Mass und Integral – Vorlesungs-Script

Prof. D. Salamon

16. September 2006

Mitschrift:	**Grafiken:**	**Korrekturen:**
Lukas Lewark	Andreas Steiger	Philipp Arbenz Andrin Schmidt

Hinweis: Diese Version ist vollständig und vollständig korrigiert. Trotzdem dürfte sie nicht fehlerfrei sein; für Korrekturen und Hinweise auf Fehler sind wir sehr dankbar.

Changelog:

- 16. 9. 2006:
  Die angekündigten Nachbesserungen.
- 14. 9. 2006:
  Alle Kapitel noch einmal korrigiert, insbesondere das 2. und 6. *In den nächsten drei Tagen werden noch kleinere Nachbesserungen folgen.*
- 12. 7. 2006:
  Kapitel 5 und 6 korrigiert; Layoutänderung der Nummerierung am Rand.
- 9. 7. 2006:
  Vollständige Version, korrigiert bis auf Kapitel 5 und 6.

Warnung: Wir sind sicher dass diese Notizen eine Menge Fehler enthalten. Betreten der Baustelle auf eigene Verantwortung! Falls ihr einen entdeckt, schreibt eine Mail an `mitschriften@vmp.ethz.ch`, wir werden uns dann darum kümmern. Bitte erwähnt immer von welcher Version (die `Id` Zeile unten) ihr ausgeht, egal ob ihr einen Diff gegen die Quellen, eine korrigierte `.tex` Datei oder eine Beschreibung des Fehlers im PDF schickt. Weitere Informationen gibts unter:

`http://vmp.ethz.ch/wiki/index.php/Vorlesungsmitschriften`

`$Id: mi.tex 1469 2006-09-16 13:07:28Z lukas $`

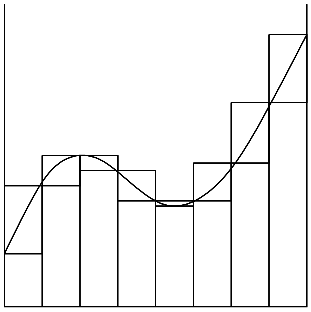
Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Literatur:

- Walter Rudin, Reelle und Komplexe Analysis, Oldenbourg
- Urs Lang, Maß und Integral, Vorlesungsnotizen vom Sommersemester 2005

Weitere Empfehlungen sowie der Link zum Script finden sich auf der Website der Vorlesung.
Riemannintegrierbarkeit ist aus der Analysisvorlesung bekannt:



$$\sup_P \underline{S}(f,P) = \inf_P \overline{S}(f,P)$$

Dieser Integralbegriff hat folgende Schwächen:
Es gibt ganz einfache, nicht riemannintegrierbare Funktionen, z.B.

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist

$$\underline{S}(f,P) = 0 \quad \text{aber} \quad \overline{S}(f,P) = 1$$

also ist f nicht riemannintegrierbar; ein intuitiver Wert dieses Integrals wäre 1, da die Funktion nur an abzählbar vielen Stellen nicht 1 ist, und das Lebesgueintegral von f ist in der Tat 1.
Limites riemannintegrierbarer Funktionen sind nicht notwendigerweise riemannintegrierbar:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$$

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x = q_1, q_2, \ldots q_n \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x$$

Sei $f \in \mathcal{R}(I)$ und $I = [0,1]$.

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

$\mathcal{R}(I)$ ist ein Vektorraum. Ist die Abbildung $\mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \|f\|$ eine Norm? Alle Normaxiome sind erfüllt, bis auf positive Definitheit: Denn die Norm einer Funktion, die nur an einer Stelle nicht 0 ist, ist auch 0; die Norm ist also nur semidefinit. Dieses Problem tritt allerdings auch bei anderen Integralbegriffen auf, jedenfalls beim Lebesgueintegral.

$$X := \frac{\mathcal{R}(I)}{\{f \mid \|f\| = 0\}}, \ \| \cdot \|$$

ist ein normierter Vektorraum. X ist aber nicht vollständig, weil es „nicht genug" riemannintegrierbare Integrale gibt. Für das Lebesgueintegral ist X vollständig, da es „hinreichend viele“ lebesgueintegrierbare Funktionen gibt. Die Beziehungen

$$\{\text{Riemannintegrierbare Funktionen}\} \leftrightarrow \{\text{Lebesgueintegrierbare Funktionen}\}$$

$$\mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{R}$$

sind also ähnlich.
Um das Lebesgueintegral einzuführen, benötigen wir Hilfsmittel aus der Maßtheorie.

1 Messbarkeit

1.1 σ-Algebren

(1.1.1) **Notation:** Sei X eine Menge. 2^X = Menge der Teilmengen $= \{A \mid A \subset X\}$ ist die *Potenzmenge* von X. Für $A \subset X$ ist $A^{\mathrm{c}} = X \setminus A$ das *Komplement* von X.

(1.1.2) **Definition:** Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset 2^X$ von Teilmengen von X heißt *σ-Algebra* wenn gilt:

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$

iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

Das σ deutet an, dass in (iii) nur *abzählbare* Vereinigungen erlaubt sind.

(1.1.3) **Bemerkung:** Sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra.

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, da $\emptyset = X^{\mathrm{c}}$.
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}$ (wähle $A_{n+1} = \emptyset, A_{n+2} = \emptyset, \ldots$)
3. $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ da $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}}$.
4. $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$

Damit sind alle konstruierbaren Mengen in $\mathcal{A}$.

(1.1.4) **Definition:** Wir nennen die Elemente von $\mathcal{A}$ *messbare* Teilmengen von X.

(1.1.5) **Definition:** Ein *messbarer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$ wobei X eine Menge ist und $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra.

(1.1.6) **Beispiel:** Sei X irgendeine Menge und $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ oder $\mathcal{A} = 2^X$.
Gibt es irgendein anderes interessantes Beispiel einer σ-Algebra?

(1.1.7) **Bemerkung:** Jeder Durchschnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra. $\mathcal{A}_i \subset 2^X$ sei eine σ-Algebra $\forall i \in I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in X \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$ ist eine σ-Algebra.

(1.1.8) **Bemerkung:** Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$. Sei $\mathcal{S}(X)$ die Menge aller σ-Algebren auf X, $\mathcal{S}(X) = \{\mathcal{A} \subset 2^X \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}\}$.
Sei

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\substack{\mathcal{A}' \in \mathcal{S}(X) \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}'}} \mathcal{A}'$$

$\overset{\text{mit Bemerkung (1.1.7)}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra auf X die $\mathcal{E}$ enthält.

(1.1.9) **Beispiel:** Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B}$:= die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, die alle offenen Mengen enthält. $\mathcal{B}$ heißt *Borel-σ-Algebra*. Elemente von $\mathcal{B}$ heißen die *Borel-Mengen.*

$$\mathcal{B} \subsetneqq 2^{\mathbb{R}}$$

was nicht so einfach zu zeigen ist.

1.2 Topologische Räume

(1.2.1) **Definition:** Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X,\mathcal{U})$, wobei X eine Menge ist und $\mathcal{U} \subset 2^X$ folgende Axiome erfüllt:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$

ii) $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$

iii) $U_i \in \mathcal{U}, i \in I \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}$

Die Elemente von $\mathcal{U}$ heißen *offene Teilmengen* von X. $F \subset X$ heißt *abgeschlossen* wenn F^{c} offen ist.

(1.2.2) **Beispiel:** Sei (X, d) ein *metrischer Raum*; zur Erinnerung:
$d : X \times X \to \mathbb{R}$ sodass $\forall x, y, z \in X$:

i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Eine solche Funktion d heißt *Metrik*.
$U \in X$ *offen* wenn $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.
Jeder metrische Raum (X, d) ist ein topologischer Raum.

(1.2.3) **Definition:** X, Y topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn gilt:

$$V \subset Y \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \text{ offen in } X$$

(1.2.4) **Definition:** Sei $(X,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subset 2^X$ die kleinste σ-Algebra mit der Eigenschaft dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, d.h. die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. $\mathcal{B}$ heißt *Borel σ-Algebra*. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen *Borel-messbar*.

(1.2.5) **Bemerkung:** Sei $(X,\mathcal{U})$ ein topologischer Raum.

1. Jede abgeschlossene Teilmenge $F \subset X$ ist als Komplement einer offenen Menge Borel-messbar.
2. $F_1, F_2, \ldots \subset X$ abgeschlossen $\quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ ist Borel-messbar (die sogenannten F_σ-Mengen); z.B. ist $\mathbb{Q}$ Borel-messbar und allgemein sind in einem topologischen Raum, in dem Punkte abgeschlossen sind, alle abzählbaren Mengen Borel-messbar.
3. $U_1, U_2, \ldots \subset X$ offen $\quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^\infty U_i$ ist Borel-messbar (die sogenannten G_δ-Mengen).

(1.2.6) **Beispiel von topologischen Räumen:**

1. $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$
2. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$
   $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen $\quad :\Leftrightarrow \quad U$ ist eine (abzählbare[1]) Vereinigung von Teilmengen der Form
   - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$
   - $[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$
   - $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$

[1] Es ist zu beweisen, dass jede Vereinigung offener Mengen als abzählbare Vereinigung geschrieben werden kann.

1.3 Messbare Abbildungen

(1.3.1) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und Y ein topologischer Raum, die wichtigsten Beispiele sind $Y = \mathbb{R}$ und $Y = \overline{\mathbb{R}}$.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *messbar* wenn gilt

$$V \subset Y \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \subset X \text{ messbar}$$

(1.3.2) **Bemerkung:**

1. X topologischer Raum. $f : X \to Y$ ist *Borel-messbar* wenn gilt
$$V \subset Y \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \subset X \text{ Borel-messbar}$$
2. X topologischer Raum. f stetig $\quad \Rightarrow \quad f$ Borel-messbar.
3. Sei $A \subset X$ und definiere die charakteristische Funktion von A, $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ durch
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
Dann ist χ_A genau dann messbar wenn A messbar ist.
4. Y, Z toplogische Räume, X messbarer Raum, $f : X \to Y$ messbar und $g : Y \to Z$ stetig $\quad \Rightarrow \quad g \circ f : X \to Z$ messbar. Beweis durch scharfes Hinsehen.

(1.3.3) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer und $(Y, \mathcal{U})$ ein topologischer Raum, $f : X \to Y$.

i) Die Menge $f_*\mathcal{A} := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subset 2^Y$ ist eine σ-Algebra.

ii) f ist messbar $\quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{U} \subset f_*\mathcal{A}$

iii) f messbar, $B \subset Y$ Borelmenge $\quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B)$ messbar (da $B \in f_*\mathcal{A}$)

iv) $f : X \to Y$ messbar, Z topologischer Raum, $g : Y \to Z$ Borel-messbar $\Rightarrow \quad g \circ f$ messbar.

v) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}((a, \infty]) \subset X$ messbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

Beweis:

i) $B \in f_*\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \left(f^{-1}(B)\right)^{\mathrm{c}} = f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad B^{\mathrm{c}} \in f_*\mathcal{A}$
$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_i B_i \in f_*\mathcal{A}$ falls $B_i \in f_*\mathcal{A}\ \forall i$.

ii) $\{$offene Mengen in $Y\} \subset f_*\mathcal{A}$

iii) $\mathcal{B} \subset 2^Y$ Borel σ-Algebra, ii) und f messbar $\quad \Rightarrow \quad B \subset f_*\mathcal{A}$
d.h. falls $B \subset Y$ eine Borelmenge $\quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B)$ messbar.

iv) $X^{\text{messbar}} \underset{f \text{ messbar}}{\longrightarrow} Y^{\text{topologisch}} \underset{g \text{ stetig}}{\longrightarrow} Z^{\text{topologisch}}$
Wenn g stetig und f Borel-messbar ist, wissen wir, dass $g \circ f$ messbar ist.

v) Betrachten wir zuerst $f^{-1}([-\infty, b))$. Sei $b_i \nearrow b$. Dann ist

$$f^{-1}([-\infty, b)) = f^{-1}\left(\bigcup_i [-\infty, b_i]\right) = \bigcup_i f^{-1}([-\infty, b_i]) = \bigcup_i (X \backslash f^{-1}((b_i, \infty]))$$

$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, \infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b))$ messbar.
$\Rightarrow$ Jede offene Teilmenge B von $\overline{\mathbb{R}}$ ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $[-\infty, b)$, $(a, \infty]$, (a, b).

$\square$

(1.3.4) **Satz:** Seien X ein messbarer Raum und zwei Funktionen $u, v : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Definiere $f : X \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x) := (u(x), v(x))$, wobei $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen ist. Dann sind äquivalent:

i) u, v sind messbar.

ii) f ist messbar.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) trivial.
(i) $\Rightarrow$ (ii):
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle $\Rightarrow$ $f^{-1}(I \times J) = \{x \in X \mid f(x) \in I \times J\} = u^{-1}(I) \cap v^{-1}(J)$ messbar. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Rechtecken der Form $R = I \times J$ (Übung). $\square$

Dies kann auf n Komponenten verallgemeinert werden (Übungsblatt).

(1.3.5) **Korollar:** Seien $u, v : X \to \mathbb{R}$ messbar und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $h := \varphi(u, v) : X \to \mathbb{R}$ messbar.

(1.3.6) **Beispiel:**

- $\varphi(s, t) = s + t \quad \Rightarrow \quad \varphi(u, v) = u + v : X \to \mathbb{R}$
- $\varphi(s, t) = st \quad \Rightarrow \quad \varphi(u, v) = uv : X \to \mathbb{R}$

(1.3.7) **Satz:** Sei X ein messbarer Raum.

i) $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar

$$\Rightarrow \quad f + g, \qquad fg, \qquad |f|, \qquad \max\{f, g\}, \qquad \min\{f, g\}$$

sind messbar.

ii) Sei $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ existieren das Infimum und Supremum *jeder* Teilmenge.

$$\Rightarrow \quad \inf_k f_k, \qquad \sup_k f_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} f_k, \qquad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

sind messbar.

Beweis: (ii) Sei $g(x) := \sup_k f_k(x) \quad \Rightarrow \quad g^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X \mid g(x) > a\} = \bigcup_k \{x \in X \mid f_k(x) > a\} = \bigcup_k f_k^{-1}((a, \infty])$ messbar. Also ist g nach (1.3.3) auch messbar.
$h(x) := \inf_k f_k(x)$. Gleiche Argumentation mit $h^{-1}([-\infty, b))$ (messbar).

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k>0} \left(\inf_{j\geq k} f_j \right)$$

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k>0} \left(\sup_{j\geq k} f_j \right)$$

Da sup und inf messbar sind, ist es auch ihre Verkettung.
(i) Für Summe und Produkt schon bewiesen.
$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ sind wegen (ii) messbar.

$$|f| = f^+ + f^-$$

wobei $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := \max\{-f, 0\}$. $\square$

(1.3.8) **Bemerkung:** Seien $f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar. Falls der Limes

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

für jedes $x \in X$ existiert (punktweise Konvergenz ist hinreichend), so ist $f : X \to \mathbb{R}$ wieder messbar.

1.4 Treppenfunktionen und Maße

(1.4.1) **Definition:** Eine Funktion $S : X \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion* falls sie nur endlich viele Werte annimmt, d.h.

$$S(X) = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$$

Seien

$$A_i := S^{-1}(\alpha_i) = \{x \in X \mid S(x) = \alpha_i\} \quad \Rightarrow \quad S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

S messbar $\Leftrightarrow$ A_i messbar $\forall i$.

(1.4.2) **Satz:** Sei X ein messbarer Raum und $f : X \to [0, \infty]$ messbar.
Dann existiert eine Folge messbarer Treppenfunktionen $s_n : X \to [0, \infty)$ sodass

i) $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \dots \leq f(x)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$

Beweis: Definiere $\varphi_n : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}, \; k = 0, 1, \dots 2^n n - 1 \\ n, & t \geq n \end{cases}$$

Dann ist

1. φ_n Borel-messbar, da das Urbild jeder beliebigen Menge eine Vereinigung von Intervallen ist.
2. $t - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(t) \leq t$ für $0 \leq t \leq n$.
3. $0 \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \leq \dots \leq t$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t \; \forall t \in [0, \infty]$ da bei $n \to \infty$ für jedes t irgendwann 2. eintritt.

Also ist $s_n := \varphi_n \circ f$ eine messbare Treppenfunktion und die Folge erfüllt i) und ii). $\square$

Um alle messbaren Funktionen integrieren zu können, wollen wir erst nur Treppenfunktionen integrieren, mit der Formel Grundfläche · Höhe. Dazu müssen wir definieren, was die „Grundfläche“ sein soll:

(1.4.3) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Ein *Maß auf* $(X, \mathcal{A})$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\exists A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ (um triviale Maße auszuschließen).

ii) μ ist *σ-additiv*, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{A}, \; i = 1, 2, 3, \dots \\ A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *Maßraum*.
Ein *reelles Maß* auf $(X, \mathcal{A})$ ist eine σ-additive Funktion $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

(1.4.4) **Notation:** $f \leq g \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \; \forall x$

(1.4.5) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii)
$$\left.\begin{array}{l} A_1, \dots A_n \in \mathcal{A} \\ A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

iii) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$.

iv)
$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{A}, \ i = 1, 2, 3, \dots \\ A_1 \subset A_2 \subset \dots \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

v)
$$\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{A}, \ i = 1, 2, 3, \dots \\ A_1 \supset A_2 \supset \dots \\ \mu(A_i) < \infty \ \forall i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

Beweis:

i) Seien $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $A_1 = A$ und $A_i = \emptyset$ für $i = 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \Rightarrow \quad \mu(\emptyset) = 0$$

ii) $A_i := \emptyset$ für $i = n+1, n+2, \dots$

iii) $B \setminus A \in \mathcal{A}$, $B = A \cup (B \setminus A) \quad \overset{\text{ii)}}{\Longrightarrow} \quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

iv) Seien $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ für $i \geq 2 \quad \Rightarrow \quad A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Sei

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \overset{\sigma\text{-additiv}}{\Longrightarrow}$$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \overset{\text{ii)}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

v) Seien $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ und $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$
$C_n := A_1 \setminus A_n \quad \Rightarrow \quad \emptyset = C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$

$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$, weil $A_1 = A_n \cup C_n, \ A_n \cap C_n = \emptyset \quad \overset{\text{ii)}}{\Longrightarrow} \quad \mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(C_n) \quad \overset{\mu(A)<\infty}{\Longrightarrow} \quad \mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(C_n)$.

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 \setminus A) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_n\right) \\ &\overset{\text{iv)}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) \end{aligned}$$

$\square$

(1.4.6) **Beispiel:**

1. *Zählmaß*: $\mu(A) = \#A =$ „Anzahl der Elemente von A“
2. *Dirac-Maß* (δ_x): Sei $x \in X$.

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

3. Seien $X = \mathbb{N}$ und $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Dann ist $\mu(A_i) = \infty$ aber $\bigcap A_i = \emptyset$. Also ist in v) die Annahme $\mu(A_i) < \infty \ \forall i$ notwendig.

(1.4.7) **Bemerkung:** (Rechnen in $[0, \infty]$)

$$a + \infty = \infty$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

Nicht definiert sind

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

(1.4.8) **Bemerkung:** $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ und $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

1.5 Das Lebesgueintegral

(1.5.1) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

i) Sei $s : X \to [0, \infty)$ eine messbare Treppenfunktion.

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \quad \alpha_i \in [0, \infty), \quad A_i \in \mathcal{A}$$

Wir definieren das *Integral von s über $E \in \mathcal{A}$* durch

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

Das Integral einer Funktion, die auf einem Gebiet 0 ist, dessen Maß ∞ ist, ist also 0, was der Intuition entspricht (deshalb haben wir $0 \cdot \infty = 0$ definiert).

ii) Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Das *Lebesgue-Integral von f über $E \in \mathcal{A}$* ist definiert durch:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \sup_s \int_E s \, \mathrm{d}\mu$$

sup gehe über alle messbaren Treppenfunktionen $s : X \to [0, \infty)$ sodass $0 \leq s(x) \leq f(x) \ \forall x \in X$.

(1.5.2) **Bemerkung:** Falls $f : E \to [0, \infty]$ können wir mit

$$\mathcal{A}_E := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset E\}$$

und dem Maßraum $(E, \mathcal{A}_E, \mu|_{\mathcal{A}_E})$ arbeiten.

(1.5.3) **Satz:** Seien $f, g : X \to [0,\infty]$ messbare Funktionen und A, B, $E \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

i) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu$

ii) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu$

iii) $c \in [0,\infty) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E cf \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu$

iv) $f(x) = 0 \; \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$

v) $\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$

vi) $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu$.

(1.5.4) **Lemma:** Seien $s, t : X \to [0,\infty)$ messbare Treppenfunktionen.

i) Die Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $\varphi(E) := \int\limits_E s \,\mathrm{d}\mu$ ist wieder ein Maß.

ii)

$$\int\limits_E (s+t) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E s \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E t \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis:

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \quad \Rightarrow \quad \varphi(E) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

1. $\varphi(\emptyset) = 0$

2. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ disjunkt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varphi(E) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap E_k)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E_k)\right)}_{\varphi(E_k)}
\end{aligned}$$

$t = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i \chi_{B_j}$. Sei $E_{ij} := E \cap A_i \cap B_j$, dann ist $E = \bigcup_{i,j} E_{ij}$ disjunkt.

$$\begin{aligned}
\int\limits_E (s+t) \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) \\
&= \int\limits_E s \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E t \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Hier benutzen wir das Distributivgesetz, das auch dann gilt, wenn einer der Terme unendlich ist, wie auch Kommutativgesetz und Assoziativgesetz und Vertauschung der Summen.

□

(1.5.5) **Satz:** (Lebesgue Monotone Konvergenz)
Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen ($n = 1,2,3,\ldots$) sodass $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \ldots$
$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad\Rightarrow\quad f$ ist messbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

im radikalen Unterschied zum Riemannintegral, bei dem man gleichmäßige Konvergenz annehmen müsste.

Beweis:

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$$

$\Rightarrow$ der Limes

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

existiert.

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \;\forall n \in \mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad \alpha \le \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Zu zeigen: $\alpha \ge \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$.
Sei $s : X \to [0,\infty)$ eine messbare Treppenfunktion mit $0 \le s \le f$. Sei $0 < c < 1$.

$$E_n := \{x \in X \mid cs(x) < f_n(x)\}$$

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots, \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$c\varphi(E_n) = c \int\limits_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

$$\Rightarrow \quad c \int\limits_X s \,\mathrm{d}\mu = c\varphi(X) = c\varphi\left(\bigcup_n E_n\right)$$

$$\overset{(1.4.5)}{=} \lim_{n\to\infty} c\varphi(E_n) \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \alpha \;\forall c \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X s \,\mathrm{d}\mu \le \alpha \;\forall s,\; 0 \le s \le f \quad\Rightarrow\quad \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \le \alpha$$

□

(1.5.6) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

i) Seien $f, g : X \to [0,\infty]$ messbar

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$$

ii) Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen und

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Dann ist f messbar und

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis:

i) Seien $s_n, t_n : X \to [0,\infty]$ messbare Treppenfunktionen sodass $s_n \nearrow f$ und $t_n \nearrow g$.

$$\Rightarrow \quad s_n + t_n \nearrow f + g$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int\limits_X f + g \,\mathrm{d}\mu &\overset{(1.5.5)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (s_n + t_n)\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{(1.5.4)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_X s_n \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X t_n \,\mathrm{d}\mu \right) \\ &\overset{(1.5.5)}{=} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

ii) Sei

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \Rightarrow \quad g_n \nearrow f$$

$$\overset{\text{Satz (1.5.5)}}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{i)}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

□

(1.5.7) **Lemma von Fatou:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: Sei $g_k(x) := \inf\limits_{i \geq k} f_i(x)$

$$\Rightarrow \quad g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \ \forall x \qquad g_k \text{ messbar}$$

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

$$g_k(x) \leq f_i(x) \ \forall i \geq k$$

$$\overset{\text{Satz (1.5.5)}}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k \,\mathrm{d}\mu \qquad (*)$$

und außerdem

$$\int\limits_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X f_i \,\mathrm{d}\mu \ \forall i \geq k$$

also

$$\int\limits_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{i\geq k} \int\limits_X f_i \,\mathrm{d}\mu$$

Wenn man dies in (*) einsetzt, so erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty, i\geq k} \int\limits_X f_i \,\mathrm{d}\mu$$

□

(1.5.8) **Beispiel:** Sei $E \subset X$ messbar und $\mu(E) > 0$, $\mu(X \setminus E) > 0$

$$f_n(x) := \begin{cases} \chi_E(X), & n \text{ gerade} \\ 1 - \chi_E(X), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hier ist

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

da die Funktion an jeder Stelle abwechselnd die Werte 0 und 1 annimmt. Aber

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu &= \min\{\mu(E), \mu(X \setminus E)\} \\ > 0 &= \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung scharf.

(1.5.9) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ messbar.
Definiere $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\varphi(E) := \int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Dann folgt:

i) $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist ein Maß.

ii) $\int\limits_X g \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_X gf \, \mathrm{d}\mu$ für alle messbaren $g : X \to [0, \infty]$.

(1.5.10) **Notation:** „$\mathrm{d}\varphi = f \mathrm{d}\mu$“

Beweis:

i) $\varphi(\emptyset) = 0$
$E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt.

$$\Rightarrow \quad \chi_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} f$$

$$\overset{\text{Satz (1.5.6)}}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_X \chi_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_X \chi_{E_i} f \, \mathrm{d}\mu$$

Die linke Seite ist gleich

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu = \varphi(E)$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i)$$

ii) Sei $g = \chi_E$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X g \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_X \chi_E \, \mathrm{d}\varphi \overset{\text{Def des Int}}{=} \varphi(E) \overset{\text{Def von } \varphi}{=} \int\limits_E f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_E f \, \mathrm{d}\mu$$

$$\overset{(1.5.6)}{\Longrightarrow} \quad \int\limits_X g \,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_X gf \,\mathrm{d}\mu$$

für alle messbare Treppenfunktionen $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$.

Sei $g : X \to [0,\infty]$ eine beliebige messbare Funktion.

$$\overset{(1.3.7)}{\Rightarrow} \quad \exists \text{ messbare Treppenfunktionen } s_n \nearrow g,$$

$$\begin{aligned} \overset{(1.5.5)}{\Rightarrow} \quad \int\limits_X g \,\mathrm{d}\varphi &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X s_n \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X s_n f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X fg \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

□

1.6 Lebesgueintegrierbarkeit

(1.6.1) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *lebesgueintegrierbar* wenn f messbar ist und

$$\int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

(1.6.2) **Notation:** $L^1(\mu) := L^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist lebesgueintegrierbar}\}$

(1.6.3) **Definition:** Das *Lebesgueintegral* einer Funktion $f \in L^1(\mu)$ ist definiert durch

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu := \int\limits_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f^- \,\mathrm{d}\mu$$

wobei

$$f^+ := \max\{f, 0\} \qquad f^- := \max\{-f, 0\}$$

(1.6.4) **Bemerkung:** $|f|$, f^+ und f^- sind messbar.

$$0 \le f^\pm \le |f| \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X f^\pm \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

(1.6.5) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

i) $L^1(\mu)$ ist ein Vektorraum und die Abbildung

$$L^1(\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ist linear, d.h. dass für alle $f, g \in L^1(\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$

$$f + g, cf \in L^1(\mu)$$

$$\int\limits_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int\limits_X cf \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ii) $f, g \in L^1(\mu), f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$

iii) $\forall f \in L^1(\mu)$ gilt

$$\left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis:

i) Seien $f, g \in L^1$ und $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

1. $f + g \in L^1(\mu)$, da $|f+g| \leq |f| + |g|$ also nach Satz (1.5.6)

$$\int\limits_X |f+g| \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X |f| + |g| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

$cf \in L^1(\mu)$ da $|cf| = |c||f|$.

2. Fallunterscheidung:
   - $\mathbf{c = 0}$ ist trivial.
   - $\mathbf{c > 0} \quad \Rightarrow \quad (cf)^{\pm} = cf^{\pm}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int\limits_X cf \,\mathrm{d}\mu &= \int\limits_X cf^+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X cf^- \,\mathrm{d}\mu \\ &= c\int\limits_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - c\int\limits_X f^- \,\mathrm{d}\mu \\ &= c\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

   - $\mathbf{c = -1}$: $(cf)^+ = f^-$ und $(cf)^- = f^+$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X cf \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f^- \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = c\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

   - $\mathbf{c < 0}$ lässt sich durch $c' := (-1) \cdot c$ auf $c > 0$ und $c = -1$ zurückführen.

3. $h = f + g$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ \Rightarrow \quad h^+ + f^- + g^- &= h^- + f^+ + g^+ \\ \overset{\text{Satz (1.5.6)}}{\Longrightarrow} \quad \int h^+ + \int f^- + \int g^- &= \int h^- + \int f^+ + \int g^+ \\ \Rightarrow \quad \int h &= \int f + \int g \end{aligned}$$

ii) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$

$$\Rightarrow \quad \int f = \int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^- = \int g$$

iii) $-|f(x)| \leq f(x) \leq +|f(x)|$

$$\overset{\text{ii)}}{\Longrightarrow} \quad -\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \quad \Rightarrow \quad |\int f| \leq \int |f|$$

□

Nach diesem Satz können wir also aufatmen, da wir wissen, dass das Lebesgueintegral die „Grundregeln“ erfüllt.

(1.6.6) **Satz:** (Lebesgue beschränkte Konvergenz)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen. Sei $g \in L^1(\mu)$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \forall n$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in X$. Dann sind $f_n, f \in L^1(\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$$

Beweis: f ist messbar, $|f| \leq g \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mu)$.

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

Daraus folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \left(2g - \lim_{n\to\infty} |f_n - f|\right) \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{(1.6.5)}{=} \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&= \int_X 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu &\leq 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu &\leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| &\overset{(1.6.5)}{=} \left| \int_X (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu &= 0 \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu &= \int_X f \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

1.7 Nullmengen

(1.7.1) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.
$N \in \mathcal{A}$ heißt *Nullmenge* wenn $\mu(N) = 0$.

(1.7.2) **Definition:** Sei $P =$ „Eigenschaft eines Punktes $x \in X$“.
Wenn z.B. $f : X \to \mathbb{R}$, könnte $P =$ „$f(x) = 0$“ sein. Wenn $f_n : X \to \mathbb{R}$, so $P =$ „$f_n(x)$ konvergiert“.
Wir sagen, dass P *fast überall* gilt, wenn es eine Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, sodass P für jedes $x \in X \setminus N$ gilt.
Bei vielen Eigenschaften reicht es, dass sie fast überall gelten.

(1.7.3) **Beispiel:** Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen. Definiere

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \text{ f.ü. (fast überall)}$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation.

$$f \sim g, g \sim h \quad \Rightarrow \quad f \sim h$$

weil jede Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

(1.7.4) **Bemerkung:** Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und $f \in L^1(\mu)$ und $f \sim g$. Daraus folgt, dass $g \in L^1(\mu)$ und $\int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis: Sei $\varphi := g - f \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$ f. ü. $\quad \Rightarrow \quad \int\limits_X |\varphi| \,\mathrm{d}\mu = 0$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X |g| \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X (|f| + |\varphi|) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \underbrace{\int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu}_{=0}$$

□

(1.7.5) **Definition:** Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heiße *vollständig* wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} N \in \mathcal{A} \\ \mu(N) = 0 \\ E \subset N \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{A}$$

(1.7.6) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

$$\mathcal{A}^* = \{E \subset X \mid \exists\ A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subset E \subset B \text{ und } \mu(B \setminus A) = 0\}$$

Dann:

i) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra.

ii) $\exists!$ Maß $\mu^* : \mathcal{A}^* \to [0, \infty]$ sodass $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

iii) $\mathcal{A}^*$ ist vollständig.

Beweis:

1. **Definition von μ^*:** Seien $E \in \mathcal{A}^*$ und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$. Dann definieren wir $\mu^*(E) = \mu(A)$.
   Wohldefiniertheit: Seien $A', B' \in \mathcal{A}$ mit $A' \subset E \subset B'$, $\mu(B' \setminus A') = 0$

$$\Rightarrow \quad A \setminus A' \subset E \setminus A' \subset B' \setminus A'$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A \setminus A') = 0$$

$$\mu(A) = \mu(A \cap A') \overset{\text{genauso}}{=} \mu(A')$$

2. **$\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra**

   (a) $X \in \mathcal{A}^*$, da $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

   (b) $E \in \mathcal{A}^* \quad \Rightarrow \quad \exists A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset E \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$
   $\Rightarrow \quad B^{\mathrm{C}} \subset E^{\mathrm{C}} \subset A^{\mathrm{C}}$, $\mu(A^{\mathrm{C}} \setminus B^{\mathrm{C}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}^*$.

   (c) Sei $E_i \in \mathcal{A}^*$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$
   $\Rightarrow \quad \exists A_i, B_i \in \mathcal{A}$ sodass $A_i \subset E_i \subset B_i$, $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$. Sei

$$A := \bigcup_i A_i, \quad B := \bigcup_i B_i \in \mathcal{A}, \quad E := \bigcup_i E_i$$

   $\Rightarrow \quad A \subset E \subset B$ und

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i)$$

   $\Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{A}^*$.

3. **μ^* ist ein eindeutig bestimmtes Maß** $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Seien $E = \bigcup_i E_i$, $E_i \in \mathcal{A}^*$ disjunkt. Wähle $A_i \in \mathcal{A}$ wie in (c) $\quad \Rightarrow \quad \mu^*(E) = \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \mu^*(E_i)$

4. **$\mathcal{A}^*$ ist vollständig** Sei $N \in \mathcal{A}^*$ eine Nullmenge. Sei $E \subset N$ $\Rightarrow \quad \exists\ A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset N \subset B$ mit $\mu(B \setminus A) = 0$. Nach der Definition ist $\mu(A) = \mu^*(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = \underbrace{\mu(A)}_{=0} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{=0} = 0$. $\emptyset \subset E \subset B \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{A}^*$.

□

(1.7.7) **Bemerkung:** $\mathcal{A}^*$ heißt die *Vervollständigung* von $\mathcal{A}$, und eine σ-Algebra ist vollständig genau dann, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ gilt.

(1.7.8) **Übung:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Sei $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E^{\mathrm{C}}) = 0$. Sei F eine beliebige Fortsetzung von $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ auf ganz X, f ist also *f.ü. definiert*.
f heiße messbar wenn $\forall V \in \overline{\mathbb{R}}$ offen $\quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cap E \in \mathcal{A}$.
Dann ist die Fortsetzung F messbar.

(1.7.9) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

i) Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) < \infty$ f.ü.

ii) Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$ f.ü.

iii) Sei $f \in L^1(\mu)$ und $\displaystyle\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0\ \forall E \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad f = 0$ f.ü.

iv) Sei $f \in L^1(\mu)$ und $\displaystyle\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \quad \Rightarrow \quad f = |f|$ f.ü.oder $f = -|f|$ f.ü..

Beweis:

i) Sei $N := \{x \in X \mid f(x) = \infty\} \in \mathcal{A}$.

$$n\chi_N(x) \le f(x)\ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int\limits_X n\chi_N \,\mathrm{d}\mu}_{=n\mu(N)} \le \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(N) \le$$

$$\frac{1}{n}\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mu(N) = 0$$

ii) Sei $A_n := \{x \in X \mid f(x) \ge \frac{1}{n}\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\mu(A_n) \le \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow$ $\mu(A_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$ Die Menge $\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist eine Nullmenge.

iii) Sei $E := \{x \in X \mid f(x) \ge 0\} \quad \Rightarrow \quad f^+(x) = f(x)\ \forall x \in E \quad \Rightarrow$
$$\int\limits_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\chi_E \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \overset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \quad f^+ = 0 \text{ f.ü.}$$
Genauso $f^- = 0$ f.ü.

iv) Nach Voraussetzung gilt $\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \pm \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu$. Fallunterscheidung: Falls
$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu \quad \overset{(1.6.5)}{\Rightarrow} \quad \int\limits_X \underbrace{(|f| - f)}_{\ge 0} \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \overset{\text{ii)}}{\Rightarrow} \quad |f| - f = 0 \text{ f.ü.}$$
Genauso $\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu \quad \Rightarrow \quad f = -|f|$ f.ü.

□

(1.7.10) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen sodass

(*)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

Die Reihe

(**)
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergiert absolut fast überall, $f \in L^1(\mu)$ und es gilt
$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

(1.7.11) **Bemerkung:** Die Funktion f ist durch (**) fast überall definiert. Die Aussage $f \in L^1(\mu)$ soll heißen:
Wenn wir f auf ganz X messbar fortsetzen, so ist diese Fortsetzung integrierbar. Weder die Integrierbarkeit noch das Integral von f hängen von der Wahl der Fortsetzung ab ((1.7.4) bzw. (1.7.8)).

Beweis: Definiere $\varphi : X \to [0, \infty]$ durch
$$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{(messbar)} \quad \overset{(1.5.6)}{\Rightarrow} \quad \int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \overset{(*)}{<} \infty$$

$$\overset{(1.7.9)}{\Rightarrow} \quad N := \{x \in X \mid \varphi(x) = \infty\} \text{ ist eine Nullmenge.}$$

Die Reihe (**) konvergiert fast überall (für jedes $x \in N^{\mathrm{c}}$). Man sehe f als Funktion $f : X \setminus N \to \mathbb{R}$, dann

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \Rightarrow \quad |g_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq \varphi(x), \quad \varphi \in L^1(\mu)$$

$$g_n(x) \to f(x) \ \forall x \in X \setminus N$$

$$\overset{(1.6.6)}{\Rightarrow} \quad \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \,\mathrm{d}\mu$$

(g_n, f auf N gleich Null setzen)

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

□

2 Das Lebesguemaß

2.1 Das translationsinvariante Maß μ

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(2.1.1) **Bemerkung:** Wenn $B \in \mathcal{B}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ so gilt:

$$B + x = \{b + x | b \in B\} \in \mathcal{B}$$

(2.1.2) **Definition:** Ein Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ heißt *translationsinvariant* wenn $\mu(B + x) = \mu(B)\ \forall B \in \mathcal{B}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(2.1.3) **Satz:** Es gibt genau ein translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ sodass $\mu([0, 1)^n) = 1$.

(2.1.4) **Definition:** Sei $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ wie in (2.1.3) und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ (siehe (1.7.6)), d.h.

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid \exists B_0, B_1 \in \mathcal{B} \text{ mit } B_0 \subset A \subset B_1, \mu(B_1 \setminus B_0) = 0\}$$

$$m(A) := \sup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset A}} \mu(B) = \inf_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ A \subset B}} \mu(B)$$

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen *lebesguemessbar* und $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt Lebesguemaß.

2.2 Äußere Maße

(2.2.1) **Definition:** Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ heißt *äußeres Maß* wenn gilt:

i) $\nu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subset B \subset X \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leq \nu(B)$

iii) Statt der σ-Additivität gilt *Sub-σ-Additivität*: Für $A_i \subset X$, $i = 1, 2, 3, ...$

$$\Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

(2.2.2) **Definition:** Sei $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *ν-messbar* wenn

$$\nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \quad \forall D \subset X$$

(2.2.3) **Übung:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Definiere $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ durch $\nu(B) := \inf\limits_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ B \subset A}} \mu(A)$. Dann ist ν ein äußeres Maß. Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist ν-messbar.

(2.2.4) **Satz:** (Caratheodory)
Sei $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß und $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ ist } \nu\text{-messbar}\}$ und $\mu := \nu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ Dann gilt:

i) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

ii) $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist ein Maß

iii) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist vollständig (siehe (1.7.5)).

Beweis:

i), ii)

1. $X \in \mathcal{A}$
   $D \cap X = D,\ D \setminus X = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \nu(D) = \nu(D \cap X) + \underbrace{\nu(D \setminus X)}_{=0}$

2. $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$
   Wir wissen $\nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) = \nu(D \setminus A^{\mathrm{c}}) + \nu(D \cap A^{\mathrm{c}})$.

3. $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$
   $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \forall D \subset X$ gilt:

$$\begin{aligned}
\nu(D) &= \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \\
&= \nu(D \cap A) + \nu((D \setminus A) \cap B) + \nu((D \setminus A) \setminus B) \\
&\geq \nu(D \cap (A \cup B)) + \nu(D \setminus (A \cup B)) \\
\Rightarrow \quad \nu(D) &= \nu(D \setminus (A \cup B)) + \nu(D \cap (A \cup B)) \ \forall D \subset X
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$$

4. Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \quad B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

Sei $B_k := \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$ nach 3. $\quad \Rightarrow \quad \forall D \subset X$ gilt

$$\begin{aligned}
\nu(D \cap B_k) &= \nu(D \cap B_k \cap A_k) + \nu((D \cap B_k) \setminus A_k) \\
&= \nu(D \cap A_k) + \nu(D \cap B_{k-1}) \\
&\overset{\text{Induktion}}{=} \sum_{i=1}^{k} \nu(D \cap A_i)
\end{aligned}$$

Da B_k ν-messbar ist, ist

$$\begin{aligned}
\nu(D) &= \nu(D \cap B_k) + \nu(D \setminus B_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \nu(D \cap A_i) + \nu(D \setminus B_k) \ \forall k \\
&\geq \sum_{i=1}^{k} \nu(D \cap A_i) + \nu(D \setminus B) \\
\Rightarrow \quad \nu(D) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(D \cap A_i) + \nu(D \setminus B)
\end{aligned}$$

Wegen $D \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D \cap A_i)$ gilt

$$\begin{aligned}
\nu(D \cap B) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(D \cap A_i) \\
&\leq \nu(D) - \nu(D \setminus B) \\
\Rightarrow \quad \nu(D) &\geq \nu(D \cap B) + \nu(D \setminus B) \\
\Rightarrow \quad \nu(D) &= \nu(D \cap B) + \nu(D \setminus B) \\
\nu(D \cap B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(D \cap A_i)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad B \in \mathcal{A}$$

$D = B$: $\nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Aus 1.–4. folgt, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu := \nu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß ist, denn aus nichtdisjunkten Vereinigungen lässt sich immer eine disjunkte erzeugen:

$$B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}, \quad A_k := B_k \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad \bigcup B_i = \dot{\bigcup} A_i \overset{4.}{\in} \mathcal{A}$$

iii) 5. $\nu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall D \subset X$ gilt

$$\begin{aligned} \nu(D) &\leq \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \\ &\leq \nu(A) + \nu(D \setminus A) \\ &= \nu(D \setminus A) \\ &\leq \nu(D) \\ \Rightarrow \nu(D) &= \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \forall D \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Somit ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig.

□

(2.2.5) **Satz:** (Caratheodory-Kriterium) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Sei $\mathcal{A}(\nu) := \{A \subset X \mid A\ \nu\text{-messbar}\}$ und $\mathcal{B} \subset 2^X$ die σ-Algebra der Borelmengen.
Äquivalent sind:

i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\nu)$

ii) Wenn $A, B \subset X$ und $d(A, B) := \inf\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b) > 0$, so gilt $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Beweis: „i) $\Rightarrow$ ii)“
Seien $A, B \subset X$, $\varepsilon := d(A, B) > 0$. Definiere

$$U := \bigcup_{u \in A} B_\varepsilon(u) = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon\}$$

Dann ist U als Vereinigung offener Mengen offen, $A \subset U$ und $U \cap B = \emptyset$. Daraus folgt mit i), dass U ν-messbar ist[2], also

$$\nu(A \cup B) = \nu((A \cup B) \cap U) + \nu((A \cup B) \setminus U) = \nu(A) + \nu(B)$$

„ii) $\Rightarrow$ i)“
Zu zeigen ist, dass jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ν-messbar ist, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} A \subset X \text{ abgeschlossen} \\ D \subset X \\ \nu(D) < \infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \nu(D) \geq \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A)$$

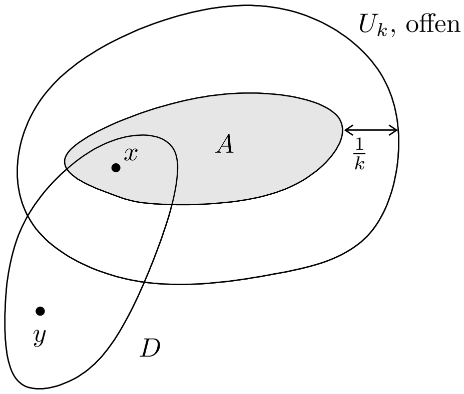
$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ abgeschlossen} \\ d(x, A) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \in A$$

Also gilt

$$A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k := \{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{k}\}$$

[2]zur Erinnerung: $\forall D \subset X$ gilt $\nu(D) = \nu(D \cap U) + \nu(D \setminus U)$



$$\left.\begin{array}{l} x \in D \cap A \\ y \in D \setminus U_k \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \geq \frac{1}{k}$$

Also gilt

$$d(D\cap A, D\setminus U_k) \geq \frac{1}{k} \quad \stackrel{\text{ii)}}{\Longrightarrow} \quad \nu(D) \geq \nu((D\cap A)\cup(D\setminus U_k)) = \nu(D\cap A)+\nu(D\setminus U_k)$$

Behauptung 1: $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(D \setminus U_k) = \nu(D \setminus A)$ (aus dieser Behauptung folgt i)).

$$A = \bigcap_{k\geq 1} U_k \quad \Rightarrow \quad U_k \setminus A = \bigcup_{i=k}^{\infty}(U_i \setminus U_{i+1})$$

$$\Rightarrow \quad D \setminus A = (D \setminus U_k) \cup (D \cap (U_k \setminus A)) = (D \setminus U_k) \cup \bigcup_{i=k}^{\infty}(D \cap (U_i \setminus U_{i+1}))$$

Sei $E_i := D \cap (U_i \setminus U_{i+1})$.
Behauptung 2: $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) < \infty$, Behauptung 2 $\Rightarrow$ Behauptung 1.
Sei $\varepsilon_k := \sum_{i=k}^{\infty} \nu(E_i) \to 0$.

$$\begin{aligned} \nu(D \setminus U_k) &\leq \nu(D \setminus A) \\ &= \nu(D \setminus U_k \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i) \\ &\leq \nu(D \setminus U_k) + \sum_{i=k}^{\infty} \nu(E_i) \\ &= \nu(D \setminus U_k) + \varepsilon_k \end{aligned}$$

Daraus folgt Behauptung 1. Dieser Beweis ist Magie.
Behauptung 3: $j \geq i+2 \quad \Rightarrow \quad d(E_i, E_j) > 0$, Behauptung 3 $\Rightarrow$ Behauptung 2.

$$\sum_{i=1}^{l} \nu(E_{2i}) \stackrel{\text{ii)}}{=} \nu\left(\bigcup_{i=1}^{l} E_{2i}\right) \leq \nu(D) < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{l} \nu(E_{2i-1}) \leq \nu(D) < \infty$$

Somit ist

$$\sum_{i=1}^{l} \nu(E_i) \leq 2\nu(D) < \infty$$

Beweis von Behauptung 3: Sei $j \geq i+2$. Wir behaupten, dass

$$d(E_i, E_j) > \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

Sei $x \in E_i$ und $y \in X$ mit $d(x,y) \leq \frac{1}{(i+1)(i+2)}$

$$\Rightarrow \quad x \notin U_{i+1}$$
$$\Rightarrow \quad \forall a \in A \text{ gilt } d(a,x) \geq \frac{1}{i+1}$$
$$\Rightarrow \quad \forall a \in A \text{ gilt } d(a,y) \geq d(a,x) - d(x,y) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{i+2}$$
$$\Rightarrow \quad y \notin U_{i+2} \quad \Rightarrow \quad y \in E_j$$

□

2.3 Nullmengen

(2.3.1) **Definition:** Ein *abgeschlossener Quader* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

mit $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, \ldots n$. Das *Volumen* von Q ist definiert durch

$$\mathrm{Vol}(Q) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

(2.3.2) **Definition:** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordansche Nullmenge* wenn gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists$ abgeschlossene Quader $Q_1, Q_2, \ldots Q_N$ sodass

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Vol}(Q_i) < \varepsilon$$

(2.3.3) **Definition:** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguesche Nullmenge* wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ abgeschlossene Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ sodass

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) < \varepsilon$$

(2.3.4) **Übung:**

1. Die Kantormenge $K \subset \mathbb{R}$ ist eine Jordan-Nullmenge.
2. $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist als abzählbare Menge eine Lebesgue-Nullmenge, aber keine Jordanmenge.

2.4 Das Lebesguesche äußere Maß ν

(2.4.1) **Definition:** Das *Lebesguesche äußere Maß* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\nu(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) \;\middle|\; Q_i \text{ abgeschlossene Quader, } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}$$

für $A \subset \mathbb{R}^n$.

(2.4.2) **Bemerkung:** $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesguenullmenge genau dann wenn $\nu(A) = 0$.

(2.4.3) **Satz:** Sei $\nu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ das Lebesguesche äußere Maß aus Definition (2.4.1). Dann gilt:

i) ν ist ein äußeres Maß.

ii) ν ist translationsinvariant, d.h.

$$\nu(A + x) = \nu(A) \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n \forall x \in \mathbb{R}^n$$

iii) Für jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\nu(Q) = \nu(Q^\circ) = \mathrm{Vol}(Q)$$

iv) $\forall A, B \subset \mathbb{R}^n : d(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Beweis:

i) $\nu(\emptyset) = 0$ da jeder Quader die leere Menge enthält.
$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leq \nu(B)$ da jeder Quader der B überdeckt auch A überdeckt.
$A_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow$ $\forall i \exists$ Folge abgeschlossener Quader $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots$ sodass

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_{ij}) < \nu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_i A_i \subset \bigcup_{i,j} Q_{ij}, \quad \sum_{i,j} \mathrm{Vol}(Q_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

ii) $\mathrm{Vol}(Q+x) = \mathrm{Vol}(Q)$ für alle abgeschlossenen Quader Q und $x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$ ii).

iv) $A, B \subset \mathbb{R}^n, d(A, B) > 0$. Wähle $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ abgeschlossene Quader sodass

$$A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \nu(A \cup B) + \varepsilon$$

o.B.d.A. nehmen wir an, dass

$$\mathrm{diam}(Q_i) < \frac{d(A, B)}{2}$$

Dann gilt $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$Q_i \cap A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad Q_i \cap B = \emptyset$$

Sei

$$I := \{i \in \mathbb{N} \mid Q_i \cap A \neq \emptyset\} \qquad J := \{i \in \mathbb{N} \mid Q_i \cap B \neq \emptyset\}$$

Dann ist $\mathbb{N} = I \cup J$ und $I \cap J = \emptyset$.

$$A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i, \quad B \subset \bigcup_{i \in J} Q_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i\in I} \mathrm{Vol}(Q_i) \geq \nu(A) \quad \text{und} \quad \sum_{i\in J} \mathrm{Vol}(Q_i) \geq \nu(B)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \nu(A)+\nu(B) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \nu(A\cup B)+\varepsilon \\
\Rightarrow \quad \nu(A)+\nu(B) &\leq \nu(A\cup B)+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0 \\
\Rightarrow \quad \nu(A)+\nu(B) &\leq \nu(A\cup B) \\
\overset{\text{i)}}{\Rightarrow} \nu(A)+\nu(B) &= \nu(A\cup B)
\end{aligned}$$

iii) Sei $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ und $|I|=b-a$.

$$|I|-1 \leq \#(I\cap\mathbb{Z}) \leq |I|+1$$

Dann ist

$$N|I|-1 \leq \#(NI\cap\mathbb{Z}) \leq N|I|+1$$

bzw.

$$|I|-\frac{1}{N} \leq \frac{1}{N}\#\left(I\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right) \leq |I|+\frac{1}{N}$$

Für jeden abgeschlossenen Quader $Q=I_1\times\ldots I_n$ gilt

$$\mathrm{Vol}(Q)=\prod_{i=1}^{n}|I_i| = \prod_{i=1}^{n}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(I_i\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)$$

(*)
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^n}\#\left(Q\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right)$$

Behauptung: $Q\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i, \quad Q_i$ abgeschlossene Quader

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(Q_i)\geq\mathrm{Vol}(Q)$$

Wähle $\varepsilon>0$ und für jedes i einen offenen Quader $U_i\supset Q_i$ sodass

$$\nu(U_i)\leq\mathrm{Vol}(Q_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$\overset{Q \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists k\in\mathbb{B} \text{ sodass } Q\subset\bigcup_{i=1}^{k}U_i$$

$$\begin{aligned}
\overset{(*)}{\Longrightarrow} \mathrm{Vol}(Q) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^n}\#\left(Q\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N^n}\#\left(U_i\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^n}\#\left(U_i\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^n}\#\left(\overline{U_i}\cap\frac{1}{N}\mathbb{Z}^n\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\left(\mathrm{Vol}(Q_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Vol}(Q_i)+\varepsilon
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Vol}(Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \\
\Rightarrow \quad & \nu(Q^\circ) \leq \nu(Q) = \mathrm{Vol}(Q) \\
& \forall \varepsilon > 0 \exists P \text{ abgeschlossener Quader} \\
& \text{sodass } P \subset Q^\circ, \quad \mathrm{Vol}(P) > \mathrm{Vol}(Q) - \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \nu(P) = \mathrm{Vol}(P) \geq \mathrm{Vol}(Q) - \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \nu(Q^\circ) \geq \nu(P) \geq \mathrm{Vol}(Q) - \varepsilon \\
\Rightarrow \quad & \nu(Q^\circ) \geq \nu(Q)
\end{aligned}$$

□

2.5 Das Lebesguemaß m

(2.5.1) **Definition:** Sei $\nu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ das Lebesgue äußere Maß. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguemessbar*, wenn sie ν-messbar ist, d.h. (zur Erinnerung)

$$\nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \ \forall D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(\nu) := \{\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist Lebesguemessbar}\}$$

$$\nu|_{\mathcal{A}} =: m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

heißt *Lebesguemaß* auf $\mathbb{R}^n$.
Die Äquivalenz dieser Definitionen zu (2.1.4) wird in (2.5.5) gezeigt.

(2.5.2) **Korollar:**

i) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist ein Maß und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ ein vollständiger Maßraum.

ii) Jede Borelmenge ist Lebesguemessbar, d.h. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

iii) $(\mathcal{A}, m)$ ist translationsinvariant, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{A} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A + x \in \mathcal{A} \text{ und } m(A + x) = m(A)$$

iv) Sei Q ein abgeschlossener Quader
$\Rightarrow \quad Q, Q^\circ \in \mathcal{A}$ und $m(Q) = m(Q^\circ) = \mathrm{Vol}(Q)$.

Beweis:

i) (2.2.4) und (2.4.3).

ii) (2.2.5) und (2.4.3).

iii) (2.4.3), ii) und Definitionen.

iv) (2.4.3), iii) und Teil ii) des Korollars.

□

(2.5.3) **Bemerkung:** $Q := [0, 1]^n \quad \Rightarrow \quad Q^\circ \subset [0, 1) \subset Q$
$\Rightarrow \quad [0, 1)^n \in \mathcal{A}$ und $m([0, 1)^n) = m(Q) = \mathrm{Vol}(Q) = 1$. Also erfüllt $\mu := m|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ die Bedingungen von (2.1.3).

(2.5.4) **Satz:**

i) Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(U) \mid U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und } A \subset U\}$$

ii) Falls $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesguesmessbar ist, so gilt:

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K) \mid K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt und } K \subset A\}$$

Beweis:

i) Wähle $\varepsilon > 0$ und abgeschlossene Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ sodass

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) \leq \nu(A) + \varepsilon$$

Wähle offene Quader $U_i \supset Q_i$ mit $\mathrm{Vol}(U_i) \leq \mathrm{Vol}(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.
Sei $U := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \nu(U) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(U_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(Q_i) + \varepsilon \\ &\leq \nu(A) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ii) Sei A beschränkt und lebesguemessbar. Dann ist $A \subset \overline{B_R}$ wobei $\overline{B_R} = \{|x| \leq R\}$. Sei $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B_R} \setminus A \subset U$.

$$\begin{aligned} \nu(U) &\leq \nu(\overline{B_R} \setminus A) + \varepsilon \\ &= \nu(\overline{B_R}) - \nu(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad K := \overline{B_R} \setminus U \subset A$

$$\begin{aligned} \nu(K) &\geq \nu(\overline{B_R}) - \nu(U) \\ &\geq \nu(A) - \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ ii) im beschränkten Fall. Der allgemeine Fall ist eine Übung.

□

(2.5.5) **Satz:** Sei $\nu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ das Lebesgue äußere Maß, $\mathcal{A}(\nu) = \mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ die Lebesgue σ-Algebra und $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra.

$$m := \nu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0, \infty] \qquad \mu := \nu|_{\mathcal{B}}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ ist die Vervollständigung (siehe (1.7.6)) von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$.

Beweis: Zu zeigen ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}^*$ und $m = \mu^*$.

1.

$$A \in \mathcal{A} \quad \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \quad \nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A) \ \forall D \subset \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathcal{B}^* \quad \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \quad \exists B_0, B_1 \in \mathcal{B} \text{ sodass } B_0 \subset A \subset B_1,\ \mu(B_1 \setminus B_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu(B_0) \\ &= \nu(B_0) \\ &= \nu(A) - \nu(A \setminus B_0) \\ &= m(A) \end{aligned}$$

Also $\mathcal{A} = \mathcal{B}^* \quad \Rightarrow \quad m = \mu^*$.

2. $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}^* &\Rightarrow \exists B_0, B_1 \in \mathcal{B} \text{ sodass } B_0 \subset A \subset B_1,\ \mu(B_1 \setminus B_0) = 0 \\ &\Rightarrow \nu(A \setminus B_0) \leq \nu(B_1 \setminus B_0) = 0 \\ &\Rightarrow A \setminus B_0 \in \mathcal{A} \text{ (Beweis von Satz (2.2.4))} \\ &\Rightarrow A = B_0 \cup (A \setminus B_0) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^*$
   Sei $A \in \mathcal{A}$.
   1. Fall: $\nu(A) < \infty$
   Nach Satz $\exists K_i \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\exists U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen sodass $K_i \subset A \subset U_i$ und

$$\nu(U_i) \leq \nu(A) + \frac{1}{i} \quad \nu(K_i) \geq \nu(A) - \frac{1}{i}$$

   Sei

$$B_0 := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad B_1 := \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

$$\Rightarrow \quad B_0, B_1 \in \mathcal{B} \quad B_0 \subset A \subset B_1$$

$$\nu(B_0) \geq \nu(K_i) \geq \nu(A) - \frac{1}{i}, \quad \nu(B_1) \leq \nu(U_i) \leq \nu(A) + \frac{1}{i}$$

$$\begin{aligned} &\overset{i \to \infty}{\Longrightarrow} && \nu(A) \leq \nu(B_0) \leq \nu(B_1) \leq \nu(A) \\ &\Rightarrow && \nu(A) = \nu(B_0) = \nu(B_1) \\ &\overset{\nu(A) < \infty}{\Longrightarrow} && \nu(B_1 \setminus B_0) = \nu(B_1) - \nu(B_0) = 0 \\ &\Rightarrow && A \in \mathcal{B}^* \end{aligned}$$

   2. Fall: $\nu(A) = \infty$
   Sei

$$\begin{aligned} A_k &:= \{x \in A \mid \|x\| \leq k\} \\ \overset{\text{1. Fall}}{\Longrightarrow} A_k &= A \cap \overline{B_k} \in \mathcal{A} \text{ also } A_k \in \mathcal{B}^* \\ \Rightarrow A &= \bigcup_k A_k \in \mathcal{B}^* \end{aligned}$$

□

(2.5.6) **Beweis von Satz (2.1.3)** Existenz ist ein Korollar von Satz (2.4.3)
Eindeutigkeit: Sei

$$\mu' : \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

ein translationsinvariantes Maß mit

$$\mu'([0,1)^n) = 1$$

Behauptung: $\mu' = \mu$. Dies zeigen wir in fünf Schritten.

1. Sei $Q(x,k) := x + [0, 2^{-k})^n$. Dann gilt $\mu'(Q(x,k)) = 2^{-kn}$.
   $\mu'(Q(x,k)) = \mu'(x + Q(0,k)) = \mu'(Q(0,k)) =: c_k$

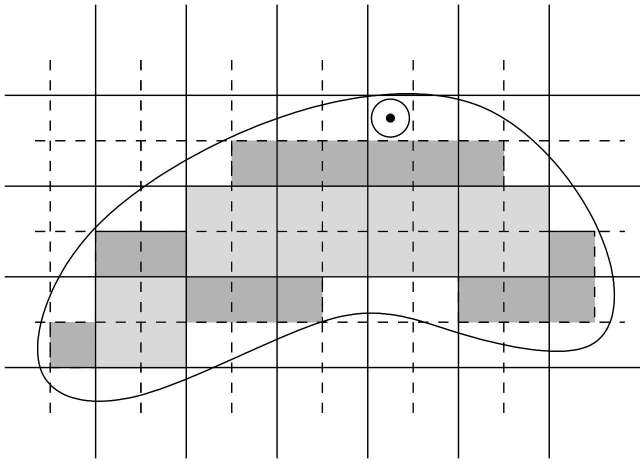
$$[0,1)^n = \bigcup_{\substack{x_i = \frac{j_i}{2^k}, \\ 0 \leq j_i \leq 2^k - 1}} Q(x,k)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \mu'([0,1)^n) = \sum_{\substack{x_i = \frac{j_i}{2^k}, \\ 0 \leq j_i \leq 2^k - 1}} \underbrace{\mu'(Q(x,k))}_{c_k} = 2^{nk} c_k$$

2. $\mu'(U) = \mu(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$

   Behauptung: Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung $U = \bigcup_{j_1}^{\infty} Q_j$ von Mengen der Form $Q(x,k)$. Daher gilt wegen σ-Additivität

$$\mu'(U) = \sum_j \mu'(Q_j) = \sum_j \mu(Q_j) = \mu(U)$$



   Formal: Sei

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{Q(x,1) \mid x \in \mathbb{Z}^n, Q(x,1) \subset U\} \\
M_2 &:= \{Q(x,2) \mid x \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}^n, Q(x,2) \subset U, Q(x,2) \not\subset Q \ \forall Q \in M_1\} \\
&\ \vdots \\
M_k &:= \{Q(x,k) \mid x \in \tfrac{1}{2^k}\mathbb{Z}^n, Q(x,k) \subset U, Q(x,k) \not\subset Q \ \forall Q \in M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1}\} \\
M &:= \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \text{ abzählbar}
\end{aligned}$$

$$U = \bigcup_{Q \in M} Q$$

3. $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ $\mu'(K) = \mu(K)$

   Es gilt $K \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ für ein hinreichend großes R.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu'(K) &= \mu'(B_R) - \mu'(B_R \setminus K) \\
&\overset{2.}{=} \mu(B_R) - \mu(B_R \setminus K) \\
&= \mu(K)
\end{aligned}$$

4. $\mu'(B) \leq \mu(B) \ \forall B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\mu'(B) &\leq \inf\{\mu'(U) \mid B \subset U \text{ offen}\} \\
&= \inf\{\mu(U) \mid \ldots\} \\
&\overset{(2.5.4)}{=} \mu(B)
\end{aligned}$$

5. $\mu(B) \leq \mu'(B) \ \forall B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\overset{(2.5.4)}{=} \sup\{\mu(K) \mid K \subset B \ K \text{ kompakt}\} \\
&\overset{3.}{=} \sup\{\mu'(K) \mid K \subset B \ K \text{ kompakt}\} \\
&\leq \mu'(B)
\end{aligned}$$

$\square$

2.6 Jordanmaß μ^J und Lebesguemaß

Zur Erinnerung aus der Analysis II:

1. $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar* wenn ∂B eine Jordan-Nullmenge ist.
2. $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ gilt: B ist genau dann Jordan-messbar, wenn χ_B riemannintegrierbar ist.
3. Das *Jordan-Maß* einer Jordan-messbaren Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch
$$\mu^J(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x)\,\mathrm{d}x$$
wobei $\int$ das Riemannintegral sein soll; das Jordan-„Maß" ist kein Maß in unserem Sinne, da die Menge der unter ihm messbaren Mengen keine σ-Algebra bildet.

(2.6.1) **Satz:**

i) $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar $\Rightarrow$ B ist Lebesgue-messbar und $m(B) = \mu^J(B)$ wobei m das Lebesguemaß ist.

ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ beschränkt und f Riemannintegrierbar. Dann ist f auch Lebesgueintegrierbar und
$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

ii) Sei $R(f)$ das Riemannintegral und $Q(j,k) := j + [0, 2^{-k})^n$ wobei $j \in \left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^n$ wie in der letzten Stunde. Man erhält folgende Partition des $\mathbb{R}^n$:
$$P_k := \left\{ Q^\circ(j,k) \;\middle|\; j \in \left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^n \right\}$$
Definiere $\underline{f_k}, \overline{f_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch
$$\underline{f_k}(x) := \inf_{Q(j,k)} f, \quad x \in Q(j,k)$$
und
$$\overline{f_k}(x) := \sup_{Q(j,k)} f, \quad x \in Q(j,k)$$
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \underline{f_k}\,\mathrm{d}m &= \sum_j \inf_{Q(j,k)} f \cdot \underbrace{\mathrm{Vol}(Q(j,k))}_{=2^{-nk}} \\ &= \underline{s}(f, P_k) \to R(f) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_k}\,\mathrm{d}m &= \overline{s}(f, P_k) \to R(f) \end{aligned}$$
siehe Analysis II, Kapitel XV, Satz 1. Außerdem
$$\underline{f_k}(x) \leq \underline{f_{k+1}}(x) \leq f(x), \quad \overline{f_k}(x) \geq \overline{f_{k+1}}(x) \geq f(x)$$
Sei
$$\underline{f}(x) := \lim_{k\to\infty} \underline{f_k}(x), \quad \overline{f}(x) := \lim_{k\to\infty} \overline{f_k}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\underline{f}$ und $\overline{f}$ sind Lebesgue-messbar (nach (1.5.5) oder (1.6.6)) und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \underline{f} \, \mathrm{d}m &= \lim_{k\to\infty} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \underline{f_k} \, \mathrm{d}m}^{\underline{s}(f,P_k)} \\
&= R(f) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_k} \, \mathrm{d}m \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} \, \mathrm{d}m \\
\Rightarrow \overline{f} - \underline{f} &\geq 0 \\
\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} - \underline{f} \, \mathrm{d}m &= 0 \\
\stackrel{(1.7.9)}{\Rightarrow} \underline{f} &= \overline{f} \text{ f.ü.} \\
\Rightarrow f &= \underline{f} \text{ f.ü.}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist Lebesgueintegrierbar

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^n} \underline{f} \, \mathrm{d}m = R(f)$$

i) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und B beschränkt, dann ist χ_B ist Riemann-integrierbar $\stackrel{\text{ii)}}{\Rightarrow} \chi_B$ ist Lebesguesintegrierbar und

$$m(b) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \, \mathrm{d}m = R(\chi_B) = \mu^J(B)$$

□

(2.6.2) **Korollar:** Sei $B := [-T, T]^n$ und $f_k : B \to \mathbb{R}$ stetig, $\sup_{x\in B} |f_k(x)| \leq c \; \forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \; \forall x \in B$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \int_B f_k(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Beweis: Mit (2.6.1) und (1.6.6). □

(2.6.3) **Bemerkung:** $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Quadergebäude $B_0, B_1 \subset \mathbb{R}^n$ sodass $B_0 \subset B \subset B_1$, $\mu^J(B_1) - \mu^J(B_0) < \varepsilon$. Dies kann man verwenden um Satz (2.6.1), (i) direkt zu beweisen.

2.7 Lineare Operatoren

(2.7.1) **Satz:** Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, m)$ der Lebesgue Maß-Raum und $A \in \mathcal{A}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\Rightarrow \quad \Phi A := \{\Phi x \mid x \in A\} \in \mathcal{A}$$

und

$$m(\Phi A) = |\det(\Phi)| \cdot m(A)$$

Beweis: **1. Fall** $\det(\Phi) = 0$.
$\Rightarrow$ $\mathrm{im}\Phi = \{\Phi x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $\dim(\mathrm{im}\Phi) < n \quad \Rightarrow \quad m(\mathrm{im}\Phi) = 0$ (Übung) $\quad \Rightarrow \quad m(\Phi A) = 0 = |\det \Phi| \cdot m(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.
2. Fall $\det(\Phi) \neq 0$.

a. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar $\quad \Rightarrow \quad \Phi A$ ist Jordan-messbar und $\mu^J(\Phi A) = |\det \Phi| \mu^J(A)$ wie wir aus Analysis II, Kapitel XV, Lemma 8 vom 22.6.2005 wissen.

b. Sei U offen $\quad \Rightarrow \quad \exists$ disjunkte halboffene Quader $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ sodass

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_j \\ \Rightarrow \quad m(U) &= \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) \\ \Rightarrow m(\Phi U) &= \sum_{i=1}^{\infty} m(\Phi Q_j) \\ &\overset{\text{a)}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |\det \Phi| m(Q_j) \\ &= |\det \Phi| \cdot m(U) \end{aligned}$$

c. $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Satz (2.5.4)}}{\Rightarrow} \quad m(A) &= \inf\{m(U) \mid U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, A \subset U\} \\ \Rightarrow \quad \nu(\Phi A) &= \inf\{m(V) \mid V \text{ offen}, \Phi A \subset V\} \end{aligned}$$

wobei ν das Lebesgue äußere Maß ist.

$$\begin{aligned} &= \inf\{m(\Phi U) \mid U \text{ offen}, A \subset U\} \\ &\overset{\text{b)}}{=} |\det \Phi| \inf\{m(U) \mid U \text{ offen}, A \subset U\} \\ &= |\det \Phi| \cdot m(A) \end{aligned}$$

Warum ist ΦA Lebesgue-messbar?

$A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \exists B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ Borelmengen, mit$B_0 \subset A \subset B_1, \quad m(B_1 \backslash B_0) = 0$

$\Rightarrow$ (da Φ ein Homöomorphismus ist)

$$\Phi B_0, \Phi B_1 \in \mathcal{B}$$

$$\Phi B_0 \subset \Phi A \subset \Phi B_1$$

$$m(\Phi B_1 \setminus \Phi B_0) = \nu(\Phi(B_1 \setminus B_0)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi A \subset \mathcal{A}$$

□

2.8 Zusammenfassung und nicht lebesguemesssbare Menge

(2.8.1) **Zusammenfassung** $\nu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ist das Lebesgue äußere Maß

1. $\exists! \mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ translationsinvariant $\mu([0,1)^n) = 1$.

2. $\mu = \nu|_{\mathcal{B}}$

3. $\mathcal{A} :=$ Vervollständigung von $\mathcal{B}$ bezüglich μ. $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ ist ν-messbar.
4. $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} m(A) &= \inf\{\mu(U) \mid U \text{ offen}, A \subset U\} \\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subset A\} \end{aligned}$$

5. Falls $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist, so $A \in \mathcal{A}, m(A) = \mu^J(A)$
6. $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \Rightarrow \quad \Phi$ ist Lebesguemessbar und $m(\Phi A) = |\det \Phi| \cdot m(A)$.

(2.8.2) **Satz:** Sei $A \subset \mathbb{R}$ sodass jede Teilmenge von A Lebesguemessbar ist. Dann ist $m(A) = 0$.

Beweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Dann gibt es überabzählbare viele Äquivalenzklassen, da jede von ihnen abzählbar ist. Nach dem *Auswahlaxiom* $\exists E \subset \mathbb{R}$ sodass E aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, d.h.

i) $x, y \in E, x \neq y \quad \Rightarrow \quad x - y \notin \mathbb{Q}$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Q}$ sodass $x + q \in E$.

Also ist $\mathbb{R}$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $E + q$ wobei $q \in \mathbb{Q}$ und somit

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q, \quad A_q := A \cap (E + q)$$

Behauptung: A_q messbar $\quad \Rightarrow \quad m(A_q) = 0$.
(Jede Teilmenge von A ist messbar $\quad \Rightarrow \quad A_q$ ist messbar $\forall q \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad m(a) = \sum_{q \in Q} m(A_q) = 0$)
Beweis der Behauptung:
Annahme: A_q sei messbar. Dann ist $K_n := [-n, n] \cap A_q$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Um richtig durcheinander zu kommen, wählen wir jetzt

$$H_n := \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (\underbrace{K_n + r}_{\subset E + q + r})$$

Lebesgue-messbar $\forall n \in \mathbb{N}$ und $H_n \subset [-n, n+1] \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\geq m(H_n) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \underbrace{m(K_n + r)}_{= m(K_n)} \end{aligned}$$

da die Mengen $K_n + r$ und $K_n + r'$ disjunkt sind für $r \neq r'$ und $r, r' \in \mathbb{Q}$. Also ist $m(K_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $m(A_q) = 0$ da $A_q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. $\square$

3 Radonmaße und der Satz von Riesz

3.1 Grundlagen

(3.1.1) **Definition:** Sei X ein topologischer Raum.

i) Sei $x \in X$. Eine *Umgebung* von x ist eine Teilmenge $U \subset X$ sodass es eine offene Teilmenge $V \subset X$ gibt sodass $x \in V \subset U$.

ii) X heißt *Hausdorff-Raum* wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen $U, V \in X$ gibt mit
$$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$
Jede kompakte Menge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.

iii) X heißt *lokalkompakt* falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt (siehe Topologie, Serie 6).

iv) X heiße *σ-kompakt* wenn es eine Folge kompakter Teilmengen $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset X$ gibt sodass $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

(3.1.2) **Beispiel:** $X = \mathbb{R}^n$ erfüllt alle diese Eigenschaften.

(3.1.3) **Definition:** Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Ein solches Maß heißt *Radonmaß* wenn es folgende Eigenschaften hat:

i) Sei $\mathcal{B} \subset 2^X$ die Borel-σ-Algebra. Dann gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

ii) Jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ hat endliches Maß $\mu(K) < \infty$.
(Wäre X zusätzlich noch σ-kompakt, so könnte man X mit Mengen endlichen Maßes überdecken.)

iii) Für jede messbare Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ gilt:
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen}, A \subset U\}$$

iv) Für jede offene Teilmenge $U \in \mathcal{A}$ gilt:
$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompakt}, K \subset U\}$$

(3.1.4) **Beispiel:** $\mu =$ Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

(3.1.5) **Vorschau** Jedes Radonmaß μ definiert ein stetiges (im Sinne von (3.3.3)) lineares Funktional $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ durch
$$\Lambda f := \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(X)$$
wobei C_c der Raum der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger
$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$
ist.

(3.1.6) **Lemma:** Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Radonmaß. Dann gilt für jede messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$

(*) $$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompakt}, K \subset A\}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

1. Nach iii) $\exists U \subset X$ offen sodass $A \subset U, \mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt $\mu(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$, da $\mu(A) < \infty$.

2. Nach iii) $\exists V \subset X$ offen sodass $U \setminus A \subset V, \mu(V) < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Nach iv) $\exists K \subset U$ kompakt sodass $\mu(K) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}$ Definiere $C := K \setminus V \quad \Rightarrow \quad C$ ist abgeschlossene Teilmenge von $K \quad \Rightarrow \quad C$ ist kompakt, $C \subset U \setminus V \subset A$.

$$\begin{aligned} A \setminus C &\subset (A \setminus K) \cup V \\ &\subset (U \setminus K) \cup V \\ \Rightarrow \mu(A \setminus C) &\leq \mu(U \setminus K) + \mu(V) \\ &= \underbrace{\mu(U) - \mu(K)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\mu(V)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\ \Rightarrow \mu(C) &= \mu(A) - \mu(A \setminus C) \\ &> \mu(A) - \varepsilon \end{aligned}$$

   Wir haben beim Subtrahieren mehrmals benutzt, dass die Maße endlich sind.

□

(3.1.7) **Lemma:** Sei X ein lokalkompakter und σ-kompakter Hausdorff-Raum. Dann gilt (*) für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Seien $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset X$, K_n kompakt und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Sei $A \in \mathcal{A}$.

1. Fall: $\mu(A) < \infty$

   $\Rightarrow$ (*) gilt nach Lemma (3.1.6).

2. Fall: $\mu(A) = \infty$

   Sei $A_n := A \cap K_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) \leq \mu(K_n) < \infty$. Nach (1.4.5) ist

$$\infty = \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

   $\Rightarrow$ Nach Lemma (3.1.6) gibt es für jedes n eine kompakte Menge $C_n \subset A_n$ mit $\mu(C_n) > \mu(A_n) - 1 \quad \Rightarrow \quad C_n \subset A, \mu(C_n) \to \infty$.

□

(3.1.8) **Bemerkung:** Sei X lokalkompakt und hausdorffsch und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Radonmaß, wobei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und habe kompakten Träger. $\int_X f \, d\mu$ hängt nur von $\mu|_{\mathcal{B}}$ ab.

(3.1.9) **Lemma:** Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum.

i) Ist $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein Radonmaß und $(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ die Vervollständigung von $(X, \mathcal{B}, \mu)$, dann ist μ^* ebenfalls ein Radonmaß.

ii) Ist X σ-kompakt, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein beliebiges Radonmaß und $(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ die Vervollständigung von $(X, \mathcal{B}, \mu|_{\mathcal{B}})$, dann ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}^*$ und $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$.

Beweis:

i)
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$
- $K \subset X$ kompakt $\quad \Rightarrow \quad \mu^*(K) = \mu(K) < \infty$.
- $\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) \mid K \subset U, K \text{ kompakt}\}$
  für offene $U \subset X$, denn $\mu^*(U) = \mu(U)$ und $\mu^*(K) = \mu(K)$.
- $A \in \mathcal{B}^* \quad \overset{\text{zz}}{\Rightarrow} \quad \mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) \mid A \subset U \subset X, U \text{ offen}\}$
  Nach Definition von $\mathcal{B}^*$ $\exists B \in \mathcal{B}$ mit $A \subset B$ und $\mu(B) = \mu^*(A)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mu^*(A) &= \mu(B) \\ &= \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen}, B \subset U\} \\ &\geq \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen}, A \subset U\} \\ &\geq \mu^*(A) \\ &\Rightarrow \text{„="} \end{aligned}$$

ii) Sei $A \in \mathcal{A}$

1. Fall: $\mu(A) < \infty$
   Dann $\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists K_i \subset X$ kompakt und $\exists U_i \subset X$ offen sodass
   $$K_i \subset A \subset U_i, \quad \mu(K_i) \geq \mu(A) - \frac{1}{i} \quad \text{und} \quad \mu(U_i) \leq \mu(A) + \frac{1}{i}$$
   Sei
   $$B_0 := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad B_1 := \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{B}$$
   $\Rightarrow \quad B_0 \subset A \subset B_1$
   $$\begin{aligned} \mu(B_0) \geq \mu(K_i) &\geq \mu(A) - \frac{1}{i} \ \forall i \\ \mu(B_1) \leq \mu(U_i) &\leq \mu(A) + \frac{1}{i} \ \forall i \\ \overset{\lim}{\Rightarrow} \quad \mu(A) \leq \mu(B_0) &\leq \mu(B_1) \leq \mu(A) < \infty \\ \Rightarrow \quad \mu(B_1 \setminus B_0) &= \mu(B_1) - \mu(B_0) \\ &= 0 \\ \Rightarrow \quad A \in \mathcal{B}^*, \mu^*(A) &= \mu(B_0) = \mu(B_1) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

2. Fall: $\mu(A) = \infty$
   Es gibt $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset X$, K_n kompakt und $X = \bigcup K_n$.
   $A_n := A \cap K_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_n) \leq \mu(K_n) < \infty$
   $$\overset{\text{1. Fall}}{\Rightarrow} \quad A_n \in \mathcal{B}^*, \quad \mu^*(A_n) = \mu(A_n)$$
   $$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}^*, \quad \mu^*(A) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n) = \mu(A)$$

□

Aus all diesem folgt, dass es nur wichtig ist, das Radonmaß auf den Borelmengen zu kennen.

3.2 Konstruktion aus äußeren Maßen

(3.2.1) **Satz:** Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß mit folgenden Eigenschaften:

i) $\nu(K) < \infty$ $\forall K \subset X$ kompakt.

ii) $\nu(K_0 \cup K_1) = \nu(K_0) + \nu(K_1) \; \forall K_0, K_1 \subset X$ kompakt und $K_0 \cap K_1 = \emptyset$.

iii) $\nu(A) = \inf\{\nu(U) \mid U \subset X \text{ offen}, A \subset U\} \; \forall A \subset X$.

iv) $\nu(U) = \sup\{\nu(K) \mid K \subset X \text{ kompakt}, K \subset U\} \; \forall U \subset X$ offen.

Dann ist $\nu|_{\mathcal{B}}$ ein Radonmaß.

Beweis: Definiere

$$\mathcal{A}_e := \{E \subset X \mid \sup\{\nu(K) \mid K \subset E, K \text{ kompakt}\} < \infty\}$$

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \cap K \in \mathcal{A}_e \; \forall K \subset X \text{ kompakt}\}$$

wobei das $_e$ in $\mathcal{A}_e$ für endlich steht.
Wir zeigen, dass $\mu := \nu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein vollständiges Radonmaß ist – in sieben Schritten.

1. Schritt: $E_1, E_2, E_3 \ldots \in \mathcal{A}_e$ und $E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}_{=E} = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

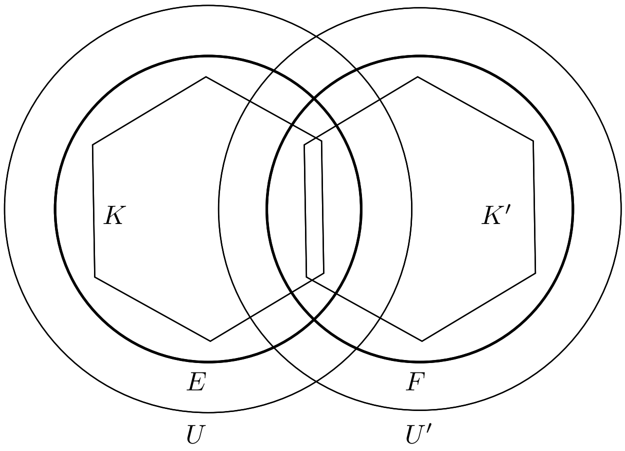
und $\nu(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{A}_e$.
Beweis (mit Fallunterscheidung):

1. Fall: $\nu(E) = \infty$.
   Dann ist
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)}_{=\infty} \geq \nu(E) = \infty$$

2. Fall: $\nu(E) < \infty$
   Wegen $E_i \in \mathcal{A} \; \forall i \exists K_i \subset E_i, K_i$ kompakt sodass $\nu(K_i) \geq \nu(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$.
   Dann gilt $K_i \cap K_j = \emptyset \; \forall i \neq j$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \nu(E) & \geq & \nu(K_1 \cup \ldots \cup K_n) \\
 & & = & \nu(K_1) + \ldots \nu(K_n) \\
 & & \geq & \nu(E_1) + \ldots \nu(E_n) - \varepsilon \\
\overset{n \to \infty}{\Rightarrow} & \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) & \leq & \nu(E) + \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \quad \text{da } \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\
\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} & \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) & \leq & \nu(E) \\
 & & \leq & \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) \quad \text{wegen Sub-}\sigma\text{-Additivität} \\
\Rightarrow & \nu(E) & = & \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) \\
\Rightarrow \quad \exists n \text{ sodass} & \sum_{i=n+1}^{\infty} \nu(E_i) & \leq & \varepsilon \\
\Rightarrow & \nu(K_1 \cup \ldots \cup K_n) & \geq & \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) - \varepsilon \\
 & & = & \nu(E) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \nu(E_i) - \varepsilon \geq \nu(E) - 2\varepsilon \\
 & & \Rightarrow & E \in \mathcal{A}_e
\end{array}$$

2. Schritt: $E, F \in \mathcal{A}_e \quad \Rightarrow \quad E \setminus F, E \cup F, E \cap F \in \mathcal{A}_e$
Beweis:



Sei $\varepsilon > 0$. Wähle kompakte K, K' und offene U, U' sodass

$$K \subset E \subset U \quad \text{und} \quad K' \subset E' \subset U'$$

und

$$\begin{aligned} \nu(K) &\geq \nu(E) - \varepsilon \\ \nu(U) &\leq \nu(E) + \varepsilon \\ \nu(K') &\geq \nu(F) - \varepsilon \\ \nu(U') &\leq \nu(F) + \varepsilon \end{aligned}$$

Da $U \setminus K \in \mathcal{A}_e$ und $K \in \mathcal{A}_e$:

$$\nu(E \setminus K) \leq \nu(U \setminus K) \overset{\text{Schritt 1}}{=} \nu(U) - \nu(K) \leq 2\varepsilon$$

Ähnlich

$$\nu(U' \setminus F) \leq \nu(U' \setminus K') = \nu(U') - \nu(K') \leq 2\varepsilon$$

Sei $C := K \setminus U'$ kompakt, $C \subset E \setminus F$. Dann ist

$$\begin{aligned} E \setminus F &\subset (E \setminus K) \cup \underbrace{(K \setminus U')}_{=C} \cup (U' \setminus F) \\ \Rightarrow \quad \nu(E \setminus F) &\leq \nu(E \setminus K) + \nu(C) + \nu(U' \setminus F) \\ &\leq \nu(C) + 4\varepsilon \end{aligned}$$

Da ε beliebig ist, folgt damit

$$\begin{aligned} &E \setminus F \in \mathcal{A}_e \\ &E \cup F = F \mathbin{\dot\cup} (E \setminus F) \in \mathcal{A}_e \\ &E \cap F = E \setminus (E \setminus F) \in \mathcal{A}_e \end{aligned}$$

3. Schritt: $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra
Beweis:

- $X \in \mathcal{A}$ da $K \in \mathcal{A}_e$ $\forall K \subset X$ kompakt.
-

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A \cap K \in \mathcal{A}_e \ \forall K \subset X \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \quad A^{\mathrm{c}} \cap K = K \setminus (K \cap A) \in \mathcal{A}_e \ \forall k \text{ (Schritt 2)} \\ &\Rightarrow \quad A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

- Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ und $K \subset X$ kompakt. Sei $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && B_i := A_i \cap K \in \mathcal{A}_e \\ &\overset{\text{Schritt 2}}{\Rightarrow} && E_i := B_i \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{i-1}) \in \mathcal{A}_e \\ &\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} && \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}_e \\ & && \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \cap K \end{aligned}$$

Also $A \cap K \in \mathcal{A}_e \ \forall K \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{A}$.

4. Schritt: $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
Beweis: Sei $A \subset X$ abgeschlossen

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && A \cap K \text{ kompakt } \forall K \subset X \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow && A \cap K \in \mathcal{A}_e \ \forall K \\ &\Rightarrow && A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

5. Schritt: $\forall A \subset X$ gilt: $A \in \mathcal{A}_e \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{A}$ und $\nu(A) < \infty$.
Beweis: „$\Rightarrow$“ Ist $A \in \mathcal{A}_e$, so mit Schritt 2 $A \cap K \in \mathcal{A}_e \forall K \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{A}$.

„$\Leftarrow$“ Sei $A \in \mathcal{A}$ und $\nu(A) < \infty$

$\overset{\text{iii)}}{\Rightarrow}$ $\exists$ offene Teilmenge $U \subset X$ mit $A \subset U$, $\nu(U) < \infty$

$\overset{\text{iv)}}{\Rightarrow}$ $\exists K \subset U, K$ kompakt sodass $\nu(K) \geq \nu(U) - \varepsilon$

$\overset{\text{1. Schritt}}{\Rightarrow}$ $\nu(U \setminus K) = \nu(U) - \nu(K) \leq \varepsilon$.

Außerdem $A \cap K \in \mathcal{A}_e$ da $A \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\exists$ kompakte Teilmenge $H \subset A \cap K$ sodass $\nu(H) < \nu(A \cap K) - \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \nu(H) \quad \geq \quad \nu(A) - \nu(A \setminus K) - \varepsilon$$

(da $\nu(A) \leq \nu(A \cap K) + \nu(A \setminus K)$)

$$\begin{aligned} &\geq \quad \nu(A) - \nu(U \setminus K) - \varepsilon \\ &\geq \quad \nu(A) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Also $A \in \mathcal{A}_e$ da ($\forall \varepsilon > 0 \exists H \subset A$ kompakt mit $\nu(H) \geq \nu(A) - 2\varepsilon$).

6. Schritt: $\mu := \nu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Radonmaß.
Beweis: $\nu(\emptyset) = 0$ (äußeres Maß).

Seien $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt.

1 Fall: $\nu(A_i) < \infty \ \forall i$
$\Rightarrow$ $A_i \in \mathcal{A}_e \ \forall i$ mit Schritt 5 $\Rightarrow$ $\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ mit Schritt 1.

2 Fall: $\exists i$ mit $\nu(A_i) = \infty$
$\Rightarrow \nu(A) \geq \nu(A_i) = \infty$, das heißt $\nu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß. Radon nach Schritt 4.

7. Schritt: Vollständigkeit. Übung (Hinweis: $\nu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{A}_e$).

$\square$

3.3 Darstellungssatz von Riesz, Eindeutigkeit

Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum.

$$C_c(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \ \operatorname{supp}(f) \subset X \text{ kompakt}\}$$

(3.3.1) **Definition:** Ein lineares Funktional $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ heißt *positiv* wenn

$$f \in C_c(X) \quad \text{und} \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda f \geq 0$$

(3.3.2) **Bemerkung:** Λ ist nicht notwendigerweise bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

beschränkt (beschränkt im Sinne von S. 56).

(3.3.3) **Lemma:** $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ sei ein positives lineares Funktional. Dann ist Λ stetig in folgendem Sinn:

$$\left.\begin{array}{r} f_n \in C_c(X),\ f \in C_c(X) \\ K \subset X \text{ kompakt, } \operatorname{supp}(f_n) \subset K \forall n \\ f_n \to f \text{gleichmäßig} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Lambda f_n \to \Lambda f$$

(3.3.4) **Lemma von Urysohn:** X lokal kompakter Haudorffraum.
Sei $K \subset X$ kompakt, $U \subset X$ offen, $K \subset U$. Dann $\exists \varphi \in C_c(X)$ mit

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset U, \qquad \varphi|_K \equiv 1 \qquad 0 \leq \varphi \leq 1$$

Beweis: siehe Rudin, Satz 2.12 oder Topologievorlesung, Lemma 10.3. □

Beweis von (3.3.3): Nach Urysohn $\exists \varphi \in C_c(X)$ sodass $\varphi(x) = 1\ \forall x \in K$.

$$\varepsilon_n := \|f_n - f\| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon_n \varphi(x) \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon_n \varphi(x)\ \forall x$$

$$\overset{\Lambda \text{ positiv}}{\Rightarrow} \quad -\varepsilon_n \Lambda\varphi \leq \Lambda f_n - \Lambda f \leq \varepsilon_n \Lambda \varphi$$

$$\Rightarrow \quad |\Lambda f_n - \Lambda f| \leq \varepsilon_n \Lambda \varphi \to 0$$

□

(3.3.5) **Beispiel:** Ist $\mathcal{B} \subset 2^X$ die Borel-σ-Algebra und $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein Radonmaß, so ist

$$\Lambda f := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ein Beispiel eines Funktionals, das die Voraussetzungen von (3.3.3) erfüllt.

(3.3.6) **Darstellungssatz von Riesz:** Für jedes positive lineare Funktional $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein Radonmaß $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ sodass

$$\Lambda f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_c(X)$$

Beweis der Eindeutigkeit: **Behauptung:** Sei μ ein solches Radonmaß und Λ ein positives lineares Funktional. Dann ist

$$\mu(U) = \sup\{\Lambda f \mid f \in C_c(X),\ 0 \leq f \leq 1,\ \mathrm{supp} f \subset U\} \quad \forall U \subset X \text{ offen}$$

Die Eindeutigkeit von μ folgt dann aus der Regularitätseigenschaft

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid B \subset U \subset X,\ U \text{ offen}\}$$

für alle Borelmengen B.
Beweis der Behauptung:

1. $0 \leq f \leq 1$ und $\mathrm{supp}(f) \subset U \quad \Rightarrow \quad \Lambda f = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X \chi_U \, \mathrm{d}\mu = \mu(U)$.

2. Unter der Voraussetzung $\mu(U) < \infty$:

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists K \subset U \text{ kompakt sodass } \mu(K) \geq \mu(U) - \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists f \in C_c(X), \quad 0 \leq f \leq 1, \quad \mathrm{supp}(f) \subset U \\ &\text{und} \\ f(x) = 1\ \forall x \in K \quad &\Rightarrow \quad \Lambda f \geq \int\limits_X \chi_K \, \mathrm{d}\mu = \mu(K) \geq \mu(U) - \varepsilon \end{aligned}$$

3. $\mu(U) = \infty$
$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \exists K_n \subset U$, K_n kompakt, sodass $\mu(K_n) \geq n$ und, mit Urysohn

$$f_n \in C_c(X), \quad \mathrm{supp}(f_n) \subset U, \quad 0 \leq f_n \leq 1$$

sodass $\Lambda f \geq \mu(K_n) \geq n \quad \Rightarrow \quad \Lambda f = \infty$.

□

3.4 Zerlegung der Eins

(3.4.1) **Lemma:** Sei X ein lokalkompakter hausdorffraum, $K \subset X$ kompakt und $y \notin K$. Dann $\exists V \subset X$ offen sodass $K \subset V$, $\overline{V}$ kompakt, $y \notin \overline{V}$.

Beweis: X hausdorffsch $\Rightarrow \forall x \in K$ gibt es offene Teilmengen $V_x, W_x \subset X$ sodass $x \in V_x$, $y \in W_x$, $V_x \cap W_x = \emptyset$. O.B.d.A seien $\overline{V_x}$ und $\overline{W_x}$ kompakt. Da K kompakt ist $\exists x_1, \ldots x_n \in K$ sodass

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} =: V \quad \Rightarrow \quad y \notin \overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}}$$

□

(3.4.2) **Lemma:** Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $K \subset U \subset X$ mit K kompakt und U offen. Dann gibt es eine offene Menge $V \subset X$ sodass $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ kompakt.

Beweis: Sei o.B.d.A. $U \subsetneqq X$. $C := X \setminus U$ ist abgeschlossen und nicht leer. $K \cap C = \emptyset$. Nach (3.4.1) $\forall y \in C \exists V_y \subset X$ offen sodass $K \subset V_y, \overline{V_y}$ kompakt und $y \notin \overline{V_y}$

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{y \in C} (\underbrace{\overline{V_y} \cap C}_{\text{kompakt}}) = \emptyset$$

Aus der Topologievorlesung[3] folgt, dass $\exists y_1, \ldots y_n \in C$ sodass

$$C \cap \overline{V_{y_1}} \cap \ldots \cap \overline{V_{y_n}} = \emptyset$$

[3] Folgt es daraus nicht, ist es eine Übung.

Sei $V := V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n} \quad \Rightarrow \quad V$ ist offen, $K \subset V$, $K \subset V$ und $\overline{V}$ ist kompakt.

$$\overline{V} \quad \subset \quad \overline{V_{y_1}} \cap \overline{V_{y_2}} \cap \ldots \cap \ldots \overline{V_{y_n}} \quad \subset \quad U$$

□

(3.4.3) **Lemma:** (Zerlegung der Eins) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $U_1, \ldots U_n \subset X$ offen. Sei $K \subset U_1 \cup \ldots U_n$ kompakt. Dann $\exists \varphi_1, \ldots \varphi_n \in C_c(X), 0 \leq \varphi_i \leq 1$ sodass $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1 \;\forall x \in K \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \leq 1$$

Beweis: $x \in K \quad \Rightarrow \quad \exists i(x) \in \{1, \ldots n\}$ sodass $x \in U_{i(x)}$. Nach (3.4.2) existiert eine offene Menge $V_x \subset X$ sodass

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_{i(x)} \quad \Rightarrow \quad K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$$

$K \quad \Rightarrow \quad \exists x_1, \ldots x_m \in K$ sodass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$$

Wir wissen:

$$\overline{V}_{x_j} \subset U_{i(x_j)}$$

Für $i \in \{1, \ldots n\}$ definieren wir

$$D_i := \bigcup_{i(x_j)=i} \overline{V}_{x_j} \subset U_i$$

Nach dem Lemma von Urysohn, (3.3.4), $\forall i \;\exists \psi_i \in C_c(X)$ sodass

$$0 \leq \psi_i \leq 1, \quad \text{supp}(\psi_i) \subset U_i, \quad \psi_i(x) = 1 \;\forall x \in D_i$$

Definiere

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \psi_1 \\
\varphi_2 &:= (1 - \psi_1)\psi_2 \\
\varphi_3 &:= (1 - \psi_1)(1 - \psi_2)\psi_3 \\
&\vdots \\
\varphi_n &:= (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n \\
\Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i &= \prod_{i=1}^{n} (1 - \psi_i)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sum \varphi_i \leq 1, \quad \varphi \geq 0$$

$$\text{supp}(\varphi_i) \subset \text{supp}(\psi_i) \subset U$$

$$x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} (1 - \psi_i(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$$

□

3.5 Darstellungssatz von Riesz, Existenz

Beweis der Existenz des Radonmaßes beim Satz von Riesz, (3.3.6):
Sei $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional.

$$\mu(U) := \sup\{\Lambda f \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subset U \text{ für } U \subset X \text{ offen } \}$$

$$\nu(A) := \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen }, A \subset U\} \ \forall A \subset X$$

Schritt 1: $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß.

- $\nu(\emptyset) = 0$.
- $E \subset F \subset X \quad \Rightarrow \quad \nu(E) \leq \nu(F)$
- $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \Rightarrow \quad \nu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$
  - Seien U_1, U_2 offen $\Rightarrow \quad \mu(U_1 \cup U_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$.
    Sei $f \in C_c(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $K := \operatorname{supp}(f) \subset U_1 \cup U_2$. Daraus folgt mit (3.4.3) $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in C_c(X)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$:
    $0 \leq \varphi_1 \leq 1$, $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 1$ und $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1 \ \forall x \in K$.
    $\Rightarrow \quad f = \varphi_1 f + \varphi_2 f$
    $\Rightarrow \quad \Lambda f = \Lambda(\varphi_1 f) + \Lambda(\varphi_2 f) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$
    $\overset{\text{Def. von } \mu}{\Rightarrow} \quad \mu(U_1 \cup U_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$.
  - $\mu(E_i) = \infty$ für ein i.
    Da $E_i \subset E$ gilt
    $$\nu(E) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$
  - $\nu(E_i) < \infty \ \forall i$
    Wähle $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists U_i \subset X$ offen sodass $E_i \subset U_i$ und $\mu(U_i) \leq \nu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.
    Wähle $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp}(f) \subset U := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.
    Da $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist $\exists k$ sodass $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$
    $$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda f &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \mu(U_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \left(\nu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) + \varepsilon \\ \Rightarrow \mu(U) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) + \varepsilon \end{aligned}$$
    das heißt $\forall \varepsilon > 0 \exists U$ offen sodass $\bigcup E_i \subset U$.
    $$\mu(U) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)\right) + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \nu\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i \nu(E_i)$$

Schritt 2: $\forall U \subset X$ offen gilt $\mu(U) = \sup\{\nu(K) \mid K \subset U, K \text{ kompakt}\}$
Sei $f \in C_c(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$ und

$$K := \operatorname{supp}(f) \subset U$$

$$\Rightarrow \quad \forall V \subset X \text{ offen mit } K \subset V \text{ gilt } \Lambda f \leq \mu(V)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Lambda f &\leq \inf\{\mu(V) \mid V \text{ offen}, K \subset V\} \\
&= \nu(K) \\
\Rightarrow \mu(U) &= \sup\{\Lambda f \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subset U\} \\
&\leq \sup\{\nu(K) \mid K \subset U, K \text{ kompakt}\} \\
&\leq \nu(U) = \mu(U) \\
\Rightarrow \text{„=“}
\end{aligned}$$

Schritt 3: $\forall K \subset X$, K kompakt gilt

$$\nu(K) = \inf\{\Lambda f \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, f(x) = 1 \forall x \in K\} < \infty$$

weil es mindestens eine solche Funktion gibt – Lemma von Urysohn.

1. $f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, f|_K \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \nu(K) \leq \Lambda f$.
   Sei $0 < \alpha < 1$ und

   $$U_\alpha := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \text{ offen}$$

   $\Rightarrow$

   - $K \subset U_\alpha$
   - $\forall g \in C_c(X)$ mit $0 \leq g \leq 1$ und $\operatorname{supp}(g) \subset U_\alpha$ gilt $\alpha g(x) \leq \alpha \leq f(x)\ \forall x \in U_\alpha$

   $$\begin{aligned}
   &\Rightarrow && \alpha g(x) \leq f(x)\ \forall x \in X \\
   &\Rightarrow && \Lambda g \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f \\
   &\overset{\sup g}{\Rightarrow} && \mu(U_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f \\
   &\overset{K \subseteq U_\alpha}{\Rightarrow} && \nu(K) \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f \\
   &\Rightarrow && \nu(K) \leq \Lambda f
   \end{aligned}$$

2. $$\inf_{\substack{f \in C_c(X) \\ 0 \leq f \leq 1 \\ f|_K \equiv 1}} \Lambda f \leq \nu(K)$$

   Sei $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists U \subset X$ offen mit $K \subset U, \mu(U) \leq \nu(K) + \varepsilon$
   $\overset{\text{Urysohn}}{\Rightarrow} \exists f \in C_c(X)$ mit $f|_K \equiv 1, \operatorname{supp}(f) \subset U, 0 \leq f \leq 1$
   $\Rightarrow \Lambda f \leq \mu(U) \leq \nu(K) + \varepsilon$.

Schritt 4: $K_1, K_2 \subset X$ kompakt und disjunkt $\quad \Rightarrow \quad \nu(K_1 \cup K_2) = \nu(K_1) + \nu(K_2)$
Mit Urysohn $\exists f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1$ mit $f(x) = 1 \forall x \in K_1$, $f(x) = 0 \forall x \in K_2$.
Wähle $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ mit Schritt 3 $\exists g \in C_c(X), 0 \leq g \leq 1$, $g|_{K_1 \cup K_2} \equiv 1, \Lambda g \leq \nu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \nu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon &\geq \Lambda g \\
&= \Lambda(\underbrace{(1-f)g}_{=1 \text{ auf } K_2}) + \Lambda(\underbrace{fg}_{=1 \text{ auf } K_1}) \\
&\overset{\text{Schritt 3}}{\geq} \nu(K_1) + \nu(K_2) \\
\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \nu(K_1 \cup K_2) &\geq \nu(K_1) + \nu(K_2) \\
\overset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} \text{Schritt 4}
\end{aligned}$$

Schritte 1–4 und (3.2.1) $\Rightarrow$ Die Restriktion

$$\mu := \nu|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

ist ein Radonmaß.

Schritt 5: $\Lambda f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in C_c(X)$.

(*) Wir zeigen

$$\Lambda f \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_c(X)$$

Dann gilt auch $-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f) \,\mathrm{d}\mu = -\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ also auch $\Lambda f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis von (*):

$K := \operatorname{supp}(f), b := \sup_{x \in X} f(x), a := \inf_{x \in X} f(x)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $y_0 = a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b$ mit $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$.

$$E_i := \{x \in K \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}$$

$\Rightarrow \quad E_i = K \cap \{f > y_{i-1}\} \cap \{f \leq y_i\} \quad \Rightarrow \quad E_i \in \mathcal{B}\ E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

$\Rightarrow \quad \exists U_i \subset X$ offen mit $E_i \subset U_i$ und $f(x) \leq y_i + \varepsilon\ \forall x \in U_i$ und

$$\mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \quad i = 1, \ldots n$$

$$\overset{(3.4.3)}{\Rightarrow} \exists \varphi_i \in C_c(X), 0 \leq \varphi_i \leq 1, 0 \leq \sum \varphi_i \leq 1$$

$$\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_i, \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1\ \forall x \in K$$

$\Rightarrow \quad f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f$ und nach Schritt 3:

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda\varphi_i$$

und $\varphi_i f \leq (y_i + \varepsilon)\varphi_i$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \Lambda f &= \sum_{i=1}^{n} \Lambda(\varphi_i f) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Lambda((y_i + \varepsilon)\varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\Lambda\varphi_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(y_i + |a| + \varepsilon)}_{\geq 0} \underbrace{\Lambda\varphi_i}_{\leq \mu(U_i)} - |a| \sum_{i=1}^{n} \Lambda\varphi_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + |a| + \varepsilon)\mu(U_i) - |a| \sum_{i=1}^{n} \Lambda\varphi_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + |a| + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}(y_i + |a| + \varepsilon) \\
&\leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon)
\end{aligned}$$

□

4 L^p-Räume

4.1 Hölder- und Minkowskiungleichung

(4.1.1) **Definition:** $1 \leq p, q \leq \infty$ heißen *konjugiert* falls

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(4.1.2) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Die *L^p-Norm von f* ist definiert durch

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Für $p = \infty$ siehe (4.2.7).

(4.1.3) **Satz:** Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ μ-messbar, $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty, \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $1 < p, q < \infty$ konjugiert. Dann gelten die

i) Hölder-Ungleichung

$$\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

bzw.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

ii) und die Minkowski-Ungleichung

$$\left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

bzw.

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Falls in der Minkowski-Ungleichung „=“ gilt, und $\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu > 0$, dann $\exists \lambda \geq 0$ sodass $g = \lambda f$ f.ü.

(4.1.4) **Beispiel:** $X = \{1, \ldots n\}$, $\mu =$ Zählmaß, $\mathrm{Funkt}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ ($\mathrm{Funkt}(A, B)$ ist die Menge der Funktionen von A nach B), $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, $x(i) = x_i \geq 0$

$$\left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(4.1.5) **Bemerkung:** Sei $a, b > 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

(*)
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

(**)
$$ab = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \Leftrightarrow a^p = b^q$$

Das ist Aufgabe 1 von Serie 9.

Beweis von (4.1.3), (i):

$$A := \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

$$B := \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

1. Fall: $A = 0$ (oder $B = 0$)

$$\begin{aligned} A = 0 &\overset{(1.7.9)}{\Rightarrow} f = 0 \text{ f.ü.} \\ &\Rightarrow fg = 0 \text{ f.ü.} \\ &\Rightarrow \int_X fg \,\mathrm{d}\mu = 0 = AB \end{aligned}$$

2. Fall: $A = \infty, B > 0$ (oder $B = \infty, A > 0$) $\quad\Rightarrow\quad AB = \infty \quad\Rightarrow\quad$ (i)
3. Fall: $0 < A, B < \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\int_X fg \,\mathrm{d}\mu}{AB} &= \int_X \frac{f}{A} \cdot \frac{g}{B} \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{(*)}{\leq} \int_X \left(\frac{1}{p}\left(\frac{f}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{g}{B}\right)^q\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p}\frac{\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu}{B^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

□

(4.1.6) **Bemerkung:**

$$\begin{aligned} \int_X fg \,\mathrm{d}\mu = AB > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{fg}{AB} = \frac{1}{p}\left(\frac{f}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{g}{B}\right)^q \text{ f.ü.} \\ &\overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{f}{A}\right)^p = \left(\frac{g}{B}\right)^q \text{ f.ü.} \\ &\Leftrightarrow \alpha f^p = \beta g^q \text{ f.ü. wobei } \alpha, \beta > 0 \end{aligned}$$

Beweis von (4.1.3), (ii):

$$a := \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

$$b := \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_p$$

$$c := \left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f+g\|_p$$

zu zeigen: $c \leq a + b$.
Schritt 1: $a, b < \infty \quad \Rightarrow \quad c < \infty$

$$f \leq (f^p + g^p)^{\frac{1}{p}} \text{ und } g \leq (f^p + g^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f + g &\leq 2(f^p + g^p)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \int_X (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu &\leq 2^p \int_X (f^p + g^p) \, \mathrm{d}\mu \\ \Rightarrow c^p &\leq 2^p(a^p + b^p) \end{aligned}$$

Schritt 2: Seien $a, b < \infty$ und q zu p konjugiert.

$$\begin{aligned} c^p &= \int_X (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X f(f+g)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq (a+b) \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (a+b)c^{p-1} \end{aligned}$$

Wegen $c < \infty$ folgt
$$c \leq a + b$$
Wir haben $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \quad \Rightarrow \quad q(p-1) = p$ verwendet.
Im Fall $c = a + b$ gilt

$$\int_X f(f+g)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu = a \left(\int (f+g)^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_X g(f+g)^{q-1} \, \mathrm{d}\mu = b \left(\int (f+g)^{(q-1)p} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \quad \exists \alpha : \alpha f^p = (f+g)^p = \beta g^p \text{ f.ü.} \quad \Rightarrow \quad g = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{p}} f \text{ f.ü.}$$

Falls „=“ gilt: $0 < \int f^p < \infty$ und $\int g^p < \infty$.
Also gibt es ein $\lambda \geq 0$ mit $g = \lambda f$ f.ü. □

4.2 Die L^p-Banachräume

(4.2.1) **Definition:** f heißt *p-fach integrierbar* (oder *L^p-Funktion*) falls

$$\|f\|_p < \infty$$

(4.2.2) **Bezeichnung:**

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und } \|f\|_p < \infty \}$$

(4.2.3) **Bemerkung:**

1. $\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum.

   $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \Rightarrow \quad f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$

   $f \in \mathcal{L}^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p < \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu).$

2. Eigenschaften der Funktion

$$\mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R} : f \mapsto \|f\|_p$$

   (a) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ \forall f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$

   (b) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

   (c) $\|f\|_p \geq 0$.

   (d) $\|f\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$ f.ü..

   (e) $f = g$ f.ü. $\quad \Rightarrow \quad \|f\|_p = \|g\|_p$

3. Wir betrachten die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \text{ f.ü.} \Leftrightarrow \|f-g\|_p = 0$$

   Dann ist der Quotientenraum

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$$

   ein normierter Vektorraum.

   Die Elemente von $L^p(\mu)$ sind Äquivalenzklassen p-fach integrierbarer Funtionen auf X. Trotzdem schreiben wir z.B. $f \in L^p(\mu)$ für eine Funktion f, was bedeuten soll, dass f ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[f]$ ist und $[f] \in L^p(\mu)$. Das ist möglich wenn es nicht darauf ankommt, welcher Repräsentant f ist, also alle Aussagen über f nur für f.ü. gemacht werden.

(4.2.4) **Lemma:** $1 < p < \infty, f, g \in L^p(\mu)$. Sei $\|f\|_p \neq 0$ und $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$. dann $\exists \lambda \geq 0$ sodass $g = \lambda f$ f.ü..

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_X (|f|+|g|)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |y|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(4.1.3)}{\Rightarrow} \exists \lambda \geq 0 : |g| = \lambda |f| \text{ f.ü. und } |f+g| = |f| + |g| \text{ f.ü.} \\
&\Rightarrow f(x), g(x) \text{ haben f.ü. das gleiche Vorzeichen} \\
&\Rightarrow g = \lambda f \text{ f.ü.}
\end{aligned}$$

□

(4.2.5) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty]$ messbar. Das *essentielle Supremum* von f ist definiert durch

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{c \in [0,\infty], f \leq c \text{ f.ü.}\}$$

(4.2.6) **Bemerkung:**

1. Falls $c < \operatorname{ess\,sup} f$ ist, so gilt
$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > c\}) > 0$$

2. $$A := \{x \in X \mid f(x) > \operatorname{ess\,sup}(f)\}$$
ist eine μ-Nullmenge, d.h. es gilt
$$f \leq \operatorname{ess\,sup}(f) \text{ f.ü.}$$
denn
$$A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \operatorname{ess\,sup}(f) + \frac{1}{n}\}$$
$\Rightarrow \quad A_n$ Nullmenge $\quad \Rightarrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Nullmenge.

(4.2.7) **Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Die L^∞-*Norm* von f ist definiert durch

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}|f|$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_\infty < \infty\}$$
$$L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim$$

Für $p \neq \infty$ siehe (4.1.2).

(4.2.8) **Bemerkung:** $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum.

(4.2.9) **Lemma:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu) \quad \Rightarrow \quad fg \in L^1(\mu)$.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Beweis: Falls $1 < p, q < \infty$ gilt, wende die Hölderungleichung an, für $|f|$, $|g|$ (4.1.3).
Falls $p = 1$, $q = \infty$, so gilt

$$|fg| = |f| \cdot |g| \leq |f| \cdot \operatorname{ess\,sup}|g| = |f| \cdot \|g\|_\infty \text{ f.ü.}$$

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

□

(4.2.10) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Massraum, $1 \leq p \leq \infty$.

$$\Rightarrow (L^p(\mu), \|\cdot\|_p) \text{ ist ein Banachraum.}$$

Beweis:

Vollständigkeit für $\mathbf{p} = \infty$ Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mu)$.

$$A_{m,n} := \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

$\Rightarrow \quad X \setminus A_{m,n}$ ist eine Nullmenge.

$$A := \bigcap_{m,n} A_{m,n}$$

$\Rightarrow \quad X \setminus A$ ist eine Nullmenge und $(f_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für jedes $x \in A$.

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\le \sup_{m \ge n} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\le \sup_{m \ge n} \|f_n - f_m\|_\infty \to 0 \\ \Rightarrow \operatorname{ess\,sup} |f_n - f| &\le \sup_{m \ge n} \|f_n - f_m\|_\infty \to 0 \\ &\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

Vollständigkeit von $\mathbf{L^p}(\mu)$ für $\mathbf{1} \le \mathbf{p} < \infty$ Sei $f_n \in L^p(\mu)$ eine Cauchyfolge. Wähle eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sodass

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \le \frac{1}{2^i} \quad \forall i$$

Definiere

$$g_k := \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| : X \to [0, \infty)$$

$$g := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| : X \to [0, \infty]$$

Dann ist $g_1^p \le g_2^p \le g_3^p \le \ldots \le g^p$.

$$g_k^p \to g^p$$

$$\|g_k\|_p \le \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \le \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i \le 1$$

Woraus mit (1.5.5) (monotone Konvergenz) folgt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X g^p \, \mathrm{d}\mu$$

$$\Rightarrow \quad \|g\|_p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p \le 1$$

Mit (1.7.9) folgt $g < \infty$ f.ü., d.h. $\exists E \subset X$ Nullmenge sodass $g(x) < \infty$ $\forall x \in X \setminus E$.
Also konvergiert die Reihe

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \big(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\big) =: f(x)$$

für jedes $x \in X \setminus E$.
Definiere $f(x) := 0$ für jedes $x \in E$. Dann ist f $\mathcal{A}$-messbar.

Behauptung: $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$, und insbesondere gilt $f \in L^p(\mu)$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\big(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\big) \to f(x) \quad x \notin E$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)|^p &= \lim_{k\to\infty}|f_n(x) - f_{n_k}(x)|^p \quad x \notin E \\
&= \liminf_{k\to\infty}|f_n(x) - f_{n_k}(x)|^p \\
\overset{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_{k\to\infty}\underbrace{\int_X |f_n - f_{n_k}|^p \,\mathrm{d}\mu}_{\leq \varepsilon^p} \\
&\leq \varepsilon^p \quad \forall n \geq n_0 \\
\Rightarrow \|f_n - f\|_p &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0
\end{aligned}$$

□

4.3 Dichte Unterräume

(4.3.1) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p \leq \infty$. Seien $f_n, f \in L^p(\mu)$ und $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$. Dann existiert eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sodass

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

fast überall.

Beweis: Wähle n_i wie im Beweis von (4.2.10). □

(4.3.2) **Definition:** Sei Y ein topologischer Raum. $S \subset Y$ heiße *dicht* falls $\overline{S} = Y$.

(4.3.3) **Bemerkung:** Sei (Y, d) ein metrischer Raum. S ist genau dann dicht in Y wenn $\forall y \in Y \forall \varepsilon > 0 \exists s \in S$ sodass $d(y, s) < \varepsilon$.

(4.3.4) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$.

$\mathcal{S} := \{s : X \to \mathbb{R} \mid s$ ist eine messbare Treppenfunktion und $\mu(\{x \in X \mid s(x) \neq 0\}) < \infty\}$

Dann ist $\mathcal{S}$ dicht in $L^p(\mu)$.

Beweis:

1. $\mathcal{S} \subset L^p(\mu)$
   Sei $s = \sum_{i=1}^m c_i\chi_{A_i}$ Sei $A_i \in \mathcal{A}$ sodass $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ und $c_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

   $$\int_X |s|^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^m |c_i|^p\mu(A_i) < \infty$$

   Sei

   $$\Xi := \text{Abschluss von } \mathcal{S} \text{ in } L^p(\mu)$$

   Ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\mu)$.

2. $f \in L^p(\mu), f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \Xi$

   Nach (1.4.2) existiert eine Folge $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ messbarer Treppenfunktionen sodass $s_i(x) \to f(x)\ \forall x \in X$. Also ist $s_i \in \mathcal{S}$ da $\|s_i\|_p \leq \|f\|_p < \infty$.

   $|f - s_i|^p \leq f^p$

   $|f(x) - s_i(x)|^p \to 0\ \forall x \in X$

   Daraus folgt mit (1.6.6)

$$\lim_{i \to \infty} \int_X |f - s_i|^p \, \mathrm{d}\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \|f - s_i\|_p = 0 \quad \Rightarrow \quad f \in \Xi$$

3. $f \in L^p(\mu)$

   Daraus folgt mit 2., dass $f^+, f^- \in \Xi \quad \Rightarrow \quad f = f^+ - f^- \in \Xi$ da Ξ ein linearer Unterraum von $L^p(\mu)$ ist.

□

(4.3.5) **Satz:** Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mu : X \to [0, \infty]$ ein Radonmaß. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(\mu)$.

Beweis: Sei Ξ der Abschluss von $C_c(X)$ in $L^p(\mu)$.

$$\Xi = \{f \in L^p(\mu) \mid \exists \varphi_n \in C_c(x) \text{ sodass } \lim_{n \to \infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0\}$$

1. Ξ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L^p(\mu)$.

2. Sei $B \in \mathcal{B}$ eine Borelmenge. Dann $\mu(B) < \infty \quad \Rightarrow \quad \chi_b \in \Xi$.

   Sei $\varepsilon > 0$, dann folgt aus (3.1.6) die Existenz eines $K \subset B \subset U$, sodass K kompakt und U offen ist und $\mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$.

   Mit Urysohn $\exists \varphi \in C_c(x)$ sodass $K \subset \operatorname{supp}\varphi \subset U$ und $\varphi(x) = 1\ \forall x \in K$ und $0 \leq \varphi \leq 1$.

$$\Rightarrow \quad |\chi_b - \varphi|^p \leq |\chi_{U \setminus K}|^p$$

$$\Rightarrow \quad \|\chi_B - \varphi\|_p \leq \|\chi_{U \setminus K}\|_p = \mu(U \setminus K)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

3. $\mathcal{S} \subset \Xi$.

   Weil jedes $\mathcal{S} \ni s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{B_i}$ und $\mu(B_i) < \infty$.

4. $\Xi = L^p(\mu)$

   da $\mathcal{S}$ dicht in $L^p(\mu)$ ist, nach Satz (4.3.4).

□

5 Dualräume und der Satz von Radon-Nikodym

5.1 Hilbertraumtheorie

Sei H ein Vektorraum.

1. Ein *inneres Produkt* ist eine bilineare, symmetrische, positiv definite Abbildung
$$H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

2. Ein inneres Produkt bestimmt eine Norm $H \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ durch
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

3. Eigenschaften des inneren Produkts aus Analysis I, Kapitel 3:

   (a)
$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$
   Beweis durch $\|x\| = \|y\| = 1$ und
$$0 \leq \|y - \langle x, y \rangle x\|^2 = 1 - \langle x, y \rangle^2$$

   (b)
$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\leq \|x\| \|y\|} + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

4. Ein *Hilbertraum* ist ein Vektorraum H mit einem inneren Produkt, dessen zugehöriger normierter Vektorraum vollständig ist.

(5.1.1) **Beispiel:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $H := L^2(\mu)$.
$$\langle f, g \rangle := \int_X f g \, \mathrm{d}\mu$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_X f^2 \, \mathrm{d}\mu}$$
Vollständigkeit wurde in (4.2.10) bewiesen.

5. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein beliebiger normierter Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\Lambda : V \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, sodass
$$|\Lambda x| \leq c\|x\| \ \forall x \in V$$
Die kleinste solche Konstante c ist die *Norm* von Λ:
$$\|\Lambda\| := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{|\Lambda x|}{\|x\|}$$

6. Der *Dualraum* von V ist der Raum der beschränkten linearen Funktionale $\Lambda : V \to \mathbb{R}$ und wird mit V^* bezeichnet. V^* ist ein normierter Vektorraum. V^* ist vollständig (Analysis II).

7. Eine lineare Abbildung $\Lambda : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt wenn sie stetig ist (Analysis II).

(5.1.2) **Beispiel:** $V = H$ für einen Hilbertraum. Sei $y \in H$. Definiere $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda x := \langle y, x \rangle$$

Cauchy-Schwarz:

$$|\Lambda x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

Es gilt $\|\Lambda\| = \|y\|$.

(5.1.3) **Satz:** Sei H ein Hilbertraum, dann ist $H^* \cong H$, d.h. für jedes beschränkte, lineare Funktional $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in H$ sodass

$$\Lambda x = \langle y, x \rangle \ \forall x \in H$$

(5.1.4) **Satz:** Sei H ein Hilbertraum und $E \subset H$ abgeschlossen, konvex und nicht leer. Dann existiert genau ein $x_0 \in E$ sodass

$$\|x_0\| \leq \|x\| \ \forall x \in E$$

(5.1.5) **Beweis von (5.1.4) $\Rightarrow$ (5.1.3)**

1. Fall: $\Lambda = 0$: Wähle $y = 0$.

2. Fall: $\Lambda \neq 0$.

$$E := \{x \in H \mid \Lambda x = 1\}$$

Dann ist E abgeschlossen, da Λ stetig ist. E ist konvex, da Λ linear ist und $E \neq \emptyset$ da $\Lambda \neq 0$:

$$\exists \xi \in H \text{ mit } \Lambda\xi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x := \frac{\xi}{\Lambda\xi} \in E$$

Also gibt es mit (5.1.4) genau ein $x_0 \in E$ mit

$$\|x_0\| \leq \|x\| \ \forall x \in E$$

und es gilt $x_0 \neq 0$ da $\Lambda x_0 = 1$.

Behauptung: $\Lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \perp x$

$$\Lambda(x_0 + tx) = \Lambda x_0 = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 + tx \in E \ \forall t$$

$$\Rightarrow \quad \|x_0\|^2 \leq \|x_0 + tx\|^2 \ \forall t$$

$$\|x_0 + tx\|^2 = \|x_0\|^2 + 2t\langle x_0, x\rangle + t^2\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \|x_0 + tx\|^2 = 2\langle x_0, x\rangle$$

□

Sei $x \in H$ und $\lambda := \Lambda x$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \Lambda(x - \lambda x_0) &= \Lambda x - \lambda = 0 \\
\overset{\text{Beh.}}{\Rightarrow} \langle x_0, x - \lambda x_0 \rangle &= 0 \\
&= \langle x_0, x\rangle - \lambda \|x_0\|^2 \\
\Rightarrow \left\langle \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, x \right\rangle &= \Lambda x
\end{aligned}$$

Beweis der Eindeutigkeit:

$$\Lambda x = \langle y, x\rangle = \langle z, x\rangle \ \forall x$$

$$\Rightarrow \langle y - z, x\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \langle y - z, y - z\rangle = \|y - z\|^2$$

$\Rightarrow \quad y = z.$ □

(5.1.6) **Beweis von (5.1.4)** Wir verwenden die *Parallelogrammidentität*:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Sei

$$\delta := \inf\{\|x\| \mid x \in E\} \geq 0$$

Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} \|x_0\| = \|x_1\| = \delta \quad x_0, x_1 \in E \\ \Rightarrow \frac{x_0 + x_1}{2} \in E \\ \Rightarrow \left\|\frac{x_0 + x_1}{2}\right\| \geq \delta \\ \Rightarrow \|x_0 + x_1\| \geq 2\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_0 - x_1\|^2 &= 2\|x_0\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|x_0 + x_1\|^2 \\ &= 4\delta^2 - \|x_0 + x_1\|^2 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x_0 = x_1 \end{aligned}$$

Existenz Wähle eine Folge $x_i \in E$ sodass $\|x_i\| \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \delta$.
Behauptung: x_i ist eine Cauchyfolge. Dann konvergiert x_i, da H ein Hilbertraum ist, also $x_0 := \lim_{i\to\infty} x_i \in E$ (da E abgeschlossen ist) und $\|x_0\| = \delta$.
Gegeben sei $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq i_0 : \|x_i\|^2 \leq \delta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$\Rightarrow \forall i, j \geq i_0$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\|^2 &= 2\|x_i\|^2 + 2\|x_j\|^2 - \|x_i + x_j\|^2 \\ &\leq 4\delta^2 + \varepsilon^2 - \underbrace{\|x_i + x_j\|^2}_{\geq 4\delta^2} \\ &\leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \|x_i - x_j\| \leq \varepsilon \ \forall i, j \geq i_0$$

□

(5.1.7) **Korollar:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Lambda : L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann existiert genau ein $g \in L^2(\mu)$ sodass

$$\Lambda f = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^2(\mu)$$

und $\|\Lambda\| = \|g\|_2$, d.h.

$$L^2(\mu)^* \cong L^2(\mu)$$

Beweis: (5.1.3) und (4.2.10). □

(5.1.8) **Ziel** des Kapitels ist es, zu zeigen dass

$$L^p(\mu)^* \cong L^q(\mu)$$

wofern $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $1 \leq p < \infty$.

5.2 Der Satz von Radon-Nikodym

(5.2.1) **Erinnerung an (1.5.9):** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ messbar. Definiere $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\lambda(E) := \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

- λ ist ein Maß.
- $\int_X f \, \mathrm{d}\lambda = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu \; \forall f$

(5.2.2) **Bemerkung:** $\forall E \in \mathcal{A}$ folgt

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0$$

(5.2.3) **Definition:** Seien $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ Maße.

i) λ heißt *absolut stetig* bezüglich μ wenn $\forall E \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0$$

Notation: $\lambda \ll \mu$.

ii) λ, μ heißen *zueinander* singulär wenn es eine Menge $A \in \mathcal{A}$ gibt sodass

$$\lambda(A) = 0 \qquad \mu(X \setminus A) = 0$$

Notation: $\lambda \perp \mu$.

(5.2.4) **Lemma:** Sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ Maße.

i) $\lambda_1 \perp \mu$, $\lambda_2 \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

ii) $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \ll \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

iii) $\lambda_1 \ll \mu, \lambda_2 \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \perp \lambda_2$.

iv) $\lambda \ll \mu, \lambda \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$.

Beweis:

i) $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sodass $\lambda_1(A_1) = 0$, $\lambda_2(A_2) = 0$, $\mu(X \setminus A_1) = \mu(X \setminus A_2) = 0$.
$A := A_1 \cap A_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0, \quad X \setminus A = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \\ (\lambda_1 + \lambda_2)(A) = 0, \quad \mu(X \setminus A) = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu \end{aligned}$$

ii) $\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(E) = \lambda_2(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 + \lambda_2)(E) = 0$.

iii) $\lambda_2 \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \exists A \in \mathcal{A}$ sodass

$$\lambda_2(A) = 0, \quad \mu(X \setminus A) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1(X \setminus A) = 0$$

iv) Nach iii) mit $\lambda_1 = \lambda_2$ gilt $\lambda \perp \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda(X) = 0$.

□

(5.2.5) **Definition:** Sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra. Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-*endlich* wenn es eine Teilmenge $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots \subset X$ gibt sodass

$$X_i \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_i) < \infty, \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

(5.2.6) **Satz:** (Lebesgue) Seien $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-endlich. Dann $\exists! \lambda_a, \lambda_s : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ sodass

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu$$

(5.2.7) **Der Satz von Radon-Nikodym** Seien $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-endliche Maße sodass $\lambda \ll \mu$. Dann

i) gibt es eine messbare Abbildung $g : X \to [0, \infty)$ sodass

(*)
$$\lambda(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

ii) g ist μ-fast überall eindeutig durch λ bestimmt.

iii)
$$\lambda(X) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad g \in L^1(\mu)$$

(5.2.8) **Bemerkung:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und μ σ-endlich und $g : X \to [0, \infty)$ messbar. Sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch (*) gegeben. Dann ist λ σ-endlich; sei

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X, \quad X_n \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_n) < \infty, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

$$\begin{aligned} A_n &:= \{x \in X_n \mid g(x) \le n\} \\ &\Rightarrow \quad \lambda(A_n) < \infty \end{aligned}$$

(5.2.9) **Beweis von (5.2.7) $\Rightarrow$ (5.2.6)** Seien $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\lambda, \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-endliche Maße. Dann $\exists! \lambda_a, \lambda_s : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ sodass $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ und $\lambda_a \ll \lambda$, $\lambda_s \perp \mu$.

Eindeutigkeit Sei $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$ sodass $\lambda_a, \lambda'_a \ll \mu$ und $\lambda_s, \lambda'_s \perp \mu$. Also $\exists A, A' \in \mathcal{A}$ sodass $\lambda_s(A) = 0$, $\mu(X \setminus A) = 0$, $\lambda'_s(A) = 0$, $\mu(X \setminus A') = 0$. Zu zeigen: Sei $E \in \mathcal{A}$, dann ist $\lambda_a(E) = \lambda'_a(E)$ und $\lambda_s(E) = \lambda'_s(E)$.

1. Fall: $E \subset X \setminus (A \cap A') = (X \setminus A) \cup (X \setminus A')$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mu(E) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_a(E) = \lambda'_a(E) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_s(E) = \lambda'_s(E) = \lambda(E) \end{aligned}$$

2. Fall: $E \subset A \cap A'$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \lambda_s(E) = \lambda'_s(E) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_a(E) = \lambda'_a(E) = \lambda(E) \end{aligned}$$

3. Fall: $E \in \mathcal{A}$.

$$\lambda'_a(E) = \lambda'_a(E \setminus (A \cap A')) + \lambda'_a(E \cap A \cap A')$$

$= \lambda_a(E)$ nach dem 1. und 2. Fall.

Existenz Definiere $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\nu(E) := \mu(E) + \lambda(E)$$

- ν ist ein Maß.
- ν ist σ-endlich. $\exists A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$ und $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset X$ und $\lambda(A_n) < \infty, \mu(B_n) < \infty$ sodass $X = \bigcup A_n = \bigcup B_n$. Sei $X_n := A_n \cap B_n$, dann gilt $\lambda(X_n), \mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.
- $\lambda \ll \nu$ und $\mu \ll \nu$.

Aus diesen drei Eigenschaften folgt mit (5.2.7) $\exists f, g : X \to [0, \infty)$ messbar sodass

$$\lambda(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\nu, \quad \mu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\nu \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Definiere:

$$A := \{x \in X \mid g(x) > 0\}$$

Definiere $\lambda_s(E) := \lambda(E \cap A^{\mathrm{c}})$ und $\lambda_a(E) := \lambda(E \cap A)$.

1. $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ – Klar.
2. $\lambda_s \perp \mu$
$$\mu(A^{\mathrm{c}}) = \int_{A^{\mathrm{c}}} g \,\mathrm{d}\nu = 0$$
$$\lambda_s(A) = \lambda(A \cap A^{\mathrm{c}}) = \lambda(\emptyset) = 0$$
3. $\lambda_a \ll \mu$.
Sei $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$. Dann ist
$$0 = \int_E g \,\mathrm{d}\nu = \int_X \underbrace{\chi_E g}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\nu$$
Nach (1.7.9) ist $\chi_E g = 0$ ν-fast überall $\Rightarrow$ $\chi_A \chi_E g = \chi_{A \cap E} g = 0$ ν-fast überall.
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \chi_{A \cap E} = 0 \ \nu\text{-fast überall} \\ &\Rightarrow \quad \nu(A \cap E) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda(A \cap E) = 0 = \lambda_a(E) \end{aligned}$$

□

(5.2.10) **Beweis von (5.2.7)** $\lambda \ll \mu \quad \Rightarrow$

i) $\exists g : X \to [0, \infty)$ sodass $\lambda(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$

ii) g fast überall eindeutig.

iii) $\lambda(X) < \infty \Leftrightarrow g \in L^1(\mu)$.

(iii) ist klar.

(ii) – Eindeutigkeit $f, g : X \to [0, \infty)$

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu \;\forall E \in \mathcal{A}$$

$(X, \mathcal{A}, \lambda)$ ist σ-endlich. Dann gibt es eine Folge $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$ sodass $X_n \in \mathcal{A}, \lambda(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$.

$$\mathcal{A}_n := \{E \in \mathcal{A} \mid E \subset X_n\}$$

und $\mu_n := \mu|_{\mathcal{A}_n}$ und $\lambda_n := \lambda|_{\mathcal{A}_n}$. Daraus folgt mit (iii)

$$f_n := f|_{X_n}, g_n := g|_{X_n} \in L^1(\mu_n)$$

$$\int_E (f_n - g_n) \,\mathrm{d}\mu = \lambda(E) - \lambda(E) = 0 \forall E \in \mathcal{A}_n$$

Mit (1.7.9) $f_n - g_n = 0$ μ_n-fast überall. $\exists \mu$-Nullenge $A_n \subset X_n$

$$f(x) = g(x) \;\forall x \in X_n \setminus A_n$$

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$\Rightarrow \quad \mu(A) = 0$ $f(x) = g(x) \forall x \in X \setminus A \quad \Rightarrow \quad f = g$ fast überall.

(i) – Existenz einer solchen messbaren Funktion $g : X \to [0, \infty)$ sodass

$$\lambda(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$$

1. Fall: $\lambda(X) < \infty, \mu(X) < \infty$.
   Dann ist $\lambda + \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein endliches Maß. Sei

   $$H := L^2(\lambda + \mu) \subset L^1(\lambda + \mu)$$

   Sei $f : X \to \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} \int_X |f| \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) &= \int_X |f| \cdot 1 \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) \\ &\leq \sqrt{\int_X |f|^2 \,\mathrm{d}(\lambda + \mu)} \sqrt{\int_X 1 \,\mathrm{d}(\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

   und

   $$\int_X 1 \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) = \lambda(X) + \mu(X) < \infty$$

   Sei $c := \sqrt{\lambda(x) + \mu(X)}$.

   $$\|f\|_1 \leq c \|f\|_2 < \infty$$

   $\Rightarrow \quad$ für alle $f \in L^2(\lambda + \mu)$ gilt $f \in L^1(\lambda + \mu)$ und

   $$\begin{aligned} \left| \int_X f \,\mathrm{d}\lambda \right| &\leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\lambda \\ &\leq \int_X |f| \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) \\ &\leq c \|f\|_{L^2(\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

Also ist das lineare Funktional

$$\Lambda : L^2(\lambda+\mu) \to \mathbb{R} \qquad \Lambda f := \int_X f \,\mathrm{d}\lambda$$

beschränkt.

$$\begin{aligned} & \Lambda \in H^* \\ \overset{(5.1.3)}{\Rightarrow} \quad & \exists! g \in L^2(\lambda+\mu) \end{aligned}$$

sodass

(*)
$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \Lambda f = \int_X fg \,\mathrm{d}(\lambda+\mu) \quad \forall f \in L^2(\lambda+\mu)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_X f(1-g)\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) &= \int_X f\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) - \int_X fg\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) \\ &\overset{(*)}{=} \int_X f\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) - \int_X f\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_X f\,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

(**)
$$\int_X f(1-g)\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

Behauptung: $0 \le g < 1$ **$(\lambda+\mu)$-fast überall. Dann $\exists N \subset X$ sodass $\lambda(N) = \mu(N) = 0$ und $0 \le g(x) < 1$ $\forall x \in X \setminus N$.** Sei

$$E := \{x \in X \mid g(x) \ge 1\}$$

und

$$f := \chi_E \in L^2(\lambda+\mu)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mu(E) &= \int_X \chi_E \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{(**)}{=} \int_X \underbrace{\chi_E(1-g)}_{\le 0}\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) \\ &\le 0 \end{aligned}$$

Also $\mu(E) = 0$ und $\lambda(E) = 0$ da $\lambda \ll \mu$. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_A g\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) &= \int_X \chi_A g\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) \\ &\overset{(*)}{=} \int_X \chi_A \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lambda(A) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

Sei

$$F := \{x \in X \mid g(x) < 0\}$$

$$0 \le \int_F g\,\mathrm{d}(\lambda+\mu) \le 0$$

$$\Rightarrow \lambda(F) + \mu(F) = 0$$

Sei $N := E \cap F \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.
Annahme: (o.B.d.A.): $0 \leq g(x) < 1 \ \forall x \in X$.
Definiere $h : X \to [0, \infty)$ durch

$$h(x) := \frac{g(x)}{1 - g(x)} \geq 0$$

Dann ist h $\mathcal{A}$-messbar.

$$\begin{aligned}
\int_E h \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \chi_E h \,\mathrm{d}\mu \\
&\overset{(**)}{=} \int_X \chi_E \underbrace{h(1-g)}_{g} \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) \\
&= \int_X \chi_E g \,\mathrm{d}(\lambda + \mu) \\
&= \int_X \chi_E \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \lambda(E)
\end{aligned}$$

2. Fall: $\lambda(X) = \infty, \mu(X) = \infty$.[4]

$$\Rightarrow \quad \exists A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$$
$$\exists B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset X$$

sodass

$$X = \bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n \qquad A_n, B_n \in \mathcal{A} \qquad \lambda(A_n), \mu(B_n) < \infty$$

Also

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n := A_n \cap B_n, \quad \lambda(X_n), \mu(X_n) < \infty$$

Aus dem 1. Fall folgt, dass $\exists h_n : X_n \to [0, \infty)$ messbar sodass

$$\lambda(E) = \int_E h_n \,\mathrm{d}\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}, E \subset X_n$$

woraus mit (ii) folgt, dass

$$h_{n+1}|_{X_n} = h_n \ \mu\text{-fast überall auf } X_n$$

Definiere $h : X \to [0, \infty)$ durch

$$h(x) := h_n(a) \text{ für } x \in X_n \setminus X_{n-1}$$

$$h|_{X_n} = h_n \mu - \text{f.ü.}$$

(a) h ist messbar.

$$h^{-1}([0, c]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{((X_n \setminus X_{n-1}) \cap h_n^{-1}([0, c]))}_{\text{messbar}} \forall c \geq 0$$

[4]Die weiteren Fälle ($\lambda(X) < \infty, \mu(X) = \infty$ usw.) funktionieren gleich.

(b) $E \in \mathcal{A}$
Sei $E_n := E \cap (X_n \setminus X_{n-1}) \subset X_n \setminus X_{n-1}$. Dann gilt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \lambda(E_n) = \int_{E_n} h_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} h \, \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{E_n} h \, \mathrm{d}\mu$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lambda(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X \chi_{E_k} h \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} \right) \mathrm{d}h\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \underbrace{\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} E_k}}_{\to \chi_E} h \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{(1.5.5)}{=} \int_X \chi_E h \, \mathrm{d}\mu \text{ mit monotoner Konvergenz} \\
&= \int_E h \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

5.3 Reelle Maße

(5.3.1) **Definition:** Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra. Eine Abbildung $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *reelles Maß* bzw. *Ladung* wenn λ σ-additiv ist, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} E \in \mathcal{A}, E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \\ E_i \in \mathcal{A}, i = 1,2,3,\ldots \\ E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda(E_i)$$

(5.3.2) **Bemerkung:** Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ konvergiert *absolut*, d.h.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| < \infty$$

(5.3.3) **Bemerkung:** $\lambda(\emptyset) = 0$. Denn wähle $E_i = \emptyset$ für alle $i = 1,2,3,\ldots$.

(5.3.4) **Frage:** Gibt es ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, sodass gilt

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \forall E \in \mathcal{A}$$

Wenn ja, dann gilt:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{A} \text{ paarweise disjunkt} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \leq \mu(E)$$

(5.3.5) **Definition:** Sei $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß. Definiere $|\lambda| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ durch

$$|\lambda|(E) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \;\middle|\; E_i \in \mathcal{A}, E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j, E = \bigcup_i E_i \right\}$$

(5.3.6) **Satz:** $|\lambda|$ ist ein Maß und $|\lambda|(X) < \infty$.

Beweis:

1. $|\lambda|$ ist ein Maß.
   $E \subset F \quad \Rightarrow \quad |\lambda|(E) \leq |\lambda|(F)$ und $|\lambda|(\emptyset) = 0$ folgt beides sofort aus der Definition.
   σ-Additivität von $|\lambda|$ Sei $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{A}$ und $E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j$. Wir zeigen:

   (a) $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) \leq |\lambda|(E)$

   (b) $|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$

   Zu (a): Sei $t_i < |\lambda|(E_i)$. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung

   $$E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}, A_{ij} \in \mathcal{A}$$

   sodass

   $$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > t_i$$

   $$\Rightarrow \quad E = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{ij} \quad A_{ij} \cap A_{i'j'} = \emptyset \text{ für } (i,j) \neq (i',j')$$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\lambda|(E) &\geq \sum_{i,j}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})|}^{>t_i} \\ &> \sum_{i=1}^{\infty} t_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \varepsilon \end{aligned}$$

   Zu (b):
   Seien $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt.

   $$\Rightarrow E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_i \cap A_j), A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \cap A_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| &= \sum_j \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i \cap A_j) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i \cap A_j)| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(E_i \cap A_j)| \right)}_{\leq |\lambda|(E_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) \\
&\overset{\sup}{\Rightarrow} \text{(b)}
\end{aligned}$$

2. $|\lambda|(\mathbf{X}) < \infty$
Behauptung: $|\lambda|(X) = \infty \quad \Rightarrow \quad \exists A \in \mathcal{A}$ **sodass**

$$|\lambda(A)| > 1, |\lambda|(X \setminus A) = \infty$$

Falls $|\lambda|(X) = \infty$, so gibt es eine Folge $A_n \in \mathcal{A}$ sodass

$$|\lambda(A_n)| > 1, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \; \forall m \neq n \text{ (Induktion)}$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)|$ divergiert. Widerspruch.
Beweis der Behauptung unter der Annahme, dass $|\lambda|(X) = \infty$:
Sei $t := 2(1+|\lambda(X)|)$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, sodass

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

Sei

$$A^+ := \bigcup \{E_i \mid \lambda(E_i) \geq 0\}$$

$$A^- := \bigcup \{E_i \mid \lambda(E_i) < 0\}$$

Es ist $A^+, A^- \in \mathcal{A}$

$$A^+ \cup A^- = X, \quad A^+ \cap A^- = \emptyset$$

$$|\lambda(A^+)| + |\lambda(A^-)| = \sum_{\lambda(E_i)>0} \lambda(E_i) + \sum_{\lambda(E_i)<0} |\lambda(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

Daraus folgt, dass entweder $|\lambda(A^-)| > \frac{t}{2}$ oder $|\lambda(A^+)| > \frac{t}{2}$. Sei o.B.d.A. $|\lambda(A^+)| > \frac{t}{2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |\lambda(A^-)| &= |\lambda(X) - \lambda(A^+)| \\
&\geq |\lambda(A^+)| - |\lambda(X)| \\
&> \frac{t}{2} - |\lambda(X)| \\
&> 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $|\lambda(A^{\pm})| > 1$. Da $|\lambda|(X) = \infty$ gilt entweder $|\lambda|(A^+) = \infty$ oder $|\lambda|(A^-) = \infty$, woraus sofort die Behauptung folgt.

$\square$

(5.3.7) **Bemerkung:** Sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ-Algebra und $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß. In (5.3.5) wurde $|\lambda|(E)$ als

$$|\lambda|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \;\middle|\; E = \bigcup_i E_i, E_i \in \mathcal{A}, \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

definiert. Dann gilt

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$$

und

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$$

wobei

$$\lambda^+ := \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda) \quad \lambda^- := \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

– die sogenannte *Jordanzerlegung*.

$$\lambda^{\pm} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$

sind Maße.

(5.3.8) **Definition:** Seien $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ reelle Maße und

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

ein Maß.

i) λ heißt *auf* $A \in \mathcal{A}$ *konzentriert* wenn

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) \; \forall E \in \mathcal{A}$$

ii) λ_1, λ_2 heißen *zueinander singulär* ($\lambda_1 \perp \lambda_2$) wenn es Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gibt, sodass $X = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und λ_i auf A_i konzentriert ist für $i = 1, 2$.

   λ und μ heißen zueinander singulär, falls es eine Menge A gibt, sodass λ auf A konzentriert ist und $\mu(A) = 0$.

iii) λ heißt *absolut stetig bezüglich* μ ($\lambda \ll \mu$) wenn für alle $E \in \mathcal{A}$ folgendes gilt:

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0$$

(5.3.9) **Lemma:**

i) $\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| \ll \mu$

ii) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$

(5.3.10) **Übung:** Sei $A \in \mathcal{A}$ und $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß. Dann

$$\lambda \text{ ist auf } A \text{ konzentriert} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda(E \setminus A) = 0 \; \forall E \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|(X \setminus A) = 0$$

Beweis von (5.3.9):

ii) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ genau dann wenn es eine messbare Zerlegung $X = A_1 \cup A_2$ gibt, sodass λ_i auf A_i konzentriert ist $\overset{\text{Übung}}{\Leftrightarrow}$

$$\exists A_1, A_2 : |\lambda_1|(X \setminus A_1) = 0, |\lambda_2|(X \setminus A_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$$

i) „$\Leftarrow$“ $\lambda \ll |\lambda| \ll \mu$.
„$\Rightarrow$“

$$\begin{aligned} \mu(E) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu(F) = 0 \ \forall F \in \mathcal{A}, F \subset E \\ &\Rightarrow \quad \lambda(F) = 0 \ \forall F \subset E \\ &\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \quad |\lambda|(E) = 0 \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Übung mit $A = X \setminus E$.

□

(5.3.11) **Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß. Dann gilt:

i) $\exists!$ reelle Maße $\lambda_a, \lambda_s : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sodass

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu$$

ii) $\exists! f \in L^1(\mu)$ sodass $\lambda_a(E) = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu$

$\exists!$ bedeutet hier Eindeutigkeit fast überall.

(5.3.12) **Beweis der Existenz** $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ (5.2.6), (5.2.7) für $\lambda^\pm$.

(5.3.13) **Beweis der Eindeutigkeit**

i) Sei $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$ sodass $\lambda_a, \lambda_a' \ll \mu$ und $\lambda_s, \lambda_s' \perp \mu$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_a - \lambda_a' &\ll \mu \\ \lambda_s' - \lambda_s &\perp \mu \\ \overset{(5.3.9)}{\Rightarrow} |\lambda_a - \lambda_a'| &\ll \mu \\ &\perp \mu \\ \overset{(5.2.4)}{\Rightarrow} (\lambda_a - \lambda_a') &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_a &= \lambda_a' \end{aligned}$$

ii) Folgt aus (1.7.9). Diesen Satz immer anwenden, wenn man im Zweifel ist. Er beantwortet jede zweite Frage.

□

5.4 Der Satz von Hahn

(5.4.1) **Satz:** Ein reelles Maß $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ist absolut stetig bezüglich eines Maßes $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ genau dann wenn gilt:

(*) $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \in \mathcal{A} : \mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda(E)| < \varepsilon$$

Beweis: „$\Leftarrow$“ trivial: $\mu(E) = 0, \varepsilon > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} |\lambda(E)| < \varepsilon$. Daraus folgt $\lambda(E) = 0$.
„$\Rightarrow$“ Annahme: (*) gilt nicht.
Dann $\exists \varepsilon > 0 \forall n = 1, 2, 3, \ldots \exists E_n \in \mathcal{A}$ sodass

$$\mu(E_n) \le \frac{1}{2^n}, \quad |\lambda(E_n)| \ge \varepsilon$$

Sei $A_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann ist $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A$.

$$\mu(A_n) \le \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$|\lambda|(A_n) \ge |\lambda|(E_n) \ge |\lambda(E_n)| \ge \varepsilon$$

Also $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, aber

$$|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \ge \varepsilon$$

Widerspruch. □

(5.4.2) **Satz von Hahn** Sei $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß.

i) $\exists h : X \to \{\pm 1\}$, h messbar, sodass

$$\lambda(E) = \int_E h \, \mathrm{d}|\lambda|$$

ii) $\exists P, N \in \mathcal{A}, P \cup N = X, P \cap N = \emptyset$ sodass

$$\lambda(E \cap P) \ge 0, \quad \lambda(E \cap N) \le 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

(5.4.3) **Korollar:**

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N))$$

$\lambda^+ \perp \lambda^-$ ist die (eindeutige) Jordanzerlegung.

Beweis des Satzes von Hahn: Sei $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß und

$$\mu := |\lambda| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$

Dann gilt mit (5.3.11), dass $\exists h \in L^1(\mu)$ sodass

$$\lambda(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu$$

$$\begin{aligned}
A_r &:= \{x \in X \mid |h(x)| \le r\} \\
&= \bigcup_i E_i \text{ disjunkte Zerlegung } E_i \in \mathcal{A} \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| &= \sum_i \left| \int_{E_i} h \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&\le \sum_i \int_{E_i} |h| \, \mathrm{d}\mu \\
&\le r \sum_i \mu(E_i) = r\mu(A_r) \\
\Rightarrow \mu(A_r) &= 0 \text{ falls } r < 1 \\
\Rightarrow |h| &\ge 1 \text{ f.ü.}
\end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $|h(x)| \geq 1 \; \forall x \in X$. Sei

$$P := \{x \in X \mid h(x) \geq 1\}$$

$$N := \{x \in X \mid h(x) \leq -1\}$$

$$\Rightarrow \quad X = P \cup N, \quad P \cap N = \emptyset$$

Außerdem gilt

$$\mu(P) \leq \int\limits_P h \,\mathrm{d}\mu = \lambda(P) \leq \mu(P)$$

$$\mu(N) \leq -\int\limits_N h \,\mathrm{d}\mu = -\lambda(N) \leq \mu(N)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(P) = \int\limits_P h \,\mathrm{d}\mu, \quad \lambda(N) = -\int\limits_N h \,\mathrm{d}\mu$$

$$\Rightarrow \int\limits_P (h-1) \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 1 \text{ f.ü. in } D$$

O.B.d.A. ist $h(x) = 1 \forall x \in P$, genauso $h(x) = -1 \forall x \in N$. □

5.5 Dualräume

(5.5.1) **Satz:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$L^p(\mu)^* \cong L^q(\mu)$$

Das heißt, dass für jedes beschränktes lineares Funktional $\Lambda : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$

$$\exists! g \in L^q(\mu) : \Lambda f = \int\limits_X f g \,\mathrm{d}\mu$$

Außerdem $\|\Lambda\| = \|g\|_q$.

Beweis: Sei $g \in L^q(\mu)$ gegeben. Definiere $\Lambda : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ durch

$$\Lambda f := \int\limits_X f g \,\mathrm{d}\mu$$

Dies ist möglich, da fg nach der Hölderungleichung L^1 ist.

1. Λ ist linear.
2. Λ ist beschränkt und $\|\Lambda\| = \|g\|_q$.
   „$\leq$ “ Nach Hölder gilt:

$$|\Lambda f| \leq \int\limits_X |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow \quad \|\Lambda\| = \sup_{\substack{f \in L^p(\mu) \\ f \neq 0}} \frac{|\Lambda f|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q$$

3. $p > 1 \quad \Rightarrow \quad \|\Lambda\| = \|g\|_q$
   $f := |g|^{q-1} \operatorname{sgn} g$ wobei

$$\operatorname{sgn} g(x) := \begin{cases} 1, & g(x) > 0 \\ 0, & g(x) = 0 \\ -1, & g(x) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad g \operatorname{sgn} g = |g| \quad \Rightarrow \quad fg = |g|^q = |f|^p$ da $|f| = |g|^{q-1}$.

$$pq - p = q$$

$$\Lambda f = \int fg = \|g\|_q^q$$

$$\|f\|_p = \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_q^{q-1}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$$

$$\frac{\Lambda f}{\|f\|_p} = \|g\|_q$$

4. $\mathbf{p = 1} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\Lambda}\| = \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{q}}$. Da X σ-endlich ist, gilt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_n) < \infty$$

$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots \subset X$$

$$c := \|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |g|$$

   (a) Fall: $c = 0$

$$\Rightarrow \quad g(x) = 0 \text{ f.ü.}$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda f = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu = 0 \;\forall f \in L^1(\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \|\Lambda\| = 0 = \|q\|_\infty$$

   (b) Fall: $c > 0$
   Wähle $\varepsilon > 0$.

$$A := \{x \in X \mid |g(x)| > c - \varepsilon\}$$

   A ist nach der Definition von ess sup keine Nullmenge, $\mu(A) > 0$. Sei $A_n := A \cap X_n$.

$$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A$$

   Daraus folgt mit einem Satz auf Kapitel I, dass

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \infty > \mu(A_n) > 0$$

   Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn} g(x), & x \in A_n \\ 0, & x \notin A_n \end{cases}$$

   Dann ist

$$fg = |g|\chi_{A_n} \in L^1(\mu)$$

   und

$$\Lambda f = \int_{A_n} |g| \,\mathrm{d}\mu \geq (c - \varepsilon)\mu(A_n)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{A_n} 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(A_n) \\ \Rightarrow \quad \frac{|\Lambda f|}{\|f\|_1} &\geq c - \varepsilon = \|g\|_\infty - \varepsilon \\ \Rightarrow \quad \|\Lambda\| &= \sup_{\substack{f \in L^1(\mu) \\ f \neq 0}} \frac{|\Lambda f|}{\|f\|_1} \geq \|g\|_\infty \end{aligned}$$

woraus die Gleichheit folgt.

5. Eindeutigkeit:
   Seien $g, h \in L^q(\mu)$ mit

$$\Lambda f := \int_X fg \,\mathrm{d}\mu = \int_X fh \,\mathrm{d}\mu \;\forall f \in L^p$$

$$\Rightarrow \quad \int_X f(g-h) \,\mathrm{d}\mu = 0 \;\forall f \in L^p$$

$$\Rightarrow \quad \|g-h\|_q = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = h(x) \text{ fast überall}$$

   Sehen wir g und h als Elemente von $L^q(\mu)$, dem Raum von Äquivalenzklassen, so gilt $g = h$.

Bisher haben wir, bis auf die Hölderungleichung, ohne jede Technologie gearbeitet. Das ändert sich beim Beweis der

Existenz Sei Λ gegeben, wie finden wir g? Die Idee ist, $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ durch

$$\lambda(E) := \Lambda(\chi_E)$$

zu definieren.
Sei also $\Lambda : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ linear, beschränkt und gegeben.

1. Fall: $1 < p < \infty, \mu(X) < \infty$.
   Definiere $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ durch

$$\lambda(E) := \Lambda(\chi_E), \quad E \in \mathcal{A}$$

   Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \lambda(E) &\leq \|\Lambda\| \cdot \|\chi_E\|_p \\ &= \|\Lambda\| \cdot \mu(E)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

   λ ist σ-additiv Sei $E = \bigcup_{i=1}^\infty$, disjunkte Vereinigung, $E_i \in \mathcal{A}$.

$$A_m := \bigcup_{i=1}^m E_i \qquad B_m := \bigcup_{i=m+1}^\infty E_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda(E) &= \Lambda(\chi_E) \\ &= \Lambda(\chi_{A_m} + \chi_{B_m}) \\ &= \Lambda\left(\sum_{i=1}^m \chi_{E_i} + \chi_{B_m}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \Lambda(\chi_{E_i}) + \Lambda(\chi_{B_m}) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda(E_i) + \underbrace{\lambda(B_m)}_{\to 0} \end{aligned}$$

Sei

$$c := \|\Lambda\| \quad \lambda(B_m) \leq c\mu(B_m)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

$$\mu(B_m) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \mu(E_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

Also ist $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein reelles Maß und

$$|\lambda(E)| \leq c\mu(E)^{\frac{1}{p}}$$

Also $\lambda \ll \mu$. Mit (5.3.11) gilt $\exists g \in L^1(\mu)$ mit

$$\lambda(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu \ \forall E \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow$ für jede messbare Treppenfunktion $s : X \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_X sg \,\mathrm{d}\mu = \Lambda s$$

da $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$ mit $a_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathcal{A}$ und damit

$$\begin{aligned} \Lambda s &= \sum_{i=1}^{m} a_i \Lambda(\chi_{E_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \int_{E_i} g \,\mathrm{d}\mu = \int_X sg \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Behauptung: $\mathbf{g} \in \mathbf{L^q}(\mu)$

Wenn dies gezeigt ist, so gibt es für jedes $f \in L^p(\mu)$ eine Folge messbarer Treppenfunktionen s_n, sodass $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \Lambda f &= \lim_{n\to\infty} \chi_{s_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n g \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{\text{Beh}}{=} \int_X fg \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Damit wäre der erste Fall abgehakt.

Beweis der Behauptung Wähle eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Treppenfunktionen $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq |g|^q$ sodass

$$\lim_{i\to\infty} s_i(x) = |g(x)|^q \ \forall x \in X$$

Definiere $\varphi_i := s_i^{\frac{1}{p}} \operatorname{sgn} g$, das sind messbare Treppenfunktionen.

$$\Rightarrow \quad \int_X \varphi_i g \,\mathrm{d}\mu = \Lambda\varphi_i \leq c\|\varphi_i\|_p = c\|s_i\|_1^{\frac{1}{p}}$$

Andererseits

$$\int_X \varphi_i g \,\mathrm{d}\mu = \int_X s_i^{\frac{1}{p}} |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X s_i^{\frac{1}{p}} s_i^{\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}\mu = \|s_i\|_1$$

wobei wir $|g| \geq s_i^{\frac{1}{q}}$ verwenden.

$$\Rightarrow \quad \|s_i\|_1 \leq \int\limits_X \varphi_i g \, \mathrm{d}\mu \leq c\|\varphi_i\|_p = c\|s_i\|_1^{\frac{1}{p}}$$

(a) $s_i = 0$ f.ü. $\forall i \quad \Rightarrow \quad g = 0$ f.ü. $\quad \Rightarrow \quad g \in L^q$

(b) s_i nicht fast überall gleich 0, d.h. $\|s_i\|_q \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|s_i\|_1^{1-\frac{1}{p}} \leq c$ und $\|s_i\|_1^{1-\frac{1}{p}} = \|s_i\|_1^{\frac{1}{q}}$.

$$\Rightarrow \quad \|s_i\|_1 \leq c^q$$

$$\overset{(1.5.5)}{=} \int\limits_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \lim_{i \to \infty} \int\limits_X s_i \, \mathrm{d}\mu \leq c^q < \infty$$

woraus $g \in L^q$ folgt.

2. Fall: $p = 1, \mu(X) < \infty$.
Wie im ersten Fall $\exists g \in L^1(\mu)$ sodass

$$\Lambda s = \int\limits_X sy \, \mathrm{d}\mu$$

für alle messbaren Treppenfunktionen $s : X \to \mathbb{R}$.
Zu zeigen ist, dass $g \in L^\infty(\mu)$.
Annahme: $\operatorname{ess\,sup}|g| = \infty$

$$A_n := \{x \in X \mid |g(x)| \geq n\}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A_n) > 0, \quad s := \chi_{A_n} \operatorname{sgn}(g)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \Lambda s = \int\limits_X sg \, \mathrm{d}\mu \quad &= \quad \int\limits_X \chi_{A_n} |g| \, \mathrm{d}\mu \\ &\geq \quad n \underbrace{\mu(A_n)}_{=\|s\|_1} \\ &= \quad n\|s\|_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \|\Lambda\| \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Widerspruch.

3. Fall: $1 \leq p < \infty, \mu(X) = \infty$.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \mu(X_n) < \infty, \quad X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots, \quad X_n \in \mathcal{A}$$

daraus folgt mit erstem und zweitem Fall, dass

$$\exists g_k \in L^q(x_n, \mu_n)$$

sodass

$$\Lambda f = \int\limits_{X_n} f g_n \, \mathrm{d}\mu$$

$$\forall f \in L^p(\mu) : f|_{X \setminus X_n} \equiv 0$$

mit Eindeutigkeit

$$g_{n+1}|_{X_n} = g_n \text{ f.ü.}$$

O.B.d.A. sei $g_{n+1}(x) = g_n(x) \forall x \in X_n$. Definiere $g(x) := g_n(x)$ für $x \in X_n$. Dann ist g messbar und

$$\|g\|_q = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\|g_n\|_q}_{\int\limits_{X_n} |g|^q \, \mathrm{d}\mu}$$

$$\|g_n\|_q \leq \|\Lambda\|$$

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \lim_{n\to\infty} \Lambda(f\chi_{X_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} fg \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int\limits_X fg \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

6 Produktmaße und der Satz von Fubini

6.1 Der Produktraum

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

(6.1.1) **Definition:** Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Die *Produkt σ-Algebra* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra auf $X \times Y$, die alle Teilmengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ enthält.

(6.1.2) **Notation:** Für $E \subset X \times Y$ und $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir

$$E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \subset Y$$

$$E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\} \subset X$$

Für $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ definieren wir $f_x : Y \to \mathbb{R}$ durch

$$f_x(y) := f(x,y)$$

und $f^y : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f_y(x) := f(x,y)$$

(6.1.3) **Lemma:** Ist $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, so

$$E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X \qquad E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$$

Beweis: Sei

$$\Omega := \{E \subset X \times Y \mid E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X\}$$

Behauptung: Ω ist eine σ-Algebra und $A \times B \in \Omega \ \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Hieraus folgt $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \Omega$.
Beweis der Behauptung:

1. $A \times B \in \Omega \ \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Sei $E = A \times B$

$$E_x = \left\{ \begin{array}{ll} B, & x \in A \\ \emptyset, & x \notin A \end{array} \right\} \in \mathcal{B} \ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad E \in \Omega$$

2. $E \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X$$
$$\Rightarrow \quad (E^{\mathrm{C}})_x = (E_x)^{\mathrm{C}}$$
$$\Rightarrow E^{\mathrm{C}} \in \Omega$$

3. Sei $E_i \in \Omega$ für $i = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$ denn

$$E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X$$

Analog für E_y. □

(6.1.4) **Lemma:** Sei $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$-messbar.
Dann ist $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$ $\mathcal{B}$-messbar und $f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $y \in Y$ $\mathcal{A}$-messbar.

Beweis: Sei $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen

$$\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

$$\overset{(6.1.3)}{\Rightarrow} f^{-1}(V)_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$$

und

$$f^{-1}(V)_x = f_x^{-1}(V)$$

Also gilt für jedes $x \in X$:

$$f_x^{-1}(V) \in \mathcal{B} \; \forall V \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ offen}$$

$\Rightarrow f_x$ messbar.
Genauso f^y messbar $\forall y \in Y$. □

6.2 Monotone Klassen

(6.2.1) **Definition:** Ist X eine Menge, so heißt $\mathcal{M} \subset 2^X$ *monotone Klasse*, wenn gilt:

i) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X, \quad \forall i : A_i \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

ii) $B_1 \supset B_2 \supset \ldots, \quad \forall i : B_i \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{M}.$

Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse; die Menge aller Produktmengen ist ein Beispiel für eine monotone Klasse, die keine σ-Algebra ist.

(6.2.2) **Definition:** Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Eine Teilmenge $Q \subset X \times Y$ heißt *elementar* wenn sie eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Teilmengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ist.

(6.2.3) **Bemerkung:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist eine monotone Klasse und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wobei

$$\mathcal{E} := \{Q \subset X \times Y \mid Q \text{ ist elementar}\}$$

(6.2.4) **Lemma:** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist die kleinste monotone Klasse in $X \times Y$, die $\mathcal{E}$ enthält.

Beweis: $\mathcal{M}$:= kleinste monotone Klasse in $X \times Y$, die $\mathcal{E}$ enthält, dann ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
Zu zeigen: $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra.
Für $P \subset X \times Y$ definieren wir

$$\Omega(P) := \{Q \subset X \times Y \mid P \setminus Q, Q \setminus P, P \cup Q \in \mathcal{M}\}$$

1. $\Omega(P)$ ist eine monotone Klasse.
2. $Q \in \Omega(P) \quad \Leftrightarrow \quad P \in \Omega(Q)$
3. $P, Q \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad P \cap Q, P \setminus Q, Q \setminus P \in \mathcal{E}$

zu 3:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (A_1 \setminus A_2) \times B_1 \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \in \mathcal{E}$$

disjunkt.

1. $\Omega(P)$ ist eine monotone Klasse.
2. $Q \in \Omega(P) \quad \Leftrightarrow \quad P \in \Omega(Q)$
3. $P, Q \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad P \cap Q, P \setminus Q, P \cup Q \in \mathcal{E}$

4. $P \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \subset \Omega(P)$
   Nach 3. gilt $Q \setminus P, P \setminus Q, P \cup Q \in \mathcal{E}\ \forall Q \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} \subset \Omega(P) \quad \overset{1.}{\Rightarrow} \quad \mathcal{M} \subset \Omega(P)$$

5. $P \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \subset \Omega(P)$

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{M} \quad &\overset{4.}{\Rightarrow} \quad P \in \Omega(Q)\ \forall Q \in \mathcal{E} \\ &\overset{2.}{\Rightarrow} \quad Q \in \Omega(P)\ \forall Q \in \mathcal{E} \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{E} \subset \Omega(P) \\ &\overset{1.}{\Rightarrow} \quad \mathcal{M} \subset \Omega(P) \end{aligned}$$

6. $P, Q \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad P \setminus Q, P \cup Q \in \mathcal{M}$

$$P, Q \in \mathcal{M} \quad \overset{5.}{\Rightarrow} \quad Q \in \Omega(P)$$

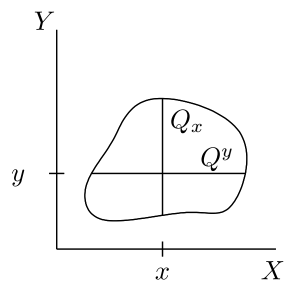
7. $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra.
   7.a $X \times Y \in \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$
   7.b $P \in \mathcal{M} \quad \overset{6.}{\Rightarrow} \quad P^{\mathrm{c}} = (X \times Y) \setminus P \in \mathcal{M}$
   7.c $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \quad P_i \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \quad Q_n := \bigcup_{i=1}^{n} P_i \in \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = P \in \mathcal{M}$$

Aus 7. folgt $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. □

6.3 Das Produktmaß



(6.3.1) **Satz:** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und definiere $\phi : X \to [0, \infty]$ und $\psi : Y \to [0, \infty]$ durch

$$\phi(x) := \nu(Q_x), \quad \psi(y) := \mu(Q^y)$$

Dann ist ϕ $\mathcal{A}$-messbar, ψ ist $\mathcal{B}$-messbar und

(*)
$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi \, \mathrm{d}\nu$$

(6.3.2) **Bemerkung:**

$$\phi(x) = \int_Y \chi_{Q_x}\,\mathrm{d}\nu = \int_Y \chi_{Q(x,y)}\,\mathrm{d}\nu(y)$$

Dies ist so zu verstehen, dass wir $\chi_{Q(x,y)}$ als Funktion über y auffassen.

$$\psi(y) = \int_X \chi_{Q^y}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{Q(x,y)}\,\mathrm{d}\nu(x)$$

Dann lässt sich (*) formulieren als

$$\int_X \int_Y \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X \chi_Q(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

Beweis von (6.3.1):

$$\Omega := \{Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mid \text{Die Behauptung von (6.3.1) gilt für } Q\}$$

Behauptung 1: $\mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \in \mathbf{\Omega}$

$$Q_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases}, \quad Q^y = \begin{cases} A, & y \in B \\ \emptyset, & y \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \nu(Q_x) = \nu(B)\chi_A(x), \quad \psi(y) = \mu(A)\chi_B(y)$$

$$\Rightarrow \quad \int_X \phi\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \psi\,\mathrm{d}\nu$$

Behauptung 2: $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2} \in \mathbf{\Omega}, \mathbf{Q_1} \cap \mathbf{Q_2} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} := \mathbf{Q_1} \cup \mathbf{Q_2} \in \mathbf{\Omega}$

$$\phi_i(x) := \nu((Q_i)_x) \quad \psi_i(y) := \mu((Q_i)^y) \qquad i = 1, 2$$

$$\phi(x) := \nu(Q_x) \quad \psi(y) := \mu(Q^y)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\Rightarrow \quad \phi \text{ messbar}, \quad \psi \text{ messbar}$$

$$\begin{aligned} \int_X \phi\,\mathrm{d}\mu &= \int_X \phi_1\,\mathrm{d}\mu + \int_X \phi_2\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_Y \psi_1\,\mathrm{d}\nu + \int_Y \psi_2\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_Y \psi\,\mathrm{d}\nu \end{aligned}$$

Behauptung 3: $\mathbf{Q_1} \subset \mathbf{Q_2} \subset \ldots \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Q_i} \in \mathbf{\Omega}$

$$\Rightarrow \quad Q := \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \in \Omega$$

$\phi_i, \psi_i, \phi, \psi$ wie im Beweis von Behauptung 2.

$$Q_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (Q_i)_x \in \mathcal{B} \;\forall x \in X, \quad Q^y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (Q_i)^y \in \mathcal{A} \;\forall y \in Y$$

$$\overset{(1.4.5)}{\Rightarrow} \quad \nu(Q_x) = \phi(x) = \lim_{i\to\infty} \phi_i(x) = \nu((Q_i)_x) \;\forall x \in X$$

$$\psi(y) = \lim_{i\to\infty} \psi_i(y)\ \forall y \in Y$$

$\Rightarrow$ ϕ, ψ messbar.

$$\phi_1 \leq \phi_2 \leq \ldots \leq \phi$$
$$\psi_1 \leq \psi_2 \leq \ldots \leq \psi$$

woraus mit (1.5.5) folgt:

$$\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X \phi_i \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_Y \psi_i \,\mathrm{d}\nu = \int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu$$

also $Q \in \Omega$.

Behauptung 4: $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu(A) < \infty, \nu(B) < \infty$

$$A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots, Q_i \in \Omega \quad \Rightarrow \quad Q := \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \in \Omega$$

Beweis wie in Behauptung 3.

$$\phi_i(x) := \underbrace{\nu((Q_i)_x)}_{\subset B} \leq \nu(B)\chi_A(x)$$

$$\psi_i(y) := \mu((Q_i)^y) \leq \mu(A)\chi_B(y)$$

daraus folgt mit (1.6.6):

$$\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X \phi_i \,\mathrm{d}\mu$$

$$\int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu = \lim_{i\to\infty} \int_Y \psi_i \,\mathrm{d}\nu$$

$\Rightarrow$ $Q \in \Omega$.

Behauptung 5: $\mathbf{\Omega} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ Da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endlich sind, gilt:

$$\exists X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X, \quad X_n \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_n) < \infty, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

$$\exists Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y, \quad Y_n \in \mathcal{B}, \quad \nu(Y_n) < \infty, \quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

$$\mathcal{M} := \{Q \in A \times B \mid Q \cap (X_n \times A_n) \in \Omega\}$$

Also

1. $\mathcal{M}$ ist eine monotone Klasse (Behauptung 3 & 4).
2. $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (Behauptung 1 & 2).
3. $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nach Definition $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Q \cap (X_n \times Y_n))$.

Also $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nach dem Lemma.
$\Rightarrow$ $Q \cap (X_n \times Y_n) \in \Omega\ \forall Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$
$\Rightarrow$ $\forall Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ gilt

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q \cap (X_n \times Y_n)) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \Omega$$

□

(6.3.3) **Definition:** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Das *Produktmaß* $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ist definiert durch

(*)
$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, \mathrm{d}\nu(y)$$

für $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

(6.3.4) **Bemerkung:**

1. $\mu \times \nu$ ist σ-additiv.

   Seien $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, Q_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Also $\nu(Q_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu((Q_i)_x)$, woraus mit (1.5.6) folgt:

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \nu((Q_i)_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(Q_i)$$

2. $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\ \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, siehe Beweis von (6.3.1)

3. $\mu \times \nu$ ist ein σ-endliches Maß.

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times Y_n$$
$$(\mu \times \nu)(X_n \times Y_n) < \infty$$

(6.3.5) **Beispiel:** Sei $X = Y = [0, 1]$, μ das Lebesguemaß, ν das Zählmaß und $Q = \Delta = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$.

$$Q_x = \{x\} \subset Y, \quad Q^y = \{y\} \subset X$$
$$\phi(x) = \nu(Q_x) = 1, \quad \psi(y) = \mu(Q_y) = 0$$
$$\int_X \phi\, \mathrm{d}\mu = 1, \quad \int_Y \psi\, \mathrm{d}\nu = 0$$

Der Satz von Fubini gilt nicht, weil Y nicht σ-endlich ist.

(6.3.6) **Beispiel:** $X = Y = [0, 1]$ und $\mu = \nu =$ Lebesguemaß. Es gibt eine geordnete Menge $(W, <)$ sodass

1. Jede Teilmenge von W hat ein Minimum.
2. W ist überabzählbar.
3. $\forall w \in W$ ist die Menge $\{v \in W \mid v < w\}$ abzählbar.
4. $\exists$ Bijektion $\iota : [0, 1] \to W$. Hier benötigt man das Auswahlaxiom.

Siehe Serie 8, Aufgabe 4. Sei

$$Q := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid \iota(x) < \iota(y)\}$$

Eine mysteriöse Ordnungsrelation.

$$\Rightarrow \quad Q_x = \{y \mid \iota(x) < \iota(y)\}, [0, 1] \setminus Q_x \text{ abzählbar}$$
$$Q^y = \{x \mid \psi(x) < \iota(y)\} \text{ abzählbar}$$
$$\Rightarrow \phi(x) = \nu(Q_x) = 1$$
$$\psi(y) = \phi(Q^y) = 0$$
$$\Rightarrow \int_X \phi\, \mathrm{d}\mu = 1, \int_Y \psi\, \mathrm{d}\nu = 0$$

Das liegt daran, dss Q nicht messbar ist.

(6.3.7) **Beispiel:**

$$\phi_n(x) \geq 0, \quad \mathrm{supp}\phi_n \subset [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}]$$

und es soll $\int \phi_n = 1$ sein.

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n(x) - \phi_{n+1}(x))\phi_n(y)$$

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int\int f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \phi_1(x), \qquad \int\int f\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$$

6.4 Satz von Fubini

(6.4.1) **Satz von Fubini** Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$-messbar. Dann

- Die Abbildung $X \to [0, \infty], x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ ist $\mathcal{A}$-messbar.
- Die Abbildung $Y \to [0, \infty], y \mapsto \int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ ist $\mathcal{B}$-messbar.
- $$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f\,\mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

(6.4.2) **Bemerkung:** Sei $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $f = \chi_Q$, in diesem Fall folgt (6.4.1) aus (6.3.1).

Beweis: $f_x(y) := f(x,y) =: f^y(x)$ und

$$\varphi(x) := \int_Y f_x\,\mathrm{d}\nu, \quad \psi(x) := \int_X f^y\,\mathrm{d}\mu$$

1. Fall: $f = \chi_Q$
   $$\varphi(x) := \nu(Q_x), \quad \psi(y) = \mu(Q^y)$$
   Siehe (6.3.1).
2. $f = s$, wobei s eine messbare Treppenfunktion ist.
   Dann $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{Q_i}$ mit $c_i \geq 0$ und $\forall i : Q_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Behauptungen folgen aus dem 1. Fall.
3. f beliebig.
   Aus irgendeinem Satz aus Kapitel I folgt, dass es eine Folge messbarer Treppenfunktionen $s_n : X \times Y \to [0, \infty]$ gibt, sodass $s_1(x,y) \leq s_2(x,y) \leq \ldots \leq f(x,y)$ und $f(x,y) = \lim\limits_{n \to \infty} s(x,y)$ für alle x, y. Definiere
   $$\varphi_n(x) := \int_Y s_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \quad \psi_n(x) := \int_X s_n(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Nach dem 2. Fall sind φ_n und ψ_n messbar und

(*)
$$\int\limits_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y \psi_n \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_{X\times Y} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)$$

Nach (1.5.5) (monotone Konvergenz) für $(s_n)_x : Y \to [0, \infty]$ gilt

(**)
$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_Y (s_n)_x \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

(***)
$$\psi(y) = \int\limits_X f^y \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (s_n)^y \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \psi_n(y)$$

Also ist

$$\int\limits_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu$$

$$\int\limits_Y \psi \, \mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_Y \psi_n \, \mathrm{d}\nu$$

$$\int\limits_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)$$

Daraus folgt mit (*) die Behauptung, da nach (**) und (***) φ und ψ messbar sind.

□

(6.4.3) **Bemerkung:** Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Nach (6.4.1)

$$\begin{aligned} \int\limits_{X\times Y} |f| \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) &= \int\limits_X \left(\int\limits_Y |f(x,y)| \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\limits_Y \left(\int\limits_X |f(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

Das heißt

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X |f(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mu \times \nu)$$

genauso $\int_X \int_Y |f|$.

(6.4.4) **Satz von Fubini, 2. Version** Sei $f \in L^1(\mu \times \nu)$ und definiere $f_x : Y \to \mathbb{R}$ und $f^y : X \to \mathbb{R}$ durch $f_x(y) := f(x,y) =: f^y(x)$. Dann gilt

1. $f_x \in L^1(\nu)$ für μ-fast alle $x \in X$. Definiere

$$\varphi(x) := \begin{cases} \int\limits_Y f_x \, \mathrm{d}\nu & \text{falls } f_x \in L^1(\nu) \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

2. $f^y \in L^1(\mu)$ für ν-fast alle $y \in Y$. Definiere

$$\psi(y) := \begin{cases} \int\limits_X f^y \, \mathrm{d}\mu & \text{falls } f^y \in L^1(\nu) \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

3. $\varphi \in L^1(\mu), \psi \in L^1(\nu)$ und

$$\int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_Y \psi \,\mathrm{d}\nu$$

Beweis: $f_x^{\pm}(y) := \max\{\pm f(x,y), 0\} = f^{\pm}(x,y)$.
$f^{\pm} : X \times Y \to [0,\infty)$ sind $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$-messbar. Nach (6.1.4) ist $f_x^{\pm} : Y \to [0,\infty)$ $\mathcal{B}$-messbar für alle x. Definiere $\Phi^{\pm} : X \to [0,\infty]$ durch

$$\Phi^{\pm}(x) := \int\limits_Y f_x^{\pm} \,\mathrm{d}\nu$$

Nach (6.4.1) ist $\Phi^{\pm}$ $\mathcal{A}$-messbar und

$$\int\limits_X \Phi^{\pm} \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f^{\pm} \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \leq \int\limits_{X\times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) < \infty$$

Nach (1.7.9) ist die Menge

$$E := \{x \in X \mid \Phi^+(x) = \infty \text{ oder } \Phi^-(x) = \infty\}$$

ist $\mathcal{A}$-messbar und $\mu(E) = 0$ und

$$\begin{aligned} x \in E \quad &\Leftrightarrow \quad \int\limits_Y f_x^+ \,\mathrm{d}\nu = \infty \text{ oder } \int\limits_Y f_x^- \,\mathrm{d}\nu = \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \int\limits_Y |f_x| \,\mathrm{d}\nu = \infty \end{aligned}$$

Also $x \in E \quad \Leftrightarrow \quad f_x \notin L^1(\nu)$.
Definiere $\varphi^{\pm} : X \to [0,\infty)$ durch

$$\varphi^{\pm}(x) := \begin{cases} \Phi^{\pm}(x), & x \notin E \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

Also $\varphi^{\pm} \in L^1(\mu)$

$$\int\limits_X \varphi^{\pm} \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f^{\pm} \,\mathrm{d}(\mu\times\nu)$$

$$\varphi := \varphi^+ - \varphi^-$$

ist integierbar und

$$\int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\times\nu)$$

□

6.5 Vervollständigung der Produkt-σ-Algebra

(6.5.1) **Bemerkung:** Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ vollständig, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ vollständig. Ist $(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\nu)$ vollständig?

(6.5.2) **Beispiel:** Nein!
Sei $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0, A \neq \emptyset$, $B \subset Y, B \notin \mathcal{B}$
$\Rightarrow A\times B \notin \mathcal{A}\times\mathcal{B}, A\times B \subset A\times Y \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$
$(\mu\times\nu)(A\times Y) = \mu(A)\cdot\nu(Y) = 0$.

(6.5.3) **Satz:** $n = k + l$, $k, l \in \mathbb{N}$.
$m_k : \mathcal{A}_k \to [0, \infty]$ Lebesguemass auf $\mathbb{R}^k$.
$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_n, m_n)$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l, m_k \times m_l)$

Beweis: Sei $\mathcal{B}_n =$ Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_n := \{$Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ der Form $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)\}$
$\Rightarrow \mathcal{C}_n \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$
$\mathcal{B}_n$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{C}_n$ enthält.
Behauptung 1: $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l$, $m_n(B) = (m_k \times m_l)(B)\ \forall B \in \mathcal{B}$
Beweis von Behauptung 1:

1. Fall: $B = E \in \mathcal{C}_n$

   $E = [a_1, b_1) \times \ldots \times \underbrace{[a_n, b_n)}_{=I_n}$

   $E' := I_1 \times \ldots \times I_k \in \mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}_k$

   $E'' := I_{k+1} \times \ldots \times I_n \in \mathcal{C}_l \times \mathcal{A}_l$

   $(m_k \times m_l)(E) = m_k(E') \cdot m_l(E'') = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i) = m_n(E)$

2. Fall: $B = U$ offen.

   $\Rightarrow \exists E_1, E_2, \ldots, \in \mathcal{C}_n$ paarweise disjunkt, $U = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$

   $\overset{1.\text{ Fall}}{\Longrightarrow} U \in \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l$ und $(m_k \times m_l)(U) = \sum_{i=1}^\infty (m_k \times m_l)(E_i)$

   $m_n(U) = \sum_i m_n(E_i)$

3. Fall: $B = K$ kompakt.

   $\Rightarrow \exists U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, s.d. $K \subset U$

   $\Rightarrow V := U \setminus K$ offen.

   $\overset{2.\text{ Fall}}{\Longrightarrow} K = U \setminus V \in \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l$

   $(m_k \times m_l)(K) = (m_k \times m_l)(U) - (m_k \times m_l)(V)$

   $m_n(K) = m_n(U) - m_n(V)$

4. Fall: B beliebig

   $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l$ nach dem 2. Fall.

   $m_n(B) = \inf_{\substack{U \text{ offen} \\ B \subset U}} m_n(U) = \inf_{\substack{U \text{ offen} \\ B \subset U}} (m_k \times m_l)(U) \geq (m_k \times m_l)(B)$

   $m_n(B) = \sup_{\substack{K \text{ kpkt} \\ K \subset B}} m_n(K) = \sup_{K \subset B} (m_k \times m_l)(K) \leq (m_k \times m_l)(B)$

Behauptung 2: $\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_n$
Beweis: $E \in \mathcal{A}_k$
$\Rightarrow \exists A, B \in \mathcal{B}_k$ sodass $A \subset E \subset B, m_k(B \setminus A) = 0$
$\overset{!}{\Rightarrow} \underbrace{A}_{\in \mathcal{B}_n} \times \mathbb{R}^l \subset E \times \mathbb{R}^l \subset \underbrace{B}_{\in \mathcal{B}_n} \times \mathbb{R}^l$
$m_n(B \times \mathbb{R}^l \setminus A \times \mathbb{R}^l) = 0$
$\Rightarrow E \times \mathbb{R}^l \in \mathcal{A}_n$
Genauso: $\mathbb{R}^n \times F \in \mathcal{A}_n \forall F \in \mathcal{A}_l$
$\Rightarrow E \times F = (E \times \mathbb{R}^l) \cap (\mathbb{R}^k \times F) \forall E \in \mathcal{A}_k \forall F \in \mathcal{A}_l$
$\Rightarrow$ Behauptung 2.
Beweis von "!":
$B \in \mathcal{B}_k \Rightarrow B \times \mathbb{R}^l \in \mathcal{B}_n$
Definiere $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ durch

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_k)$$

π ist stetig.
$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}_k$ gilt $\pi^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^l \in \mathcal{B}_n$
$m_n((B \times \mathbb{R}^l) \setminus (A \times \mathbb{R}^l)) = m_n((\underbrace{B \setminus A}_{\in \mathcal{A}_k}) \times \underbrace{\mathbb{R}^l}_{\in \mathcal{A}_l}) = m_k(B \setminus A) m_l(\mathbb{R}^l) = 0$

Zusammenfassung:
$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}n$, $(m_k \times m_l)|_{\mathcal{B}_n} = m_n|_{\mathcal{B}_n}$
Zu zeigen: $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$ (Vervollständigung), $(m_k \times m_l)^* = m_n$

a) $\mathcal{A}_n \subset (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$, $(m_k \times m_l)^*|_{\mathcal{A}_n} = m_n$.
$A \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \exists B_0, B_1 \in \mathcal{B}_n$ sodass $B_0 \subset A \subset B_1, m_n(B_1 \setminus B_0) = 0$
$\overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow} B_0, B_1 \in \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l$, $(m_k \times m_l)(B_1 \setminus B_0) = 0$
$\Rightarrow A \in (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$.
$(m_k \times m_l)^*(A) = (m_k \times m_l)(B_0) \overset{\text{Beh. 1}}{=} m_n(B_0) = m_n(A)$

b) $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$
$\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l \overset{\text{Beh. 2}}{\subset} \mathcal{A}_n \subset (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$, $(m_k \times m_l)^*|_{\mathcal{A}_n} = m_n$
$\overset{\text{Kap. 1}}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_l)^*$, da $\mathcal{A}_n$ vollständig ist.

□

(6.5.4) **Lemma:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Massraum, $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ Vervollständigung, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}^*$-messbar
$\Rightarrow \exists g : X \to \bar{\mathbb{R}}, \mathcal{A}$-messbar, $\exists N \in \mathcal{A}$ sodass $\mu(N) = 0$, $f(x) = g(x) \forall x \in N^c$

Beweis: Nach Kapitel I $\exists$ Folge $\mathcal{A}^*$-messbarer Treppenfunktionen $s_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sodass $s_n(x) \to f(x) \forall x \in X$.

$$s_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} \chi_{E_{n,i}}$$

$E_{n,i} \in \mathcal{A}^* \Rightarrow \exists A_{n,i}, B_{n,i} \in \mathcal{A}^*$ sodass $A_{n,i} \subset E_{n,i} \subset B_{n,i}, \mu(B_{n,i} \setminus A_{n,i}) = 0$
$N := \bigcup_{n,i} (B_{n,i} \setminus A_{n,i}) \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$
$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in N^c \\ 0, & s \in N \end{cases}$
$t_n(x) = \begin{cases} s_n(x), & x \in N^c \\ 0, & s \in N \end{cases} = \sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} \chi_{A_{n,i} \setminus N}$, $\mathcal{A}$-messbar.
$t_n(x) \to g(x) \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad g(x) \mathcal{A}$-messbar. □

(6.5.5) **Lemma:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endlich.
$h : X \times Y \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*$-messbar
$h = 0$ $(\mu \times \nu)^*$-fast-überall.
$\Rightarrow$ Für μ-fast-jedes x gilt: $h_x = 0$ ν-fast-überall

Beweis: $P := \{(x, y) \in X \times Y \mid h(x, y) = 0\}$
$\Rightarrow \exists Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit $P \subset Q$, $(\mu \times \nu)(Q) = 0$
$\Rightarrow \int_X \nu(Q_x) \mathrm{d}\mu(x) = 0$
$\overset{(1.7.9)}{\Longrightarrow} E := \{x \in X \mid \nu(Q_x) = 0\} \in \mathcal{A}$ erfüllt $\mu(E) = 0$
$\forall x \in X \setminus E$ gilt $h_x = 0$ auf $Y \setminus Q_x$ □

(6.5.6) **Korollar:** $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ sei $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*$-messbar
$\Rightarrow f_x : Y \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}$-messbar für fast jedes x.

Beweis: g wie in Lemma (6.5.4), dazu Lemma (6.5.5) auf $h := f - g$ anwenden.
□

(6.5.7) **Korollar:** Die beiden Sätze von Fubini (Satz (6.4.1) und Satz (6.4.4)) gelten auch für $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*$-messbare Funktionen $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ (modulo Korollar (6.5.6)).

6.6 Die Faltung

(6.6.1) **Satz:** $f, g \in L^1(m_1)$ wobei m_1 das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist.
$\Rightarrow \exists$ Lebesgue-Nullmenge $E \subset \mathbb{R}$ sodass

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}y < \infty \forall x \in E^c$$

   Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ für $x \in E^c, h(x) := 0 \forall x \in E$

2. $h \in L^1(\mathbb{R})$ und $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

(6.6.2) **Definition:** $h =: f * g$ heisst Faltung von f und g.

(6.6.3) **Bemerkung:** $L^1(\mathbb{R})$ ist eine Banach-Algebra.

Beweis: OBdA nehmen wir an, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siene Borel-messbar.
Definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x, y) := f(x-y)g(y)$$

F ist Borel-messbar:
Definiere $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x, y) := x - y, \qquad \psi(x, y) := y$$

$\Rightarrow F = (\underbrace{f \circ \varphi}_{\text{Borel-messbar}})(\underbrace{g \circ \psi}_{\text{Borel-messbar}}) \checkmark$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| \mathrm{d}x}_{\|f\|_1} \right) |g(y)| \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

Nach Fubini und Korollar (6.5.7) ist die linke Seite gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,y)| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} |F| \mathrm{d}m_2 \Rightarrow F \in L^1$$

$\Rightarrow F_x \in L^1(\mathbb{R})$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$
$E = \{x \in \mathbb{R} \mid F_x \notin L^1\}$
$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$
$\Rightarrow h \in L^1$ □

(6.6.4) **Bemerkung:** $f \in L^1, g \in L^p \Rightarrow f * g \in L^p$
$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
Nach Young, schwierig zu beweisen.

Index