktheit durch die Überdeckungseigenschaft [2], dass M einen endlichen Atlas besitzt. Für je zwei Karten $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ und $\varphi_\beta : U_\beta \to V_\beta$ spielen die **Übergangsabbildungen**

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

eine wichtige Rolle (siehe Abbildung 1). Da φ_α und φ_β insbesondere Homöomorphismen sind (also bijektiv und in beide Richtungen stetig), und $U_\alpha \cap U_\beta$ eine M-offene Teilmenge von M ist, sind auch die Teilmengen $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\beta$ offene Mengen in $\mathbb{R}^d$ und $\varphi_{\beta\alpha}$ ist eine glatter Diffeomorphismus zwischen diesen Mengen.

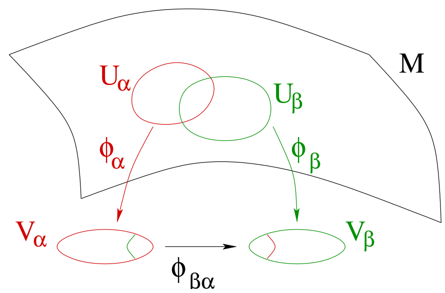

Abbildung 1: Übergangsabbildungen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$T_pM := \left\{\dot\gamma(0)\,|\,\gamma \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\ \gamma(t)\in M\ \forall t\in\mathbb{R},\ \gamma(0)=p\right\}.$$

Wir hatten in der Vorlesung gezeigt dass T_pM ein d-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_pM = \operatorname{im} d\psi_\alpha(x)$$

ist für jede glatte Parametrisierung $\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ eines Kartengebiets $U_\alpha \subset M$ mit $p \in U_\alpha$ und $x = \psi_\alpha^{-1}(p) \in V_\alpha$. Insbesondere ist die Ableitung

$$d\psi_\alpha(x) : \mathbb{R}^d \to T_pM, \qquad p := \psi_\alpha(x),$$

ein Vektorraumisomorphismus für alle $\alpha \in A$ und $x \in V_\alpha$.

Übung 3.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist das **Tangentialbündel**

$$TM := \{(p,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\,|\,p\in M,\ v\in T_pM\}$$

eine glatte $2d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$.

Beispiel 3.2. Zur Erinnerung nochmals ein Beispiel. Die Menge

$$M := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy=0\right\}$$

ist keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Zwar ist die Teilmenge

$$U_0 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\,|\,-1<x<1,\ y=0\}\subset M$$

diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$, jedoch ist U_0 nicht M-offen. In der Vorlesung hatten wir gezeigt dass eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine d-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit ist wenn es für jeden Punkt $p_0 \in M$ eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ gibt, so dass $p_0 \in U$ ist, 0 ein regulärer Wert von f ist, und $U \cap M = \{x \in U\,|\,f(x)=0\}$. In unserem Beispiel wäre $n=2$ und $d=1$, jedoch besitzt der Punkt $p_0=(0,0)$ keine solche Umgebung. Denn wenn $f : U \to \mathbb{R}$ auf $U \cap M$ verschwindet so ist auch $df(0,0)=0$ und somit ist 0 kein regulärer Wert von f.

Orientierte Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. Eine* **Orientierung von** *M ist eine Orientierung aller Tangentialräume T_pM und wir verlangen, dass diese Orientierungen wie folgt zusammenpassen: Für jeden Punkt $p_0 \in M$ gibt es ein Kartengebiet $U_0 \subset M$ mit $p_0 \in U_0$ und eine glatte Parametrisierung $\psi_0 : V_0 \to U_0$ (auf einer offenen Teilmenge $V_0 \subset \mathbb{R}^d$) so dass die Ableitung $d\psi_0(x) : \mathbb{R}^d \to T_{\psi_0(x)}M$ für jedes $x \in V_0$ ein orientierungserhaltender Isomorphismus ist (das heisst $d\psi_0(x)$ überführt die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ in eine positive Basis von $T_{\psi_0(x)}M$). Eine solches ψ_0 nennen wir eine* **orientierte Parametrisierung** *von U_0 und die Umkehrabbildung $\varphi_0 := \psi_0^{-1} : U_0 \to V_0$ eine* **orientierte Karte***. M heisst* **orientierbar** *wenn eine solche Orientierung existiert. Eine* **orientierte Untermannigfaltigkeit** *von $\mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung.*

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit so existiert offensichtlich ein Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, der ausschliesslich aus orientierten Karten besteht. In diesem Fall sind alle Übergangsabbildungen $\varphi_{\beta\alpha}$ **orientierungserhaltend**, das heisst für $\alpha, \beta \in A$ und $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ gilt

$$\det\left(d\varphi_{\beta\alpha}(x)\right) > 0. \tag{15}$$

Wir sprechen dann von einem **orientierten Atlas**. Umgekehrt induziert jeder orientierte Atlas eine Orientierung von M; wir definieren die Orientierung von T_pM als die durch den Isomorphism $d\psi_\alpha(x) : \mathbb{R}^d \to T_pM$ induzierte Orientierung, wobei $\alpha \in A$ so gewählt ist, dass $p \in U_\alpha$ ist, und $x := \varphi_\alpha(p)$, $\psi_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}$. Nach (15) ist diese Definition der Orientierung von T_pM unabhängig von α.

Beispiel 3.4. Die Einheitssphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist eine orientierte Untermannigfaltigkeit. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $T_xS^n = x^\perp$ ist positiv genau dann wenn $x, v_1, \ldots, v_n$ eine positive Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Beispiel 3.5. Der standard n-Torus

$$\mathbb{T}^n := \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1\}.$$

ist orientiert. Der Tangentialraum $T_z\mathbb{T}^n = \{(it_1z_1, \ldots, it_nz_n) \,|\, t_\nu \in \mathbb{R}\}$ besitzt einen kanonischen isomorphismus zu $\mathbb{R}^n$ (nämlich $t \mapsto (it_1z_1, \ldots, it_nz_n)$) und dieser induziert die Standardorientierung des Tangentialraumes.

Beispiel 3.6. Das Moebiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist nicht orientierbar (siehe Abbildung 2).

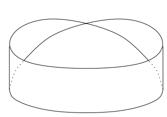

Abbildung 2: Das Möbiusband

4 Integration

Sei $V \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge und $\tau \in \Omega^d(V)$ eine Differentialform vom Grade d. Die Koordinaten auf V bezeichnen wir mit $y = (y_1, \ldots, y_d)$. Dann gibt es eine glatte (d.h. C^∞) Funktion $h : V \to \mathbb{R}$ so dass

$$\tau = h(y)\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_d.$$

Nehmen wir nun an τ habe **kompakten Träger** in V. Das heisst, die Menge

$$\mathrm{supp}(\tau) := \overline{\{y \in V \mid h(y) \neq 0\}}$$

(der Abschluss ist hier in $\mathbb{R}^d$ zu verstehen) ist kompakt und in V enthalten. Dazu äquivalent ist die Bedingung, dass der Abschluss der Menge $\{y \in V \mid h(y) \neq 0\}$ bezüglich der Relativtopologie von V kompakt ist. Wieder anders formuliert, es gibt eine kompakte Menge $K \subset V$ so dass h auf dem Komplement $V \setminus K$ verschwindet. Daraus folgt dass das Riemann-Integral von h auf V definiert ist: wir können ein Quadergebäude B konstruieren mit $K \subset B \subset V$ und h über B integrieren (siehe Abbildung 3). Wir schreiben dies als Integral über V und

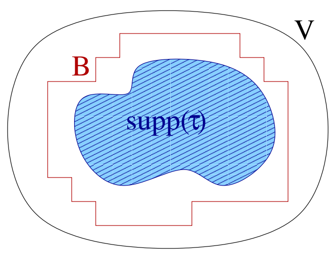

Abbildung 3: Differentialform mit kompaktem Träger

definieren

$$\int_V \tau := \int_V h(y) dy_1 \cdots dy_d.$$

Sei nun $V' \subset \mathbb{R}^d$ eine weitere offene Teilmenge mit Koordinaten $x = (x_1, \ldots, x_d)$ und $\varphi : V' \to V$ ein glatter Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\varphi^*\tau = h(\varphi(x)) \det(d\varphi(x))\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$$

(siehe Gleichung (4) in Lemma 2.3). Hat ω kompakten Träger in V so hat auch die zurückgezogene d-Form $\varphi^*\tau \in \Omega^d(V')$ kompakten Träger in V'. Ist die Determinante von $d\varphi(x)$ überall positiv so folgt aus der in der Vorlesung bewiesenen Transformationsformel, dass

$$\int_{V'} \varphi^*\tau = \int_V \tau. \tag{16}$$

Diese Gleichung gilt nur für orientierungerhaltende Diffeomorphismen φ. Bei einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus ändert sich das Vorzeichen des Integrals. Diese Beobachtungen erlauben es uns, das Integral auf Kartengebiete in orientierten Untermannigfaltigkeiten zu übertragen.

Integration über Kartengebiete

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge die M enthält, und sei $\omega \in \Omega^d(W)$. Sei $U \subset M$ ein Kartengebiet und $\psi : V \to U$ eine glatte orientierte Parametrisierung von U. Wir nehmen an dass der Träger

$$\mathrm{supp}(\omega) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \omega_x \neq 0\}}$$

das Kartengebiet U in einer kompakten Menge schneidet. Dann hat $\psi^*\omega$ kompakten Träger in V und wir definieren das **Integral von ω über U** durch

$$\int_U \omega := \int_V \psi^*\omega.$$

Das Integral hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Ist nämlich $\psi' : V' \to U$ eine weitere orientierte Parametrisierung von U, so ist der Diffeomorphismus $\varphi := \psi^{-1} \circ \psi' : V' \to V$ orientierungserhaltend und es gilt

$$\int_{V'} (\psi')^*\omega = \int_{V'} (\psi \circ \varphi)^*\omega = \int_{V'} \varphi^*\psi^*\omega = \int_V \psi^*\omega.$$

Die letzte Gleichung folgt aus (16) mit $\tau = \psi^*\omega$.

Integral über kompakte Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte orientierte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, enthalten in einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, und $\omega \in \Omega^d(W)$. Dann gibt es einen endlichen orientierten Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Wir wählen eine glatte Partition der Eins $\rho_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ so dass

$$\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M \subset U_\alpha, \qquad \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \quad \forall \;\; x \in M. \tag{17}$$

Dass eine solche Partition der Eins existiert wurde in der Vorlesung bewiesen. (Zunächst wählen wir offene Teilmengen $U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ mit $U'_\alpha \cap M = U_\alpha$. Dann wenden wir den Satz aus der Vorlesung über die Existenz von glatten Partitionen der Eins auf die Überdeckung von M durch die Mengen U'_α an.)

Definition 4.1. *Seien M, ω, U_α, ρ_α wie oben. Das* **Integral von ω über** M *ist definiert durch*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega. \tag{18}$$

Lemma 4.2. *Das Integral von ω über M ist unabhängig von der Wahl des orientierten Atlas und der Partition der Eins.*

Beweis. Ist $\{\widetilde{U}_\beta, \widetilde{\varphi}_\beta\}_{\beta \in \widetilde{A}}$ ein weiterer orientierter Atlas mit dazugehöriger Partition der Eins $\widetilde{\rho}_\beta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, so gilt

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta} \rho_\alpha \widetilde{\rho}_\beta \omega = \sum_\beta \int_{\widetilde{U}_\beta} \widetilde{\rho}_\beta \omega.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Bemerkung 4.3. Bezeichnen wir die Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ mit $x_1, \ldots, x_n$, und die Koordinaten auf $\mathbb{R}^d$ mit $y_1, \ldots, y_d$, und nehmen wir an, dass ω in der Form

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_d(n)} a_I dx_I$$

mit $a_I \in C^\infty(W)$ gegeben ist, so hat das Integral in Definition 4.1 die explizite Form

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \sum_{I \in \mathcal{I}_d(n)} \int_{V_\alpha} \rho_\alpha(\psi_\alpha(y)) a_I(\psi_\alpha(y)) \det (d\psi_{\alpha I}(y))\, dy_1 \cdots dy_d. \tag{19}$$

Hier bezeichnen wir mit $\psi_\alpha := \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to U_\alpha$ die orientierte Prametrisierung von U_α und mit $\psi_{\alpha I}$ die Komposition von ψ_α mit der Projektion auf die durch $I \in \mathcal{I}_d(n)$ bezeichneten Koordinaten.

Integration über kompakte Teilmengen

Wie bisher sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, enthalten in einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, und $\omega \in \Omega^d(W)$. Wir verlangen jedoch nicht mehr dass M kompakt ist und integrieren ω statt dessen über eine geeignete kompakte Teilmenge $G \subset M$.

Für $G \subset M$ bezeichnen wir mit ∂G den Rand von G bezüglich der Relativtopologie auf M. Das heisst, ein Punkt $p \in M$ gehört zu ∂G wenn es sowohl eine Folge in G also auch eine Folge in $M \setminus G$ gibt, die gegen p konvergiert. Wir setzen voraus, dass ∂G eine d-dimensionale Jordan-Nullmenge ist. Das heisst, dass die Menge $B \cap \psi^{-1}(\partial G) = \{y \in B \mid \psi(y) \in \partial G\}$ für jede Parametrisierung $\psi : V \to U$ eines Kartengebiets und jede kompakte Teilmenge $B \subset V$ eine Jordan-Nullmenge ist.

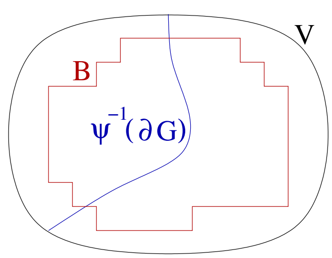

Abbildung 4: Die Menge $\psi^{-1}(\partial G)$

Lemma 4.4. *Sei $G \subset M$ eine kompakte Teilmenge deren Rand ∂G eine d-dimensionale Nullmenge ist, $\psi : V \to U$ eine orientierte Parametrisierung eines Kartengebiets, und $B \subset V$ eine kompakte Menge (siehe Abbildung 4). Dann gilt*

$$\partial(B \cap \psi^{-1}(G)) \subset \partial B \cup (B \cap \psi^{-1}(\partial G)). \tag{20}$$

Beweis. Sei $y \in \partial(B \cap \psi^{-1}(G))$ und $y \notin \partial B$. Dann gibt es zwei Folgen $y_i \in B \cap \psi^{-1}(G)$ und $y_i' \in V \setminus (B \cap \psi^{-1}(G))$ die gegen y convergieren. Da B kompakt und damit abgeschlossen ist, gilt $y \in B \subset V$, und da $\psi(y_i) \in G$ ist, gilt auch $\psi(y) = \lim_{i\to\infty} \psi(y_i) \in G$. Insbesondere ist y ein Element der offenen Menge $B \setminus \partial B$ und daher gilt $y_i' \in B$ für hinreichend grosse i. Daraus folgt $\psi(y_i') \notin G$ für grosse i und deshalb ist $\psi(y)$ sowohl der Grenzwert einer Folge $\psi(y_i) \in G$ als auch einer Folge $\psi(y_i') \in M \setminus G$. Also gilt $\psi(y) \in \partial G$ und somit $y \in B \cap \psi^{-1}(\partial G)$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir können nun so vorgehen wie oben. Schneidet der Träger von $\omega \in \Omega^d(W)$ das Kartengebiet U in einer kompakten Menge und ist $\psi : V \to U$ eine glatte orientierte Parametrisierung, so hat die zurückgezogene d-Form $\psi^*\omega \in \Omega^d(V)$ kompakten Träger in V, und wir wählen wir ein Quadergebäude $B \subset V$ das den Träger von $\psi^*\omega$ enthält. Nach Lemma 4.4 ist der Rand der Menge $B \cap \psi^{-1}(G)$ eine Jordan-Nullmenge. Damit ist $B \cap \psi^{-1}(G)$ Jordan-messbar und $\psi^*\omega$ verschwindet ausserhalb dieser Menge. Wir definieren daher das Integral von ω über $G \cap U$ als das Integral der zurückgezogenen d-Form

$$\psi^*\omega =: h(y)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_d$$

über dem zurückgezogenen Gebiet $\psi^{-1}(G)$:

$$\int_{G\cap U} \omega := \int_{\psi^{-1}(G)} \psi^*\omega := \int_{B\cap\psi^{-1}(G)} h(y)dy_1 \cdots dy_d. \tag{21}$$

Wie bisher folgt aus der Transformationsformel, dass dieses Integral unabhängig von der Wahl der orientierten Parametrisierung ψ ist.

Ist $\omega \in \Omega^d(W)$ eine beliebige d-Form so wählen wir einen orientierten Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ mit der Zusatzeigenschaft, dass U_α beschränkt ist und $\overline{U}_\alpha \subset M$ für jedes $\alpha \in A$ (wobei mit $\overline{U}_\alpha$ der Abschluss der Menge U_α im umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$ gemeint ist). Dann wählen wir eine Partition der Eins $\rho_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ so dass $\mathrm{supp}(\rho_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ kompakt ist, ρ_α nur für endlich viele α von Null verschieden ist, und

$$\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M \subset U_\alpha, \qquad \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \quad \forall \ x \in G.$$

Unter unseren Voraussetzungen ist die Menge $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M$ kompakt: ist p_i eine Folge in $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M$ so konvergiert eine Teilfolge gegen ein $p \in \mathrm{supp}(\rho_\alpha)$; da $p_i \in U_\alpha$ und $\overline{U}_\alpha \subset M$ ist folgt $p \in M$ und damit $p \in \mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M$. Zur Konstruktion der ρ_α gehen wir wie oben vor. Wir überdecken G zunächts durch endlich viele U_α, wählen dann für diese α beschränkte offene Mengen U_α' mit $U_\alpha' \cap M = U_\alpha$, und wenden schliesslich den Satz aus der Vorlesung über die Existenz einer Partition der Eins auf die endliche Überdeckung der kompakten Menge G durch die U_α' an. Nun definieren wir das **Integral von ω über G** durch

$$\int_G \omega := \sum_\alpha \int_{G\cap U_\alpha} \rho_\alpha \omega. \tag{22}$$

Wie bisher ist dieses Integral unabhängig von der Wahl der U_α und ρ_α.

5 Der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale glatte orientierte Untermannigfaltigkeit ist und $G \subset M$ eine kompakte Teilmenge ist, deren Rand ∂G (bezüglich der Relativtopologie von M) eine $(d-1)$-dimensionale Untemannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Unter dieser Voraussetzung machen wir drei Beobachtungen:

(a) Ist $\varphi : U \to V$ eine Karte von M so ist $\varphi(\partial G \cap U)$ eine Untermannigfaltigkeit.

(b) ∂G ist eine d-dimensionale Nullmenge.

(c) ∂G ist orientiert.

Zum Beweis von (a) sei $U_0 \subset \partial G$ ein Kartengebiet und $\varphi_0 : U_0 \to V_0$ eine Karte mit Werten in einer offenen Menge $V_0 \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Dann ist $U_0' := \varphi(U_0 \cap U)$ ein Kartengebiet von $\varphi(\partial G \cap U)$, $V_0' := \varphi_0(U_0 \cap U) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ eine offene Menge, und $\varphi_0' := \varphi_0 \circ \varphi^{-1} : U_0' \to V_0'$ eine Karte für $\varphi(\partial G \cap U)$. Dies beweist (a). Ausserdem folgt aus (a) dass $\varphi(\partial G \cap U) \cap B$ für jede kompakte Teilmenge $B \subset V$ eine Jordan-Nullmenge ist und das beweist (b).

Um (c) zu zeigen, bemerken wir, dass es eine eindeutige glatte Abbildung

$$\nu : \partial G \to \mathbb{R}^n$$

gibt, die jedem $p \in \partial G$ den nach aussen gerichteten Einheitsnormalenvektor in T_pM zuordnet. Das heisst, der Vektor $\nu(p)$ ist eindeutig bestimmt durch folgende Eigenschaften:

$$\nu(p) \in T_pM, \qquad \nu(p) \perp T_p\partial G, \qquad \|\nu(p)\| = 1,$$

und wenn $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine glatte Kurve ist mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = \nu(p)$ dann gilt $\gamma(t) \notin G$ für hinreichend kleine $t > 0$. Eine Basis $v_1, \dots, v_{d-1}$ von $T_p\partial G$ ist genau dann positiv wenn die Vektoren

$$\nu(p), v_1, \dots, v_{d-1}$$

eine positive Basis von T_pM bilden. Wir überlassen es dem Leser, nachzuprüfen, dass diese Orientierungen der Tangentialräume von ∂G in der gewünschten Weise zusammenpassen. Diese Vorbemerkungen zeigen, dass wir eine $(d-1)$-Form über ∂G und eine d-Form über G integrieren können. Damit sind wir bereit für die Formulierung des **Satzes von Stokes**.

Satz 5.1 (**Stokes**). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale glatte orientierte Untermannigfaltigkeit und $G \subset M$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand ∂G eine $(d-1)$-dimensionale Untemannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt*

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega$$

für jede $(d-1)$-Form ω auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ die M enthält.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $d = n$. Dann ist

$$M = W \subset \mathbb{R}^d$$

eine offene Teilmenge und $G \subset W$ eine kompakte Menge, deren Rand eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist. Eine $(d-1)$-Form auf W können wir dann in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{j-1} v_j(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_d$$

schreiben, wobei $v = (v_1, \ldots, v_d) : W \to \mathbb{R}^d$ ein glattes Vektorfeld ist. Sei $\nu : \partial G \to \mathbb{R}^d$ das nach aussen gerichtete Einheitsnormalenfeld. Wir werden folgende Gleichung beweisen

$$\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \; dS. \tag{23}$$

Da $d\omega = \operatorname{div}(v)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ ist (siehe Übung 2.9), folgt dann

$$\int_G d\omega = \int_G \operatorname{div}(v)\, dx_1 \cdots dx_d = \int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \; dS = \int_{\partial G} \omega.$$

Hier folgt die zweite Gleichung aus dem Satz von Gauss.

Wir beweisen (23). Sei $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ eine offene Menge und sei

$$\psi : V \to \partial G$$

eine glatte orientierte Parametrisierung eines Kartengebiets von ∂G. Wir zeigen zunächst, dass der äussere Einheitsnormalenvektor $\nu(\psi(y)) \in \mathbb{R}^d$ für jedes $y \in V$ durch die Formel

$$\nu_j(\psi(y)) \sqrt{\det \left(d\psi(y)^T d\psi(y) \right)} = (-1)^{j-1} \det \left(d\psi_{I_j}(y) \right), \qquad j = 1, \ldots, d, \tag{24}$$

gegeben ist, wobei wir mit $\psi_{I_j} : V \to \mathbb{R}^{d-1}$ die Abbildung bezeichnen, die sich aus ψ dadurch ergibt, dass wir die $j$te Koordinate fortlassen, das heisst

$$\psi_{I_j}(y) := (\psi_1(y), \ldots, \psi_{j-1}(y), \psi_{j+1}(y), \ldots, \psi_d(y)).$$

Zum Beweis von (24) halten wir ein Element $y \in V$ fest und bezeichnen mit $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$ den durch die rechte Seite von (24) definierten Vektor:

$$\eta_j := (-1)^{j-1} \det \left(d\psi_{I_j}(y) \right), \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Für $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir die Matrix

$$A_\xi := \left(\xi, \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_{d-1}}(y) \right) \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Entwickeln wir die Determinante von A_ξ nach der ersten Spalte so ergibt sich

$$\det(A_\xi) = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} \xi_j \det(d\psi_{I_j}(y)) = \langle \xi, \eta \rangle . \tag{25}$$

Mit $\xi \in \operatorname{im} d\psi(y)$ verschwindet die linke Seite von (25). Also steht η senkrecht auf $\operatorname{im} d\psi(y) = T_{\psi(y)}\partial G$. Für $\xi = \eta$ erhalten wir $\det(A_\eta) = \|\eta\|^2 > 0$. Also bilden die Vektoren

$$\eta, \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_{d-1}}$$

eine positive Basis von $\mathbb{R}^d$ und, da die Vektoren $\partial\psi/\partial y_1, \ldots, \partial\psi/\partial y_{d-1}$ nach Wahl von ψ eine positive Basis von $T_{\psi(y)}\partial G$ bilden, folgt dass der Vektor η nach aussen zeigt. Ausserdem gilt

$$A_\eta^T A_\eta = \begin{pmatrix} \|\eta\|^2 & 0 \\ 0 & d\psi(y)^T d\psi(y) \end{pmatrix},$$

und daher

$$\|\eta\|^2 \det\left(d\psi(y)^T d\psi(y)\right) = \det(A_\eta^T A_\eta) = \det(A_\eta)^2 = \|\eta\|^4 .$$

Also gilt

$$\|\eta\|^2 = \det\left(d\psi(y)^T d\psi(y)\right)$$

und daraus folgt (24).

Da wir nun (24) bewiesen haben, erhalten wir im Fall

$$\operatorname{supp}(v) \cap \partial G \subset \psi(V)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} \langle v, \nu \rangle \, dS &= \int_{\psi(V)} \langle v, \nu \rangle \, dS \\
&= \int_V \langle v(\psi(y)), \nu(\psi(y)) \rangle \sqrt{\det\left(d\psi(y)^T d\psi(y)\right)} \, dy_1 \cdots dy_{d-1} \\
&= \int_V \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} v_j(\psi(y)) \det(d\psi_{I_j}(y)) \, dy_1 \cdots dy_{d-1} \\
&= \int_V \psi^* \omega = \int_{\psi(V)} \omega = \int_{\partial G} \omega.
\end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichung aus einer allgemeinen Identität für Oberflächenintegrale, die wir in der Vorlesung bewiesen haben. Die dritte Gleichung folgt dann aus (24) und die vierte Gleichung aus (4). Damit haben wir (23) für $(d-1)$-Formen mit kleinem Träger bewiesen. Der Fall einer beliebigen $(d-1)$-Form ω auf W lässt sich auf den lokalen Fall mit Hilfe von Partitionen der Eins zurückführen. Damit ist der Satz von Stokes im Fall $d = n$ bewiesen.

Betrachten wir nun den Fall $d < n$. Wir wählen eine endliche Überdeckung von G durch Kartengebiete $U_\alpha \subset M$ so dass $\overline{U}_\alpha \subset M$ für alle α. Weiterhin wählen wir glatte orientierte Parmetrisierungen $\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ auf offenen Teilmengen $V_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ und eine Partition der Eins $\rho_\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ so dass so dass $\mathrm{supp}(\rho_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ kompakt ist und

$$\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \cap M \subset U_\alpha, \qquad \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1 \quad \forall \ x \in G.$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\omega_\alpha := \psi_\alpha^*(\rho_\alpha \omega) \in \Omega^{d-1}(V_\alpha), \qquad G_\alpha := \psi_\alpha^{-1}(G), \qquad \partial G_\alpha := \psi_\alpha^{-1}(\partial G).$$

Dann ist ∂G_α der Rand von G_α in der Relativtopologie von V_α. Da ω_α auf V_α kompakten Träger hat, schliessen wir aus dem Fall $d = n$, dass

$$\int_{G_\alpha} d\omega_\alpha = \int_{\partial G_\alpha} \omega_\alpha.$$

Dies ist nach Definition äquivalent zu der Gleichung

$$\int_{G \cap U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial G \cap U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Bilden wir nun die Summe über alle α so folgt hieraus die Behauptung des Satzes von Stokes. $\square$

Beispiel 5.2. Wir betrachten die 1-Form

$$\omega := \frac{1}{2}\big(xdy - ydx\big), \qquad d\omega = dx \wedge dy.$$

Für ein Jordan-messbares Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist das Integral von $d\omega$ über G gleich dem Jordan-mass, beziehungsweise dem Flächeninhalt, oder dem “2-dimensionalen Volumen”. Ist der Rand von G eine glatte 1-Mannigfaltigkeit, so gilt nach Stokes

$$\mu_2(G) = \int_G dx \wedge dy = \frac{1}{2} \int_{\partial G} \big(xdy - ydx\big).$$

Beispiel 5.3. Wir betrachten die 1-Form

$$\omega := \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Diese Form ist geschlossen (Übung). Sie ist jedoch nicht exakt. Andernfalls müsste ihr Integral über jeder geschlossenen Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach dem Satz von Stokes verschwinden. Dies wäre der Fall $d = 1$ mit $\partial \Gamma = \emptyset$ und einer 1-form df. Jedoch lässt sich leicht zeigen, dass das Integral von ω

über S^1 (mit der Standardorientierung gegen den Uhrzeigersinn) gleich 1 ist. Allgemeiner, ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine glatte Kurve mit

$$\gamma(0) = \gamma(1)$$

und schreiben wir $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ so ist

$$\iota(\gamma) := \int_{[0,1]} \gamma^*\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \, dt$$

eine ganze Zahl. Man kann $\iota(\gamma)$ als Umlaufzahl um den Nullpunkt interpretieren (Übung).

Beispiel 5.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $G \subset M$ eine kompakte Teilmenge, dessen Rand (in der Relativtopologie von M) eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Sei weiterhin $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $v = (a, b, c) : U \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld auf U. Wir betrachten die 1-Form

$$\alpha_v := a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

Wie wir gesehen haben ist

$$\begin{aligned} d\alpha_v &= \omega_{\mathrm{rot}(v)} \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Nach Stokes gilt

$$\int_G \omega_{\mathrm{rot}(v)} = \int_{\partial G} \alpha_v.$$

Beispiel 5.5. Wir betrachten die 2-Form

$$\omega := \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Diese 2-Form ist geschlossen aber nicht exakt. Ihr Integral über der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist

$$\int_{S^2} \omega = \mathrm{Vol}_2(S^2) = 4\pi.$$

(Übung: Diese Aussage mit dem Satz von Stokes beweisen.)

Literatur

[1] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer Verlag, 2003.

[2] D. Salamon, *Kompakte metrische Räume und der Satz von Arzela-Ascoli*, Analysis I, ETH Zürich, 27. November 2014.
`https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana1-cpct.pdf`

[3] D. Salamon, *Die Determinante*, Analysis II, ETH Zürich, 6. März 2015.
`http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana2-det.pdf`